

โปรแกรมเครื่องคำนวณสำหรับทำ Reservoir Routing

โดย

ผศ. สัจจะ เสถบุตร^{*}

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงโปรแกรมสำหรับทำ Reservoir Routing โดยใช้เครื่องคำนวณของบริษัท Texas Instruments แบบ SR-56 ซึ่งให้ความสะดวกในการคำนวณหาขนาดของทางน้ำล้น ข้อมูลพื้นฐานที่ต้องการคือ inflow flood hydrograph และ storage-elevation curve นอกจากนั้นบทความยังได้เสนอโปรแกรมสำหรับหาสมการของ storage-elevation curve ด้วย

1 บทนำ

Reservoir หรือ Storage Routing คือการหาความเปลี่ยนแปลงของ flood hydrograph ที่ผ่านอ่างเก็บน้ำ บทความนี้เสนอโปรแกรมสำหรับทำ Reservoir Routing ที่สามารถใช้ได้กับเครื่องคำนวณแบบโปรแกรมได้ของบริษัท Texas Instruments แบบ SR-56 โปรแกรมนี้สามารถนำไปใช้ในการคำนวณหาขนาดของทางน้ำล้น (spillway) ได้

การอธิบายในบทความนี้ ถือว่าผู้ที่จะนำโปรแกรมไปใช้งานมีความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการของ Reservoir Routing อยู่แล้ว และมีความคุ้นเคยกับการโปรแกรมเครื่องคำนวณ SR-56

2 RESERVOIR ROUTING

หลักการของ Reservoir Routing มีอธิบายอยู่ในหนังสือวิชาชลศาสตร์ทั่ว ๆ ไป เช่น (1)^{**} ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเป็นการแก้สมการ continuity สำหรับการไหลเข้าและออกของน้ำในอ่างเก็บน้ำในรูปของสมการ differential คือ

$$I - Q = \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

โดยที่ I และ Q คือ inflow และ outflow hydrographs, V คือปริมาตรของน้ำที่ถูกกักเก็บอยู่ในอ่าง และ t คือเวลา ทั้ง I, Q และ V เป็นฟังก์ชันของเวลา รูปที่ 1 แสดง inflow และ outflow hydrographs ในกรณีทั่ว ๆ ไป

^{*} ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

^{**} ตัวเลขในวงเล็บแสดงเอกสารอ้างอิงท้ายบทความ

ที่ทางน้ำล้น อัตราการไหลของน้ำออกจากอ่าง Q ขึ้นอยู่กับระดับน้ำในบริเวณนั้น ถ้า h คือค่าระดับน้ำวัดจากสันของทางน้ำล้น อาจเขียนได้ว่า

$$Q = f(h) \quad (2)$$

โดยที่ $f(h)$ คือฟังก์ชันที่รู้ของ h

สำหรับอ่างเก็บน้ำ กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ V กับ h ที่เรียกว่า **storage-elevation curve** เป็นข้อมูลที่รู้ซึ่งอาจเขียนได้ว่าเป็น

$$V = F(h) \quad (3)$$

โดยที่ $F(h)$ คือฟังก์ชันที่รู้ของ h แทนค่าสมการ (2) และ (3) ลงในสมการ (1) จะได้

$$I - f(h) = dF(h)/dt \quad (4)$$

ถ้า I เป็นฟังก์ชันที่รู้ของ t สมการ (4) จึงเป็น **first order ordinary differential equation** ที่สามารถแก้เพื่อหา $h(t)$ ได้ สมการ (4) อาจเป็น **linear** หรือ **non-linear** ก็ได้ขึ้นอยู่กับลักษณะของ $f(h)$ และ $F(h)$ ถ้าเป็น **linear** ก็อาจแก้โดยวิธี **analytic** ได้ เช่นใช้ **Laplace Transform** แต่ถ้าเป็น **non-linear** ก็อาจต้องแก้โดยวิธี **numerical** โดยทั่วไปมักจะเป็น **non-linear** โปรแกรมที่เสนอในบทความนี้เป็นการแก้สมการโดยวิธี **numerical**

3 โปรแกรม RESERVOIR ROUTING

3.1 วิธีที่ใช้

วิธีที่ใช้แก้สมการในโปรแกรมเป็นวิธีเดียวกับที่แสดงอยู่ใน (1) หัวข้อ 9.2 ตัวอย่างที่ 9.1 กล่าวคือ สำหรับช่วงเวลา Δt สมการ (1) เขียนได้เป็น 2 สมการคือ

$$N_2 = N_1 + \frac{1}{2} (I_1 + I_2) - Q_1 \quad (5)$$

และ

$$N = \frac{V}{\Delta t} + \frac{Q}{2} \quad (6)$$

ในสมการ (5) และ (6), Δt คือ **routing period** และ **subscripts 1 และ 2** แสดงค่าก่อนและหลังช่วงเวลา Δt หลักการของ **Reservoir Routing** ก็คือพยายามแก้สมการ (5) และ (6) เพื่อหา Q_2 กล่าวคือในช่วงเวลา Δt หนึ่ง ๆ ปริมาณด้านขวามือของสมการ (5) เป็นค่าที่รู้ ดังนั้นจึงรู้ค่า N_2 จากนั้นจึงหาค่า Q_2 จากสมการ (6) โดยที่รู้ความสัมพันธ์ของ V กับ Q จากการกำหนด h ในสมการ (2) และ (3)

สำหรับทางน้ำสั้นโดยทั่วไป $f(h)$ เขียนได้ว่าเป็น

$$Q = ch^d \quad (7)$$

โดยที่ c และ d เป็นค่าคงที่สำหรับทางน้ำสั้นอันหนึ่ง ๆ ค่าทั้งสองขึ้นอยู่กับขนาดและลักษณะของทางน้ำสั้น (หมายเหตุ: ค่า c เป็นค่ามีมิติ กล่าวคือขึ้นอยู่กับหน่วยของ Q และ h ที่ใช้ด้วย) ในการออกแบบอาจใช้ค่าที่แนะนำไว้ในตารางที่ 1 ได้

สำหรับ storage-elevation curve, $F(h)$ อาจเขียนได้ว่าเป็น

$$V = ah^b \quad (8)$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่สำหรับอ่างเก็บน้ำอันหนึ่ง ๆ ค่าทั้งสองหาได้จากการใส่กราฟในฟอร์มของสมการ (8) ลงใน storage-elevation curve โปรแกรมสำหรับหาค่า a และ b แสดงอยู่ในหัวข้อที่ 4 ในหัวข้อที่ 3 นี้จะถือว่า ค่า a และ b เป็นค่าที่รู้

3.2 ค่าที่ต้องบรรจุใน memory registers ก่อนใช้โปรแกรม

ค่า a, b, c, d และ Δt เป็นค่าที่ถือว่ารูก่อนใช้โปรแกรม เนื่องจากต้องการประหยัด memory registers จึงรวม a, b, c, d และ Δt เข้าด้วยกันเป็น 2 ปริมาณคือ b/d และ $a/\Delta t(c)^{b/d}$ แล้วจึงบรรจุลงใน memory registers 3 และ 2 ตามลำดับ หน่วยของ Δt ต้องเป็นไปตามหน่วยของ I และ Q หน่วยของ c ต้องเป็นไปตามหน่วยของ Q และ h

ถ้า inflow hydrograph, $I(t)$ อยู่ในช่วง $0 \leq t < \infty$ ค่า $Q(t=0)$ จะเท่ากับค่า $I(t=0)$ ค่า $Q(t=0)$ นี้จะต้องบรรจุลงใน memory register 8 ค่า $N(t=0)$

คำนวณได้จาก

$$N_0 = \left[a/\Delta t(c)^{b/d} \right] Q_0^{b/d} + Q_0/2 \quad (9)$$

โดยที่ N_0 และ Q_0 คือ $N(t=0)$ และ $Q(t=0)$ ตามลำดับ ค่า $N(t=0)$ จะต้องบรรจุลงใน memory register 5

ใน memory register 9 จะต้องบรรจุค่า e ซึ่งใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องของการหาค่า Q จากค่า N จาก subroutine ค่า e ควรอยู่ระหว่าง 0.1 ถึง 0.001

3.3 ตัวโปรแกรม

โปรแกรม Reservoir Routing ถือว่าค่า $a, b, c, d, \Delta t$ และความสัมพันธ์ในรูปตารางของ I กับ t เป็นค่าที่รู้ จากค่าเหล่านี้ โปรแกรมจะสามารถหาค่าของ Q กับ t รายละเอียดของโปรแกรมและการใช้ แสดงอยู่ในตารางที่ 2 ซึ่งใช้รูปแบบเดียวกับใน (2) ในคอลัมน์ display ของตารางที่ 2 (c) บางบันทึกก็ไม่ได้แสดงไว้เนื่องจากไม่มีความสำคัญ

3.4 ตัวอย่าง

ตามโจทย์ในตัวอย่างที่ 9.1 ของ (1) จากสมการ (8) เราจะได้ว่า

$$a = 500 \text{ acres} = 21,600,000 \text{ ft}^2$$

$$\text{และ } b = 1$$

สำหรับอัตราการไหลออกผ่านคลอง เขียนได้ว่าเป็น

$$Q = 25 v_c y_c = 25 \sqrt{g y_c} y_c = \left[25 \sqrt{g} \right] y_c^{1.5}$$

เนื่องจาก $y_c = \frac{2}{3} h$ ดังนั้น

$$Q = \left[25 \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} \right)^{1.5} \right] h^{1.5} = 77.189 h^{1.5} = c h^d$$

ดังนั้น $c = 77.189 \text{ ft}^{1.5}/\text{sec}$

$d = 1.5$

ดังนั้น $b/d = 0.66$ และ $a/\Delta t (c)^{b/d} = 110.32$ โดยให้ $\Delta t = 3$

ชั่วโมง

จากจุดนี้เราสามารถเริ่มการคำนวณโดยวิธีการในตารางที่ 2 หลังจากที่ได้บรรจุโปรแกรมลงในเครื่องคำนวณ (Item 1) และบรรจุค่าที่จำเป็นลงใน memory (Item 2) แล้ว (ใช้ $e=0.1$) โดยกดปุ่มดังต่อไปนี้

ตัวเลข (ค่า I)	กดปุ่ม	ค่าที่แสดงบนเครื่องคำนวณ	หมายเหตุ
	RST R/S INV EE	1000	ค่า $I(t=0)$
1200	R/S	1012.756	ค่า $Q(t=3\Delta t)$
	R/S	1200	ค่า $I(t=3\Delta t)$
1600	R/S	1062.627	ค่า $Q(t=6\Delta t)$
	R/S	1600	ค่า $I(t=6\Delta t)$
2100	R/S	1166.297	ค่า $Q(t=9\Delta t)$

หาไปดังนี้จนหมดค่า I ที่โจทย์ให้ ค่า Q ที่ t ต่าง ๆ กันก็คือ outflow hydrograph ที่ต้องการ กราฟของ $I(t)$ และ $Q(t)$ แสดงอยู่ในรูปที่ 1

4 โปรแกรม CURVE FITTING

4.1 วิธีที่ใช้ (3)

โปรแกรม Curve Fitting มีไว้เพื่อใส่กราฟในลักษณะ

$$v = ah^b \quad (10)$$

ลงในจุดข้อมูลที่ได้จาก storage-elevation curve คือ

$$(h_i, v_i), i = 1, 2, \dots, n; n > 1 \quad (11)$$

โดยที่ h_i คือค่าระดับน้ำวัดจากสันทางน้ำล้น (spillway crest) และ V_i คือค่าปริมาตรที่ระดับ h_i โดยที่ $V=0$ ที่ $h=0$ ถ้าเขียนสมการ (11) ในรูป

$$\ln V = b \ln h + \ln a \quad (12)$$

ปัญหาก็จะกลายเป็น linear regression สัมประสิทธิ์ a และ b จะหาได้จากสูตร

$$b = \frac{\sum (\ln h_i) (\ln V_i) - \frac{(\sum \ln h_i) (\sum \ln V_i)}{n}}{\sum (\ln h_i)^2 - \frac{(\sum \ln h_i)^2}{n}} \quad (13)$$

$$\text{และ } a = \exp \left[\frac{\sum \ln V_i}{n} - \frac{b}{n} \sum \ln h_i \right] \quad (14)$$

ค่า correlation coefficient จะหาได้จากสูตร

$$r^2 = \frac{\left[\sum (\ln h_i) (\ln V_i) - \frac{(\sum \ln h_i) (\sum \ln V_i)}{n} \right]^2}{\left[\sum (\ln h_i)^2 - \frac{(\sum \ln h_i)^2}{n} \right] \left[\sum (\ln V_i)^2 - \frac{(\sum \ln V_i)^2}{n} \right]} \quad (15)$$

4.2 ตัวโปรแกรม

โปรแกรมถือว่าค่า (h_i, V_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ เป็นค่าที่รู้และต้องป้อนให้กับโปรแกรม ค่าที่โปรแกรมจะคำนวณให้คือ a, b และ r^2 รายละเอียดของโปรแกรมและการใช้แสดงอยู่ในตารางที่ 3 ในคอลัมน์ display ของตารางที่ 3(c) บางบันทึกก็ไม่ได้แสดงไว้เนื่องจากไม่มีความสำคัญ

4.3 ตัวอย่าง

ข้อมูล storage-elevation ของอ่างเก็บน้ำแห่งหนึ่งเป็นดังนี้

h	0	10	12	15	17	20	22	25	27	30	32	35
V	0	0.95	1.05	1.25	1.41	1.73	2.00	2.53	2.98	3.85	4.59	6.02

โดยที่หน่วยของ h เป็น ft และหน่วยของ V เป็น 10^6 ft^3

5 สรุป

โปรแกรมสำหรับทำ Reservoir หรือ Storage Routing ได้ถูกนำเสนอ วิธี Reservoir Routing ในโปรแกรมเป็นไปตามที่แสดงไว้ในหัวข้อ 9.2 ของ (1) โดยถือว่า storage-elevation curve เขียนได้เป็น $V = ah^b$ โดยที่ค่า a และ b เป็นข้อมูลที่สำคัญเป็นส่วนหนึ่งของโปรแกรม

นอกจากนั้นโปรแกรมสำหรับใส่สมการ $V = ah^b$ ลงใน storage-elevation curve ก็ถูกนำเสนอด้วย โปรแกรมนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะหาค่า a และ b เพื่อนำไปใช้ในโปรแกรม Reservoir Routing

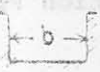
โปรแกรมทั้งสองได้ผ่านการตรวจสอบโดยนำไปใช้กับตัวอย่างใน (1) และ (3) ซึ่งมีคำตอบที่ถูกต้องอยู่แล้ว

เอกสารอ้างอิง

1. HENDERSON, F.M. - Open Channel Flow, Macmillan, New York, 1966.
2. Texas Instruments, Programmable Slide-Rule Calculator, SR-56 Application Library.
3. Hewlett-Packard, HP-25 Application Programs, 1975.

TABLE 1 - Approximate Values of c and d for Various Types of Control Structures

$$Q = c h^d$$

Type of control structure	c	d
Orifice or Underflow gate	$C_d A_o \sqrt{2g}$ $A_o = \text{area of opening}$ $C_d \approx 0.65$	0.5
Rectangular weir	$\frac{2}{3} C_d b \sqrt{2g}$  $C_d \approx 0.62$	1.5
Broad crested weir	$\frac{2}{3} \sqrt{2g/3}$	1.5
Overfall spillway	$\frac{2}{3} C_d b \sqrt{2g}$ $C_d \approx 0.62$ $b = \text{crest length}$	1.5
V - Notched weir	$\frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \tan \frac{\theta}{2}$  $C_d \approx 0.58$	2.5

Reservoir Routing

DISPLAY			KEY			DISPLAY			KEY			DISPLAY			KEY			DISPLAY			KEY		
Step	Code		Step	Code		Step	Code		Step	Code		Step	Code		Step	Code		Step	Code		Step	Code	
00	34	RCL	20	34	RCL	40	64	X	60	34	RCL	80	84	+									
01	08	8	21	08	8	41	34	RCL	61	09	9	81	92	*									
02	84	+	22	84	+	42	08	8	62	47	*X $\geq$ 1	82	05	5									
03	01	1	23	34	RCL	43	45	y ^x	63	03	3	83	94	=									
04	44	EE	24	05	5	44	34	RCL	64	02	2	84	54	÷									
05	06	6	25	94	=	45	03	3	65	34	RCL	85	34	RCL									
06	93	+/-	26	33	STO	46	84	+	66	03	3	86	04	4									
07	94	=	27	05	5	47	34	RCL	67	64	X	87	94	=									
08	33	STO	28	46	*NOP	48	08	8	68	34	RCL	88	20	1/X									
09	08	8	29	57	*Subr	49	54	÷	69	02	2	89	74	-									
10	34	RCL	30	03	3	50	02	2	70	64	X	90	34	RCL									
11	01	1	31	08	8	51	94	=	71	34	RCL	91	08	8									
12	84	+	32	34	RCL	52	74	-	72	08	8	92	94	=									
13	41	R/S	33	08	8	53	34	RCL	73	45	y ^x	93	93	+/-									
14	33	STO	34	41	R/S	54	05	5	74	52	(	94	33	STO									
15	01	1	35	22	GTO	55	94	=	75	34	RCL	95	08	8									
16	94	=	36	01	1	56	33	STO	76	03	3	96	22	GTO									
17	54	÷	37	00	0	57	04	4	77	74	-	97	03	3									
18	02	2	38	34	RCL	58	28	*IXI	78	01	1	98	08	8									
19	74	-	39	02	2	59	32	X $\geq$ 1	79	53	)	99	58	*rtn									

Note on step

00 - 09 To prevent $Q (= 0)$ from being zero which causes error in calculation

13 To feed in value of 1

10 - 27 To compute N from Eq.(5) [if display of N is required, key in R/S at step 28]

38 - 99 Subroutine to compute Q from known N by Newton's method

32 - 37 To display Q and return to step 10

38 - 57 To compute $f(Q) = \left[\frac{b/d}{a/\Delta t(c)} \right] Q^{b/d} + Q/2$ using previous value of Q

58 - 64 To test if $f(Q) \leq e$, if not, try new Q

65 - 83 To compute $\frac{df(Q)}{dQ}$

84 - 98 To compute new Q by Newton's method and return to step 38 for reiteration

Table 2 (b) - Registers

0	1	I	$\frac{b/d}{a/\Delta t(c)}$	3	b/d	4	f(Q)
5	N	6		7	Q	8	e

Table 3 (a)—Program Listing

Curve Fitting

DISPLAY			KEY	DISPLAY			KEY	DISPLAY			KEY	DISPLAY			KEY	DISPLAY			KEY
Step	Code			Step	Code			Step	Code			Step	Code			Step	Code		
00	41	R/S		20	64	X		40	03	3		60	34	RCL		80	34	RCL	
01	13	lnX		21	34	RCL		41	94	=		61	04	4		81	08	8	
02	33	STO		22	09	9		42	33	STO		62	74	—		82	54	—	
03	08	8		23	94	=		43	08	8		63	34	RCL		83	52	(	
04	35	SUM		24	35	SUM		44	54	÷		64	01	1		84	34	RCL	
05	07	7		25	05	5		45	52	(		65	64	X		85	02	2	
06	43	X ²		26	01	1		46	34	RCL		66	34	RCL		86	74	—	
07	35	SUM		27	35	SUM		47	06	6		67	07	7		87	34	RCL	
08	06	6		28	03	3		48	74	—		68	94	=		88	04	4	
09	41	R/S		29	42	RST		49	34	RCL		69	54	÷		89	43	X ²	
10	13	lnX		30	34	RCL		50	07	7		70	34	RCL		90	54	÷	
11	33	STO		31	05	5		51	43	X ²		71	03	3		91	34	RCL	
12	09	9		32	74	—		52	54	÷		72	94	=		92	03	3	
13	35	SUM		33	34	RCL		53	34	RCL		73	41	e ^x		93	53	)	
14	04	4		34	07	7		54	03	3		74	33	STO		94	94	=	
15	43	X ²		35	64	X		55	53	)		75	00	0		95	33	STO	
16	35	SUM		36	34	RCL		56	94	=		76	41	R/S		96	09	9	
17	02	2		37	04	4		57	33	STO		77	34	RCL		97	41	R/S	
18	34	RCL		38	54	÷		58	01	1		78	01	1		98			
19	08	8		39	34	RCL		59	41	R/S		79	64	X		99			

Note on step

- 00 To feed in value of h
- 09 To feed in value of V
- 00—05 To calculate $\sum \ln h_i$ and store in memory register 7
- 06—08 To calculate $\sum (\ln h_i)^2$ and store in memory register 6
- 10—14 To calculate $\sum \ln V_i$ and store in memory register 4
- 15—17 To calculate $\sum (\ln V_i)^2$ and store in memory register 2
- 18—25 To calculate $\sum (\ln h_i \ln V_i)$ and store in memory register 5
- 26—28 To count for the number of data point n
- 30—59 To calculate b from Eq.(13) and store in 1
- 60—76 To calculate a from Eq.(14) and store in 0
- 77—97 To calculate r^2 from Eq.(15) and store in 9

Table 3 (b)—Registers

0	a	1	b	2	$\sum (\ln V_i)^2$	3	n	4	$\sum \ln V_i$
5	$\sum (\ln h_i \ln V_i)$	6	$\sum (\ln h_i)^2$	7	$\sum \ln h_i$	8	$\ln h_i$	9	$\ln V_i, r^2$

Table 3 (c)—User Instructions

Item	Procedure	Enter (number)	Press	Display
1	Enter program		LRN, program listing, LRN	
2	Feed in data points, if any h_i or $V_i = 0$ feed in a very small value say 0.00001 instead. and so on until all data points are fed in	h_1 V_1 h_2 V_2 h_3 V_3	*CMs RST R/S R/S R/S R/S R/S R/S	
3	Start calculating b, a and r^2		GTO 30 R/S R/S R/S	b a r^2