

การหาพื้นที่เหล็กเสริมรับแรงดึงในคาน คสล.โดยวิธีตรง

ดร.ไพฑูรย์ โล่ห์สุนทร*

1. บทนำ

การคำนวณพื้นที่เหล็กเสริมแรงดึง A_s ในคาน คสล. แบบ singly reinforced rectangular section และ T section นั้น ตำราที่พบเห็นจะอ้างความยุ่งยากในการคำนวณหาตำแหน่งของแนวแกนสะเทินหรือ ค่า k ก่อนการหาพื้นที่เหล็กเสริมแรงดึง และเสนอให้ใช้วิธี Iteration ในกรณีของคานหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะสมมุติค่า k และในกรณีของคานหน้าตัดรูปตัว T จะสมมุติตำแหน่งแรงลัพธ์ของหน่วยแรงอัดในคอนกรีตหรือค่า y วิธีการที่ว่ามีข้อเสียอย่างน้อยสองประการคือ ประการแรกผลลัพธ์ A_s ที่ได้มีค่าสูงกว่าค่าที่จำเป็นต้องใช้จริงโดยไม่รู้ค่าส่วนเกิน หากต้องการผลลัพธ์ที่ดีกว่าจะต้องทำการคำนวณซ้ำ ประการที่สอง การเขียน computer programme เพื่อการคำนวณออกแบบคานหน้าตัดเหล่านี้นั้นตามจังหวะการ Iteration มีการสลับเปลี่ยนกว่าที่กระทำได้โดยวิธีตรง

บทความนี้จะแสดงการหาค่า k ของคาน คสล. ทั้งสองแบบโดยวิธีตรง ทำให้สามารถคำนวณหาค่า A_s ที่ถูกต้องได้โดยตรงทันที

การหารากจริงของสมการยกกำลังสาม

สมการยกกำลังสามในรูป

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \quad (1)$$

สามารถทอนให้เป็นรูปมาตรฐาน

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2)$$

$$\text{โดยการแทนค่า } y = x - a/3 \quad (3)$$

* รองศาสตราจารย์, ภาควิชาวิศวกรรมโยธา, คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

เมื่อหารากของ x ในสมการ (2) ได้ก็จะสามารถหารากของ y ในสมการ (1) ได้โดยใช้สมการ (3) รากของสมการ (2) อาจเป็นทั้ง Real roots และ Imaginary roots โดยที่ปัญหาที่จะกล่าวถึงเป็นปัญหาที่มีสภาพทางกายภาพ รากสมการจึงมีความหมายทางกายภาพก็ต้องเป็น Real roots ซึ่งจะเป็นได้เมื่อสัมประสิทธิ์ในสมการ (2) มีค่าตามสมการ (4)

$$4p^3 + 27q^2 < 0 \quad (4)$$

และมีรากของ x เป็น Real roots สามค่าคือ

$$x = \sqrt{-4p/3} \cos \alpha/3, \sqrt{-4p/3} \cos (120 \pm \alpha/3) \quad (5)$$

$$\text{โดยมี } \cos \alpha = 3q/p\sqrt{-4p/3} \quad (6)$$

2. คานหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในการคำนวณออกแบบคาน คสล. แบบ Singly reinforced rectangular section ค่ากำลังวัสดุ ค่าแรงดัดเนื่องจากน้ำหนักบรรทุก และขนาดหน้าตัดของคอนกรีต คือ ความกว้าง b และความลึกประสิทธิภาพ d เป็นค่าที่ต้องกำหนดขึ้นก่อนนับเป็นค่ารู้ การคำนวณออกแบบในส่วนนี้คือการหาค่า A_s ซึ่งจำเป็นต้องใช้ค่า k ในการคำนวณ ค่า A_s และค่า k จึงเป็นค่าไม่รู้

เมื่อเขียนสมการจากรูปสามเหลี่ยมคล้ายของ Strain diagram ที่รู้จักกันทั่วไปในรูป $k = 1/(1 + f_s/nf_c)$ และสมการสมดุลของหน้าตัด $C = T$ กับ $M = Tjd$ โดยแยกค่ารู้ไว้ด้านขวาและค่าไม่รู้ไว้ด้านซ้ายจะได้

$$(1-k)f_c/k = f_s/n \quad (7)$$

$$A_s/f_c k = bd/2f_s \quad (8)$$

$$A_s(1-k/3) = M/f_s d \quad (9)$$

โดยที่เป็นหน้าตัดเสริมเหล็กค่า A_s จึงเป็นขนาดพื้นที่หน้าตัดเหล็กเสริมที่พอดีทำให้หน่วยแรงในเหล็ก f_s สูงถึงค่ายอมให้ ส่วนหน่วยแรงอัดสูงสุดในคอนกรีต f_c เป็นค่าไม่รู้ที่ต่ำกว่าค่ายอมให้ ซึ่งอาจทดสอบได้เมื่อ

$$M < M_b$$

โดยมี M_b = แรงคัทสมมูลของหน้าตัด

เมื่อนำสมการ (7) (8) และ (9) มาจัด A_s, f_c จะได้สมการยกกำลังของ k เป็น

$$k^3 - 3k^2 - C_o k + C_o = 0 \quad (10)$$

$$\text{โดยมี } C_o = 6nM/f_s b d^2 \quad (11)$$

เขียนเป็น Standard form แบบสมการ (2) ได้โดยแทนค่า

$$k = x+1 \quad (12)$$

เป็น

$$x^3 + (-C_o - 3)x + (-2) = 0 \quad (13)$$

ค่า $4p^3 + 27q^2$ ของสมการ (13) มีค่าเป็น

$$4[-(C_o + 3)]^3 + 27(-2)^2 = -4(C_o + 3)^3 + 4 \times 27$$

ซึ่งมีค่าน้อยกว่าศูนย์เสมอเพราะ C_o มีค่าเป็นบวก แสดงว่า x ในสมการ (13) จึงมีรากจริง 3 ค่าเป็น

$$x = \sqrt{4(C_o + 3)/3} \cos \alpha/3, \sqrt{4(C_o + 3)/3} \cos (120 \pm \alpha/3) \quad (14)$$

$$\text{โดยมี } \cos \alpha = 6/(C_o + 3)\sqrt{4(C_o + 3)/3} \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \quad (15)$$

รากที่มีความหมายทางกายภาพตรงกับปัญหานี้คือ รากที่

$$x = \sqrt{4(C_o + 3)/3} \cos (120 - \alpha/3) \quad (16)$$

ส่วนรากจริงอื่นมีความหมายทางกายภาพที่เป็นจริงไม่ได้

3. ตัวอย่างการคำนวณ

ควน คสล. ขนาด $b \times d = 22 \times 55 \text{ cm}^2$ ใช้วัสดุ มี $f_c = 180 \text{ ksc}$ $f_y = 3000 \text{ ksc}$ รับแรงคัท $M = 6500 \text{ kg-m}$ จะมีค่า Modular ratio n เป็น

$$n = 2.04 \times 10^6 / 2.33^{1.5} 4270 \sqrt{180} = 10.01$$

$$\text{ใช้ } n = 10$$

กำหนดแรงที่ยอมให้

$$f_c = 0.45 f_c = 0.45 \times 180 = 81 \text{ ksc}$$

$$f_s = 0.50 f_y = 0.50 \times 3000 = 1500 \text{ ksc}$$

$$k_b = 1 / (1 + 15000 / (10 \times 81)) = 0.3506$$

$$j_b = 1 - k_b / 3 = 0.8831$$

$$M_b = 81 \times 0.3506 \times 0.8831 \times 22 \times 55^2 / 2 = 834497 \text{ kg-cm}$$

$$M_b = (M = 6500 \text{ kg-m}) \text{ แสดงว่าเป็นหน้าคัทเสริมเหล็กต่ำ}$$

$$C_o = 6 \times 10 \times 65000 / (1500 \times 22 \times 55^2) = 0.39068$$

$$\cos \alpha = 6 / (3.39068) \sqrt{4 \times 3.39068 / 3} = 0.8322$$

$$\text{หรือ } \alpha = 33.67^\circ$$

$$x = \sqrt{4 \times 3.39068 / 3} \cos (120 - 33.67 / 3) = -0.6844$$

$$k = x + 1 = 0.3156$$

$$kd = 0.3156 \times 55 = 17.358 \text{ cm}$$

$$j = 1 - k / 3 = 0.8948$$

$$\text{และ } A_s = 6500 \times 100 / (1500 \times 0.8948 \times 55) = 8.805 \text{ cm}^2$$

ความหมายทางกายภาพของรากที่เหลือ

สำหรับรากจริงอีก 2 ค่า ของตัวอย่างการคำนวณข้างต้น คือ

$$x = \sqrt{4 \times 3.39068 / 3} \cos (33.67 / 3) = 2.0856$$

$$\text{และ } x = \sqrt{4 \times 3.39068 / 3} \cos (120 + 33.67 / 3) = -1.4012$$

ทำให้ได้ k เป็น

$$k = 3.0856 \text{ และ } -0.4012$$

$$\text{และ } kd = 169.708 \text{ และ } -22.066 \text{ cm. ตามลำดับ}$$

เมื่อนำค่า kd ทั้งสองค่านี้มาเขียนรูปหน้าตัดส่วนรับแรงอัดของคอนกรีตโดยวัดจากแนวหลังคานจริงเข้าหาตำแหน่งเหล็กเสริมเป็นระยะค่าบวก และวัดทางออกจากตำแหน่งเหล็กเสริมเป็นระยะค่าลบ จะได้รูปดังแสดงในรูปที่ 1 ข และ ค

ข้อแตกต่างสำคัญของรูปที่ 1 ก ที่แสดงพื้นที่รับแรงอัดของคอนกรีตที่เกิดขึ้นจริงกับรูปที่ 1 ข และ ค ซึ่งแสดงพื้นที่รับแรงอัดของคอนกรีตที่ไม่อาจเป็นจริงได้ คือ ในกรณีรูปที่ 1 ก พื้นที่รับแรงอัดของคอนกรีตและพื้นที่เหล็กเสริมรับแรงดึง อยู่คนละด้านของแนวแกนสะเทิน ส่วนในกรณีรูปที่ 1 ข และ ค จะอยู่บนด้านเดียวกัน

ถ้าเขียนรูปความเครียดของหน้าตัดตามรูปที่ 1 ข และ ค โดยมีความเครียดเป็นศูนย์ที่แนวแกนสะเทิน และความเครียดสูงสุดในคอนกรีตที่แนวหลังคานจริง จะพบว่าความเครียดในเหล็กเสริมมีค่าวกกลับตามความเครียดในคอนกรีต ซึ่งเป็นจริงไม่ได้ แสดงว่าพื้นที่รับแรงอัดของคอนกรีตต้องมีค่าวกกลับต่างไปจากของพื้นที่เหล็กเสริม ทำให้แรงลัพธ์ของหน่วยแรงมีค่าตรงกันข้ามกับความเครียดที่เกิดขึ้น ดังแสดงในรูป

การคำนวณค่า A_s ในกรณีที่ไม่เป็นจริงจะช่วยให้นี้ใจในความถูกต้องของสมการที่ยกมาอ้าง การคำนวณนี้สามารถทำได้ทั้งโดยใช้นิยามของแนวแกนสะเทิน และโดยสมการสมดุลของหน้าตัด หรือ แรงคัตภายนอกมีค่าเท่ากับโมเมนต์ควบคู่ของแรงลัพธ์ของหน่วยแรงในคอนกรีต C และของหน่วยแรงในเหล็กเสริม T

ในกรณีของรูปที่ 1 ข ซึ่งแสดงรายละเอียดในรูปแล้ว ระยะห่างระหว่างแรงลัพธ์ C และ T มีค่าเป็น

$$169.708/3-55 = 1.57 \text{ cm.}$$

ทำให้คำนวณขนาดพื้นที่ A_s จากสมการสมดุลของหน้าตัดเป็น

$$A_s = 6500 \times 100 / 1500 \times 1.57 = 276.126 \text{ cm}^2$$

หรือโดยนิยามของแนวแกนสะเทิน จะเขียนสมการ หา A_s ได้เป็น

$$10A_s (169.708-55) = 2 \times 169.708^2 / 2$$

ซึ่งให้

$$A_s = 276.187 \text{ cm}^2$$

ส่วนในกรณีของรูปที่ 1 ค ระยะห่างระหว่างแรงลัพท์ C และ T มีค่าเป็น

$$22.066/3+55 = 62.33 \text{ cm.}$$

ทำให้ได้ A_s โดยสมการสมดุลของหน้าตัดเป็น

$$A_s = 6500 \times 100 / 1500 \times 62.33 = 6.952 \text{ cm}^2$$

หรือโดยเขียนสมการตามนิยามของแนวแกนสะเทินจะได้

$$10A_s(22.066+55) = 22 \times 22.066^2 / 2$$

ซึ่งให้

$$A_s = 6.95 \text{ cm}^2$$

4. ข้อพิจารณาเกี่ยวกับค่า c_o

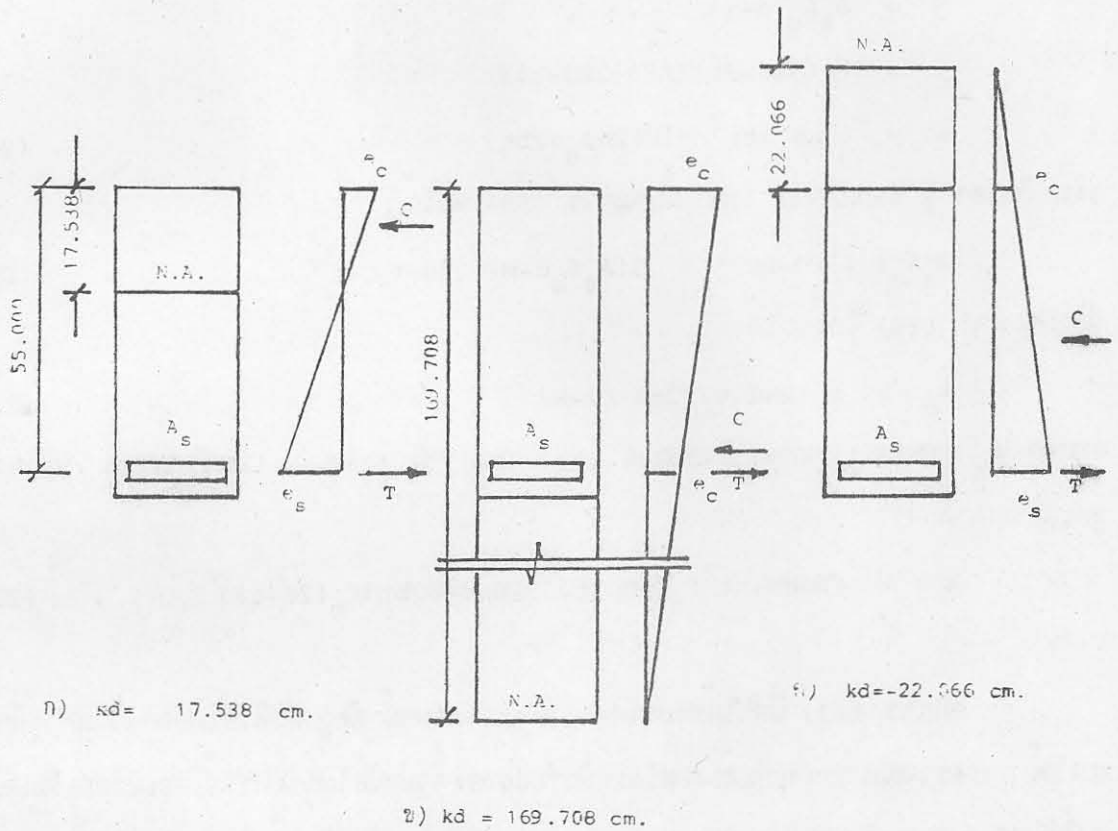
สำหรับค่า b, d และกำลังของวัสดุที่กำหนดให้ชุดหนึ่ง ๆ ค่า c_o จะสูงตามค่าแรงคัต M ที่กระทำต่อหน้าตัด ค่าแรงคัตนี้มีค่าสูงเกินค่าแรงคัตสมดุล M_b ของหน้าตัดไม่ได้ ดังนั้นค่าสูงสุดของ c_o จึงเป็นค่าที่สภาวะสมดุล ซึ่งจะเรียกว่า c_b

จัดรูปสมการ (10) ใหม่จะได้

$$c_o = (3-k)k^2 / (1-k) \quad (17)$$

ทำให้ได้ค่าสูงสุดของ c_o หรือ c_b เป็นค่าตามสมการ (17) ที่มีค่า k เป็นค่า k ที่สภาวะสมดุล หรือ k_b

ค่า c_b นี้จะสูงตามกำลังของคอนกรีต แต่จะลดลงตามกำลังที่เพิ่มขึ้นของเหล็กเสริม กรณีที่กำลังของคอนกรีตสูงมากรวมกับกำลังของเหล็กต่ำมาก ค่า c_b จะสูงมาก เช่น $f_c = 400 \text{ ksc}$ และ $f_y = 2400 \text{ ksc}$ จะได้ $c_b = 1.338$ และ $\alpha = 54.9^\circ$ ซึ่งอาจถือได้ว่าเป็นค่าสูงสุดของ c_o ที่อาจเกิดขึ้นได้ในทางปฏิบัติ อย่างไรก็ตามการเลือกชั้นคุณภาพของวัสดุทั้งสองที่เหมาะสมกันจะได้ค่า c_o อยู่ระหว่าง 0.28 ถึง 0.78 และมี α อยู่ระหว่าง 29° ถึง 45°



รูปที่ 1 พื้นที่รับแรงอัดของคอนกรีตตามค่า kd

5. การหาหน้าตัดรูปตัวที

ในการคำนวณออกแบบคาน คสล. แบบ Singly reinforced T section ค่ากำลังวัสดุ ค่าแรงอัด และขนาดหน้าตัดได้แก่ความกว้าง b และความหนา t ของปีกความลึกประสิทธิภาพ d ตลอดจน ค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในเหล็กเสริมรับแรงดึง f_s เป็นค่ารู้ตามเงื่อนไขการออกแบบ

สมการสมดุลของหน้าตัด สมการจาก Strain diagram และสมการแสดงตำแหน่ง
แนวกระทำของแรงลัพธ์ของหน่วยแรงอัดในส่วนปีกของหน้าตัด หรือค่า $\bar{y}$ ของหน้าตัดรูปตัวที่มีรูป
เป็น

$$M = A_s f_s (d - \bar{y}) \quad (18)$$

$$\bar{y} = [t(3kd - 2t)] / [3(2kd - t)] \quad (19)$$

$$k = [2nA_s + bt^2/d] / [2nA_s + 2bt] \quad (20)$$

เมื่อเทียบค่า $\bar{y}$ จากสมการ (18) กับสมการ (19) จะได้

$$A_s f_s t (3kd - 2t) = 3(A_s f_s d - M)(2kd - t) \quad (21)$$

จัดรูปสมการ (20) ใหม่จะได้

$$A_s = bt(2kd - t) / 2nd(1 - k) \quad (22)$$

แทนค่า A_s จากสมการ (22) ในสมการ (21) จะพบว่า มี $(2kd - t)$ เป็นตัวคูณรวม ทำให้จัด
รูปเสียใหม่เป็น

$$k = [6ndM + bt^2 f_s (3d - 2t)] / [6ndM + 3btd f_s (2d - t)] \quad (23)$$

สมการ (23) นี้ทำให้คำนวณค่า k ของคานหน้าตัดรูปตัวที่ได้โดยตรงจากค่ารู้ที่กำ
หนดให้ การตรวจสอบว่าจำเป็นต้องเสริมเหล็กกับแรงอัดด้วยหรือไม่กระทำได้โดยเปรียบเทียบค่า
 k นี้กับค่า k สมดุล การตรวจสอบว่าเป็นหน้าตัดรูปตัวที่จริงหรือเป็นหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้ากระทำ
ได้โดย เปรียบเทียบระยะตำแหน่งแนวแกนสะเทินหรือค่า kd กับค่าความหนา t

นอกจากนี้ ค่า k ตามสมการ (23) จะมีค่า เท่ากับค่า k ตามสมการ (10) เมื่อ
แทนค่าด้วยค่ารู้ชุดเดียวกันและแทนค่า t ด้วยค่า kd เช่น เมื่อแทนค่าในสมการ (23) ด้วยค่า
ที่ใช้ในตัวอย่างที่แสดงไปกับแทนค่า $t = kd = 17.358 \text{ cm}$ ค่า k ที่คำนวณจากสมการ (23)
จะมีค่าเท่ากับที่คำนวณได้ในตัวอย่างนั้น

6. บทสรุป

วิธีคำนวณหาค่า k สำหรับหน้าตัดทั้งสองแบบข้างต้นนั้นเป็นวิธีโดยตรง ทำให้สามารถคำนวณหาพื้นที่เหล็กเสริมรับแรงดึงที่เป็นผลลัพธ์แท้จริงได้ทันที ไม่จำเป็นต้องทำการคำนวณซ้ำ นับว่ามีข้อได้เปรียบวิธีอื่น ๆ นอกจากนี้การคำนวณได้ปริมาณพื้นที่เหล็กเสริมรับแรงดึงไม่ได้ใช้ค่ากำลังของคอนกรีตโดยตรง ทำให้สามารถเลือกกำหนดระดับชั้นคุณภาพของคอนกรีตหลังการคำนวณหาปริมาณพื้นที่เหล็กเสริมรับแรงดึงได้ โดยเลือกให้สอดคล้องกับค่าหน่วยแรงอัดที่เกิดขึ้นในคอนกรีต และค่า n ที่เลือกใช้ในการคำนวณ

วิธีคำนวณค่า k ที่นำเสนอนี้ น่าจะมีส่วนช่วยให้การศึกษาวิชาการออกแบบคอนกรีตเสริมเหล็ก ในส่วนที่เกี่ยวข้องเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

7. บรรณานุกรม

Heading, J. (1965), "Mathematical Methods in Science and Engineering,"
Edward Arnold (Publishers) Ltd., London