

สมการดิฟเฟอเรนเชียลกับการคำนวณ GPA

โดย ดร. สุรพงษ์ จิระรัตนานนท์

๑. **คำนำ** ในการวัดผลการศึกษาในระบบหน่วยกิต ค่าศัพท์ที่ใช้กันบ่อยที่สุดสามคำคือ เครดิต (Credit) จำนวนหน่วยกิต, GP (Cumulative grade point) ผลรวมของผลคูณระหว่างจำนวนเครดิตต่อวิชาและค่าคะแนนที่ได้แต่ละวิชา, GPA (Cumulative grade point average) ค่าคะแนนเฉลี่ยสะสมซึ่งสัมพันธ์กันต่อไปนี.

$$GPA = \frac{GP}{x}, \quad x \text{ คือผลรวมของจำนวนหน่วยกิตของวิชาต่าง ๆ}$$

เท่าที่ผ่านมามีปรากฏว่ามีปัญหาในรูปต่างๆ ที่เกิดขึ้นเกี่ยวกับการคำนวณค่า GPA ในระหว่างอาจารย์, นักศึกษาและผู้ที่เกี่ยวข้องในวงการศึกษา จุดประสงค์ของบทความนี้เพื่อแสดงแนวทางทางหนึ่งแก่ผู้ที่เกี่ยวข้องในการวางระเบียบการเกี่ยวกับค่า GPA ที่เหมาะสมในกรณีสำหรับสภาพลองเรียน (on probation) และสำหรับช่วยนักศึกษาในการคำนวณค่าคะแนนเฉลี่ยของวิชาใหม่ (Marginal grade point average) ที่นักศึกษาจะต้องสอบได้โดยเฉพาะเมื่ออยู่ในสภาพลองเรียน วิธีการที่ใช้ในที่นี้คือการเขียนสมการดิฟเฟอเรนเชียลของ GPA สำหรับค่าคะแนนเฉลี่ยที่จะต้องสอบได้ในรูปต่างๆ และหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลเป็นฟังก์ชัน (Function) ของ x , จำนวนเครดิตสะสม

๒. **ปัญหา** สมมติว่าภายหลังจากสอบปีที่หนึ่งแล้วปรากฏว่านักศึกษาคณหนึ่งสอบได้ค่า GPA เท่ากับ k_1 จากจำนวนเครดิตของวิชาที่เรียนไปแล้วทั้งหมด c_1 นักศึกษาคณเดียวกันนี้ต้องการสอบให้ได้ GPA เท่ากับ k_2 เมื่อได้เรียนไปแล้ว c_2 เครดิตในปีต่อไปหรือในสองสามหรือสี่ปี ปัญหาในที่นี้คือการตัดสินว่านักศึกษาคณจะต้องสอบให้ได้ค่าคะแนนเฉลี่ยของวิชาต่อไป (Marginal GPA) อย่างไรจึงจะได้ GPA ในปลายทางได้ดังประสงค์

ปัญหาที่วางไว้เท่านั้นถ้าไม่มีข้อจำกัด (Restriction) มเติมแทบทุกคนคงจะ
ทราบว่าการหาคำตอบที่แน่นอนไม่ได้ เพื่อที่จะหาคำตอบแน่นอนจะต้องวางข้อจำกัดสำหรับ
Marginal GPA ออกเป็นกรณีต่างๆ ก่อนอื่นเพื่อความเข้าใจขอให้คำนิยามของ
Marginal GPA ดังนี้

คำนิยาม: Marginal Grade Point Average (ย่อว่า MGPA)

$$MGPA = \frac{d GP}{dx} \quad (1)$$

ในที่นี้ MGPA คืออัตราการเพิ่มของค่า Cumulative grade point
(GP) เมื่อเทียบกับอัตราการเพิ่มของ x, จำนวนเครดิต เราอาจมองว่า MGPA
เป็นดัชนี (Index) ที่แสดงให้เห็นถึงความพยายามของนักศึกษาในการยกระดับค่าของ
GPA ถ้านักศึกษาพยายามมากหรือสอบได้คะแนนดัชนีค่า MGPA ก็สูงขึ้น และใน
ทำนองกลับกัน ถ้านักศึกษาพยายามน้อยลงหรือสอบได้คะแนนเลวลงค่า MGPA ก็ตก
ต่ำลง

กรณี ๑ $MGPA = K$ ค่าคงที่

ในกรณีนี้ นักศึกษาจะต้องใช้ความพยายามสม่ำเสมอ เพื่อจะยกค่า GPA จาก
สมการข้างบน

$$GP = GPA \cdot x \quad (2)$$

$$\frac{d GP}{dx} = K = \frac{d}{dx} (GPA \cdot x) \quad (3)$$

สมการ (3) มีคำตอบ คือ

$$GPA = \frac{1}{x} \cdot \left(\int_{c_1}^x K dx \right) + \frac{a}{x} \quad (4)$$

ในที่นี้ a คือค่าคงที่ (constant) ที่เกิดจาก integration พิจารณาจาก
boundary conditions ว่าขณะที่

$x = c_1$, $GPA = k_1$ และขณะที่ $x = c_2$, $GPA = k_2$ จะพบว่าสมการ (4)
ให้คำตอบดังนี้

$$GPA = \frac{k_2 c_2 - k_1 c_1}{c_2 - c_1} - \frac{(k_2 - k_1) c_1 c_2}{c_2 - c_1} \cdot \frac{1}{x} \quad (5)$$

ค่าของ GPA ตามสมการ (5) เป็น hyperbolic function ของ x ค่าของ MGPA หรือ คำนวณ ความพยายาม คือ

$$MGPA = K = \frac{k_2 c_2 - k_1 c_1}{c_2 - c_1} \quad (6)$$

กราฟในรูปที่ ๑ แสดงค่าของ GPA ในเทอมของ x เมื่อ $c_1 = 40$, $c_2 = 150$, $k_1 = 1.5$ และ $k_2 = 2.0$ จากกราฟจะเห็นว่านักศึกษาที่ได้ GPA 1.5 ในประมาณปลายปีหนึ่งจะต้องใช้ความพยายามสม่ำเสมอเพื่อให้ได้ค่า $K = 2.181$ เพื่อที่จะสามารถยก GPA ให้ได้ถึง 2.0 เมื่อครบประมาณปลายปีที่สี่ ขณะใดในช่วงระหว่างนั้นถ้าความพยายามของนักศึกษาตกต่ำกว่าที่คำนวณไว้ ก็จะต้องเพิ่มความพยายามให้มากกว่าเดิม (คือต้องได้ $\frac{dGPA}{dx}$ มากกว่า 2.181) เพื่อยก GPA ให้อยู่ในข่ายที่ต้องการ มองจากอีกแง่หนึ่งกราฟนี้จะเป็นเครื่องแนะแนวทางทางหนึ่ง สำหรับผู้ที่เกี่ยวข้องในการวางระเบียบการลงเรียนว่า สำหรับช่วงจำนวนเครดิตเท่าใด GPA ของสภาพลงเรียนควรจะอยู่ในระหว่างค่าเท่าใดกับค่า 2.0 โดยที่ไม่เกินความพยายามหรือความสามารถของนักศึกษา

อันนี้เป็นที่รู้กันอยู่ว่าการวัดผลในระบบหน่วยกิตโดยอาศัยค่า GPA เป็นเกณฑ์ ข้อที่น่าสนใจก็คือว่า ถ้านักศึกษาตกวิชาใดวิชาหนึ่งและเรียนซ้ำวิชานั้น ค่าของ GPA ที่ได้เมื่อได้เรียนซ้ำและผ่านวิชานั้นแล้ว ในบางกรณีจะน้อยกว่าค่าของ GPA ที่นักศึกษาควรจะได้ ถ้านักศึกษาสอบได้คะแนนเท่ากับคะแนนเฉลี่ยของการสอบทั้งสองครั้งตั้งแต่การสอบครั้งแรก ตัวอย่างเช่นนักศึกษาเรียนมาแล้ว 96 หน่วยกิต ได้ค่า GPA 2.0 เมื่อเรียนวิชาเพิ่มวิชาหนึ่งซึ่งมี 4 เครดิต สอบได้ชั้น F เมื่อเรียนซ้ำวิชาแล้วสอบได้ชั้น B ในขณะนั้น GPA ของนักศึกษานั้นคือ $\frac{192+0+12}{104} = 1.961$ ในขณะเดียวกันถ้านักศึกษานั้นสอบได้คะแนน 1.5 เสียตั้งแต่แรกซึ่งจะได้ GPA $\frac{192+6}{100} = 1.98$ ซึ่งในกรณีหลังนี้ค่า GPA สูงกว่าประการนี้รวมกับข้อที่คาดกันว่า การเรียนในชั้นปีปลาย ๆ จะยากกว่าปีต้น ๆ เราอาจจะหันมาพิจารณากรณีที่นักศึกษาต้องการใช้ความพยายามมากกว่าเพื่อยกให้ GPA สูง

แต่ขั้น ๆ และความพยายามซึ่งวัดด้วยค่า $\frac{dGP}{dx}$ นี้อาจจะหย่อนลงบ้างในปีปลาย ๆ สมการ

(3) ก็สามารถนำมาใช้คำนวณค่า GPA ได้ในกรณีประเภทนี้

กรณี ๒ $MGPA = c - bx$ ถ้าชั้นความพยายามลดลงตามจำนวนเครดิตที่เรียน อาจารย์
สมการ (3) ค่าตอบในทันที คือ

$$GPA = c + \frac{1}{x} \left(a + \frac{bc_1^2}{2} - cc_1 \right) - \frac{bx}{2} \quad (7)$$

ถ้า c เป็นค่าที่กำหนดให้พิจารณาจาก boundary conditions ในทำนองเดียวกับ
กับ กรณีที่ ๑ เราพบว่า

$$a = k_1 c_1$$

$$b = 2 \cdot \frac{c(c_2 - c_1) - (k_2 c_2 - k_1 c_1)}{c_2^2 - c_1^2}$$

กรณี ๓ $MGPA = c(1 - e^{-bx})$ ถ้าชั้นความพยายามลดลงเป็นแบบ exponential
คำตอบจากสมการที่ (3) คือ

$$GPA = \frac{a - cc_1}{x} + c - \frac{c}{bx} (e^{-bc_1} - e^{-bx})$$

ค่าของ a และ b จะหาได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ ๑ และที่ ๒ ข้างต้น

๓. **คำสรุป** จุดประสงค์ของการวิเคราะห์ข้างต้นก็เพื่อแสดงแนวทางทางหนึ่งในการคำนวณ
ค่าของ GPA จะสังเกตได้ว่าบทความนี้ไม่ได้ขยายใจความให้ละเอียดในหลายตอน ผู้
สนใจควรจะสามารถศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม รวมทั้งพิจารณากรณีเฉพาะที่ไม่ได้แสดงให้เห็น
เห็นในทันที

