# วิวัฒนาการของการศึกษาและคำนวณค่าความดันลดของการไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลวในท่อแนวนอน

**ดร. อภิชัย เทอดเทียนวงษ์**
ผู้ช่วยศาสตราจารย์
ภาควิชาวิศวกรรมเคมี
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

**ฉัตรชัย วิรุฬห์วรวุฒิ**
นักศึกษา
ภาควิชาวิศวกรรมเคมี
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

## บทคัดย่อ

การไหลแบบสองวัฏภาคเป็นปรากฏการณ์หนึ่งที่มีความสำคัญ และพบเห็นกันมากในเครื่องมือทางอุตสาหกรรม โดยเฉพาะอย่างยิ่งในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการเปลี่ยนวัฏภาค เครื่องทำระเหย และเครื่องควบแน่น หรือแม้แต่ระบบท่อในอุปกรณ์ทำความเย็น ปัจจุบันความรู้พื้นฐานตลอดจนรูปแบบจำลองทางทฤษฎีของการไหลแบบสองวัฏภาคได้รับการศึกษาและพัฒนาอย่างมากมาย แต่เป็นที่น่าเสียดายยิ่งที่ความรู้ดังกล่าวได้รับการบรรจุเข้าในการเรียนการสอนระดับปริญญาตรีน้อยมาก ดังนั้นในบทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อเสนอรูปแบบการไหล การหารูปแบบจำลอง วิธีการคำนวณค่าความดันลด และการเลือกใช้วิธีการคำนวณที่เหมาะสมสำหรับการไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลว

# Development of the Study and Calculation of the Pressure Drop in Gas-Liquid Two-Phase Flow in Horizontal Tube

**Dr. Apichai Therdthianwong**
Assistant Professor
Chemical Engineering Department
Faculty of Engineering Khonkaen University

**Chatchai Wirunworawut**
Undergraduate Student
Chemical Engineering Department
Faculty of Engineering Khonkaen University

## Abstract

Two-phase flow is an important phenomena and often seen in many industrial equipments. The units relevant to phase change are heat exchangers, evaporators, condensers and pipelines in cryogenic system. So far, the fundamental knowledge and theoretical model of two-phase flow have been studied and developed thoroughly. Unfortunately, only few of these knowledges are included in the undergraduate level course. Therefore the objective of this topic is to present the flow patterns, the search for the two-phase flow model, and the calculation of pressure drop. How to select the suitable model for gas-liquid flow at various conditions is also discussed.

# คำนำ

การไหลแบบสองวัฏภาค หมายถึง การไหลของของผสมที่ประกอบด้วย วัฏภาคที่แตกต่างกันสองวัฏภาค ซึ่งอาจแบ่งออกเป็นการไหลของก๊าซผสมกับของเหลว (gas-liquid flows) การไหลของของแข็งผสมกับของเหลว (solid-liquid flows) หรือการไหลของก๊าซผสมกับของแข็ง (gas-solid flows) โดยในบทความนี้จะขอกล่าวเฉพาะการไหลระหว่างก๊าซ-ของเหลวในท่อแนวนอน

ปรากฏการณ์การไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลว มักพบกันมากในอุปกรณ์ที่มีการถ่ายเทความร้อน อาทิเช่น เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน (heat exchanger) เครื่องควบแน่น (condenser) เครื่องทำระเหย (evaporator) นอกจากนี้ยังพบในเครื่องปฏิกรณ์เคมี และเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ หรือแม้แต่การไหลของสารที่ป้อนเข้าหอกลั่น (distillation column) การไหลของสารทำความเย็นในท่อป้อนกลับ การไหลของไอน้ำภายในโรงงาน และการไหลของก๊าซธรรมชาติในท่อส่งก๊าซ ทั้งหมดล้วนแล้วแต่เป็นการไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลวทั้งสิ้น การออกแบบระบบให้มีความคุ้มค่าทางเศรษฐกิจ การหาสภาวะการทำงานที่เหมาะสมสูงสุด ตลอดจนการออกแบบให้ระบบต่างๆ ข้างต้นมีการทำงานที่เสถียร (stable) มีความปลอดภัย มีการทำงานด้วยประสิทธิภาพที่สูง และไม่มีความดันลดมากเกินไปล้วนแต่ต้องอาศัยข้อมูลและความเข้าใจในระบบที่มีการไหลแบบสองวัฏภาคด้วย

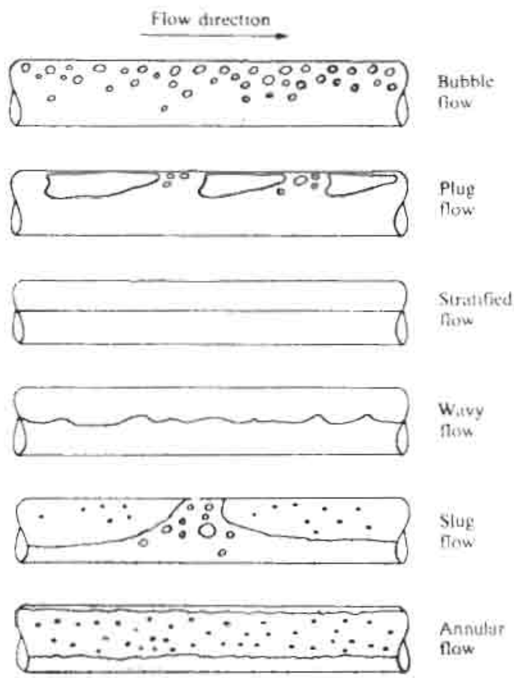
การออกแบบระบบที่มีการไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลว จะต้องประกอบด้วยการเข้าใจถึงรูปแบบการไหล (flow patterns) การหารูปแบบจำลอง (models) เพื่อใช้ทำนายพฤติกรรมของการไหลแบบสองวัฏภาค การหาวิธีการในการคำนวณหาค่าความดันลดของการไหลแบบสองวัฏภาค และการประมาณค่าสัดส่วนช่องว่าง ซึ่งความรู้ต่างๆ ข้างต้นจะช่วยทำให้นักวิศวกรสามารถออกแบบและควบคุมการทำงานของอุปกรณ์เครื่องมือได้อย่างเหมาะสมสูงสุด

# รูปแบบการไหลของการไหลแบบสองวัฏภาค ระหว่างก๊าซ-ของเหลวในท่อแนวนอน

จากการศึกษาในห้องปฏิบัติการของการไหลผ่านท่อที่ทำขึ้นจากวัสดุที่สามารถมองเห็นข้างในได้พบว่า การไหลแบบสองวัฏภาคจะมีรูปแบบการไหลที่แตกต่างกันทั้งนี้ขึ้นอยู่กับอัตราการไหลของแต่ละวัฏภาค ในสภาพความเป็นจริงแล้วรูปแบบการไหลควรเป็นสิ่งแรกสุดที่ควรได้รับการศึกษาก่อน

การจัดรูปแบบการไหลของของไหลสองวัฏภาคมักจัดแบ่งโดยพิจารณาถึงการ กระจายตัวของพื้นผิวสัมผัส (interfacial distribution) ของวัฏภาคก๊าซและของเหลว โดยปกติอิทธิพลของความตึงผิว (surface tension) ของของไหลมีแนวโน้มที่จะก่อให้เกิดพื้นผิวสัมผัสระหว่างก๊าซ-ของเหลวเป็นส่วนโค้งและนำไปสู่รูปร่างที่เป็นทรงกลม (หยดของเหลวหรือฟองก๊าซ)

รูปแบบการไหลในท่อแนวนอนจะมีรูปร่างที่ซับซ้อน ทั้งนี้เนื่องจากแรงโน้มถ่วงจะกระทำในทิศทางตั้งฉากกับแนวแกนของท่อ ซึ่งเป็นสาเหตุทำให้เกิดการแยกตัวของวัฏภาคขึ้น นั่นคือวัฏภาคของเหลวมักไหลทางตอนล่างของท่อ รูปแบบการไหลในท่อแนวนอนแสดงอยู่ในรูปที่ 1 ซึ่งเป็นรูปแบบการไหลที่เกิดจากการเพิ่มอัตราการไหลของก๊าซโดยที่อัตราการไหลของของเหลวคงที่




**รูปที่ 1 รูปแบบการไหลของการไหลสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลวในท่อแนวนอน [2]**

### *การไหลแบบชั้นวงแหวน (annular flow)*

ในรูปแบบการไหลแบบชั้นวงแหวนนี้ชั้นของเหลวจะก่อตัวขึ้นรอบๆ ผิวท่อด้านใน ในขณะที่ก๊าซจะไหลที่ความเร็วสูงผ่านตรงแกนกลางของท่อ รูปแบบการไหลแบบนี้จะเกิดขึ้นเมื่อความเร็วของก๊าซมีค่าสูงกว่า 20 ft/s

### *การไหลแบบกระจายตัว (dispersed, spray or mist flow)*

ในรูปแบบการไหลนี้ของเหลวทั้งหมดจะถูกพัดพาในสภาพหยดของเหลวเล็กๆ โดยก๊าซ การไหลแบบกระจายตัวเกิดขึ้นที่ความเร็วของก๊าซสูงกว่า 200 ft/s

(หมายเหตุ : ค่าความเร็วที่กล่าวข้างต้นทั้งหมดเป็นความเร็วแบบ Superficial ซึ่งก็คือค่าความเร็วที่จะได้รับเมื่อมีของไหลนั้นเพียงวัฏภาคเดียวในท่อ ดังนั้นค่าความเร็วแบบนี้จึงมีค่าเท่ากับอัตราการไหลเชิงปริมาตรของวัฏภาคนั้นๆ หารด้วยพื้นที่หน้าตัดของท่อ)

## แผนภูมิการไหล (flow-pattern maps)

ในการแก้ปัญหาการไหลแบบหลายวัฏภาค (multiphase flow) นั้น เราจะต้องทราบประเภทหรือรูปแบบการไหลก่อน เพื่อที่จะได้อธิบายกลไกของการถ่ายเทโมเมนตัมได้อย่างถูกต้อง สำหรับการไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลวภายในท่อแนวนอน แผนภูมิของ *Baker* มีประโยชน์อย่างมากในการประมาณถึงรูปแบบการไหลที่เกิดขึ้นอย่างคร่าวๆ การกำหนดสภาพการไหลจะเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์กลุ่มตัวแปร 2 เทอม คือตัวแปร $Gx/\lambda$ กับกลุ่มตัวแปร $(1-x)\lambda\psi/x$ โดยที่ $\lambda$ และ $\phi$ นิยามไว้ดังนี้

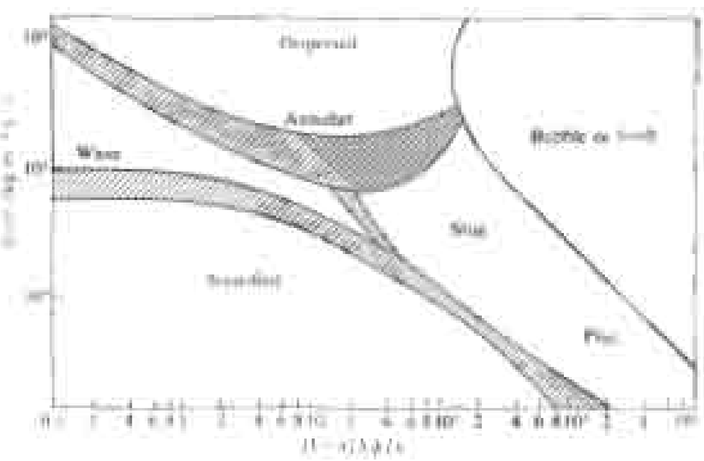
$$\lambda = \left\{\left(\frac{\rho_g}{\rho_A}\right)\left(\frac{\rho_l}{\rho_w}\right)\right\}^{0.5} \tag{1}$$

$$\psi = \left(\frac{\sigma_w}{\sigma}\right)\left\{\frac{\mu_l}{\mu_w}\left(\frac{\rho_w}{\rho_l}\right)^2\right\}^{1/3} \tag{2}$$

แผนภูมิของ *Baker* ได้ถูกปรับปรุงโดย *Scott* และแสดงไว้ในรูปที่ 2

รูปแบบการไหลทั้ง 7 รูปแบบข้างต้นอาจจัดแบ่งออกเป็น 3 กลุ่มใหญ่ๆ คือ

- การไหลแบบแยกจากกัน (segregated flow) นั่นคือ การไหลของก๊าซและของเหลวโดยที่เห็นเป็นชั้นแยก อันได้แก่ การไหลแบบแบ่งชั้น การไหลแบบคลื่นและการไหลแบบชั้นวงแหวน
- การไหลแบบเป็นช่วง (intermittent flow) ก๊าซและของเหลวจะไหลผ่านพื้นที่ภาคตัดขวางของท่อไม่ต่อเนื่องการไหลเป็นตัวๆ หรือเป็นจังหวะ ได้แก่ การไหลแบบลูกสูบ และการไหลแบบสลัก
- การไหลแบบกระจายตัว (dispersed flow) ก๊าซและของเหลวจะมีการกระจายตัวไม่มากก็น้อยของพื้นที่หน้าตัดของท่อ ได้แก่ การไหลแบบฟองก๊าซ การไหลแบบกระจายตัว หรือ mist flow




รูปที่ 3 แผนภูมิรูปแบบการไหลของ Baker ที่ถูกปรับปรุงโดย Scott [4]

# ทฤษฎีเกี่ยวกับการไหลแบบสองวัฏภาค ระหว่างก๊าซ-ของเหลว

สมการความสัมพันธ์ของสหสัมพันธ์หรือวิธีการที่ใช้ในการทำนายค่าความดันลดในการไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลว ได้รับการพัฒนามามากมาย และสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ ดังนี้

1) การใช้สูตรเอมไพริกัลที่หลีกเลี่ยงการอ้างอิงถึงรูปแบบการไหลในหลายๆ กรณี ได้มีการพยายามทำให้การคำนวณง่ายขึ้นโดยการละเลยต่ออิทธิพลของรูปแบบการไหลแบบสองวัฏภาค ความสัมพันธ์เหล่านี้เรียกว่า overall correlations ซึ่งความสัมพันธ์เหล่านี้จะสามารถทำนายค่าเกรเดียนท์ความดันเนื่องมาจากความเสียดทานได้ความถูกต้องแม่นยำประมาณ ±10% ในแนวทางการศึกษานี้จะยึดอยู่บนพื้นฐานรูปแบบจำลองการไหลแบบทิศทางเดียวของสมการสมดุลโมเมนตัมรวมของของผสม (mixture momentum balance) ข้อเสียเปรียบของสมการเอมไพริกัลแบบนี้คือ สามารถนำไปประยุกต์และทำนายได้ในช่วงรูปแบบการไหลเพียงหนึ่งหรือสองรูปแบบ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องหาเทคนิคที่ยึดอยู่บนพื้นฐานของรูปแบบจำลองที่สามารถเชื่อมความสัมพันธ์ของเกรเดียนท์ความดัน (pressure gradient) กับรูปแบบการไหล

2) การใช้รูปแบบจำลองที่มีตัวแปรเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างวัฏภาคก๊าซและวัฏภาคของเหลว วิธีการแก้ปัญหาการไหลแบบสองวัฏภาคที่ดีกว่าคือการใช้สมดุลโมเมนตัมแยกของแต่ละวัฏภาค ซึ่งวิธีนี้สมการจะมีความยุ่งยากซับซ้อนมากกว่าการคำนวณในวิธีแรก ดังนั้นจึงได้นำวิธีการทางตัวเลขหรือวิธีการเชิงตัวเลขมาใช้แก้สมการ แต่อย่างไรก็ตามผลที่ได้จากวิธีการนี้จะให้การทำนายเกรเดียนท์ความดันที่ถูกต้องแม่นยำกว่า ตัวอย่างหนึ่งของวิธีการนี้คือ รูปแบบจำลองของไหลสองชนิด

# รูปแบบจำลองการไหลของของไหลแบบสองวัฏภาค ในหนึ่งทิศทาง

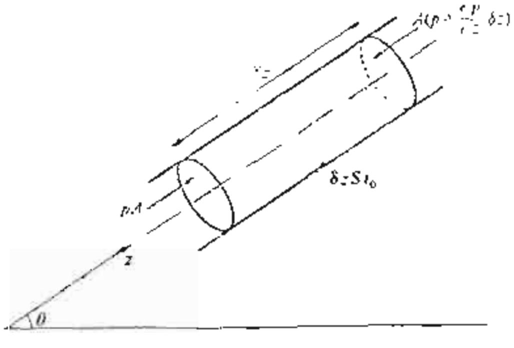
กระบวนการไหลของของไหลแบบสองวัฏภาคเป็นปรากฏการณ์ที่มีความซับซ้อนมาก เพราะสภาพการไหลมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาตามระยะทางของท่อที่มีการติดตั้งและเวลา ดังนั้นกระบวนการไหลจึงเป็นกระบวนการแบบสุ่มที่มีการเปลี่ยนแปลงกับเวลา แต่เนื่องจากการแก้ปัญหาดังกล่าวค่อนข้างยุ่งยาก จึงมีผู้ศึกษาหลายท่านพยายามหาวิธีการที่ง่ายกว่าเพื่อสามารถวิเคราะห์ค่าความดันลดของการไหลแบบสองวัฏภาคโดยมีการพิจารณาหลักของสมการการไหลไว้ รูปแบบจำลองหนึ่งที่มีผู้นิยมใช้กันมากคือ รูปแบบจำลองการไหลในหนึ่งทิศทาง

ในรูปแบบจำลองการไหลในหนึ่งทิศทางนี้ได้มีการตั้งสมมุติฐานว่า สมบัติการไหลในแต่ละวัฏภาคจะมีการเปลี่ยนแปลงกับระยะทางตามความยาวของท่อ (ทิศทางการไหล) เท่านั้น

จากการทำสมดุลโมเมนตัมรวมของของผสมในหนึ่งทิศทางที่สภาวะคงตัว (ดังแสดงในรูปที่ 3) เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} Momentum \\ Outflow \\ Rate \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Momentum \\ inf\,low \\ Rate \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sum\,of\ forces \\ acting\,on \\ Control\,Volume \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\int_A \frac{\partial}{\partial z}(G_l v_l + G_g v_g)\delta z\, dA + \int_s \tau_o \delta z\, ds$$
$$= \int_A \left\{ P - (P + \frac{\partial P}{\partial z}\delta z) \right\} dA - \int_A \rho g \sin\theta\, \delta z\, dA \quad (4)$$




**รูปที่ 3 สมดุลโมเมนตัมของของไหลผ่านท่อ [4]**

จากสมมุติฐานการไหลในหนึ่งทิศทาง นั่นคือตัวแปรแต่ละตัวมีค่าเปลี่ยนแปลงเฉพาะในทิศ z เท่านั้น ทำให้สามารถเขียนสมการ (4) ได้ใหม่ดังนี้

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{S}{A}\tau_o + \frac{d}{dz}\left\{\varepsilon G_g v_g + (1-\varepsilon)G_l v_l\right\} + g\sin\theta\left\{\varepsilon\rho_g + (1-\varepsilon)\rho_l\right\} \quad (5)$$

จากนิยามที่ว่า $G_l = G(1-x)/(1-\varepsilon)$, $G_g = xG/\varepsilon$, $v_g = G_g/\rho_g$ และ $v_l = G_l/\rho_l$ สามารถจัดรูปสมการ (5) ให้ง่ายลงได้ดังนี้

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{S}{A}\tau_o + G^2\frac{d}{dz}\left\{\frac{x^2}{\varepsilon\rho_g} + \frac{(1-x)^2}{(1-\varepsilon)\rho_l}\right\} + g\sin\theta\left\{\varepsilon\rho_g + (1-\varepsilon)\rho_l\right\} \quad (6)$$

สมการที่ (6) อาจเขียนอยู่ในเทอมใหม่ได้ดังนี้

$$-\frac{dP}{dz} = -\frac{dP_F}{dz} - \frac{dP_a}{dz} - \frac{dP_g}{dz} \quad (7)$$

เทอม $\frac{dP_F}{dz}$ แทนเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทาน ในขณะที่ $\frac{dP_a}{dz}$ และ $\frac{dP_g}{dz}$ เป็นเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากการเร่งและสนามโน้มถ่วงตามลำดับ ในกรณีที่ต้องการคำนวณหาค่าความดันลด เราต้องทำการอินทิเกรตค่าเกรเดียนท์ความดันในแต่ละเทอมซึ่งให้ผลดังนี้

$$-\Delta P_{gravity} = \Delta P_g = -\int_{z_1}^{z_2}\left\{\left[\varepsilon\rho_g + (1-\varepsilon)\rho_l\right]g\sin\theta\right\}dz \quad (8)$$

$$-\Delta P_{acceleration} = -\Delta P_a = \left[G^2\left\{\frac{x^2}{\varepsilon\rho_g} + \frac{(1-x)^2}{(1-\varepsilon)\rho_l}\right\}\right]_{z_1}^{z_2} \quad (9)$$

$$-\Delta P_{friction} = -\Delta P_f = \int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{S}{A}\tau_o\right]dz \quad (10)$$

โดยปกติเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทานของการไหลแบบสองวัฏภาคมักเขียนอยู่ในรูปของผลคูณระหว่างเกรเดียนท์ความดันของการไหลแบบวัฏภาคเดียวกับตัวคูณความเสียดทาน ซึ่งนิยามไว้หลายรูปแบบดังนี้

$$\frac{dP_F}{dz} = \phi^2_{l\ or\ g}\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_{l\ or\ g} \quad (11)$$

หรือ

$$\frac{dP_F}{dz} = \phi^2_{lo}\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_{lo} \quad (12)$$

เมื่อ $\left(\frac{dP_F}{dz}\right)$ เป็นเกรเดียนท์ความดันหรือค่าความดันลดอันเนื่องมาจากความเสียดทานของการไหลแบบสองวัฏภาค ในขณะที่ $\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_l$ และ $\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_g$ เป็นเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทานของวัฏภาคของเหลวหรือก๊าซเพียงลำพังตามลำดับ เทอมเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทานของการไหลเพียงวัฏภาคเดียวสามารถนิยามในรูปของแฟกเตอร์ความเสียดทาน ดังนี้

$$\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_g = \frac{2f_g G^2 x^2}{D\rho_g} \tag{13}$$

$$\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_l = \frac{2f_l G^2 (1-x)^2}{D\rho_l} \tag{14}$$

และ $\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_{lo}$ คือเกรเดียนท์ความดันในกรณีที่อัตราการไหลทั้งหมดของของไหลมีคุณสมบัติทางกายภาพเป็นของเหลวเพียงอย่างเดียว และคำนวณได้ดังนี้

$$\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_{lo} = \frac{2f_{lo} G^2}{D\rho_l} \tag{15}$$

เทอมแฟกเตอร์ความเสียดทาน $f_g, f_l$ และ $f_{lo}$ คำนวณโดยการใช้รูปกราฟแฟกเตอร์ความเสียดทานของการไหลเพียงวัฏภาคเดียว หรืออาจคำนวณโดยการใช้สมการความสัมพันธ์ของแฟกเตอร์ความเสียดทาน ซึ่งทั้งสองวิธีข้างต้นล้วนแต่มีความสัมพันธ์กับตัวเลขเรย์โนลด์ ซึ่งนิยามดังนี้

$$Re_g = \frac{G\,x\,D}{\mu_g} \tag{16}$$

$$Re_1 = \frac{G(1-x)D}{\mu_l} \tag{17}$$

$$Re_{lo} = \frac{GD}{\mu_l} \tag{18}$$

โดยอาศัยนิยามต่างๆ ข้างต้นสามารถเขียนเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทานใหม่ดังนี้

$$-\Delta P_{friction} = -\Delta P_f = \int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{2G^2}{D}\frac{f_{SP}}{\rho_{SP}}\phi^2\right]dz \qquad (19)$$

เมื่อ $f_{SP}$ และ $\rho_{SP}$ เป็นแฟกเตอร์ความเสียดทาน และค่าความหนาแน่นของของไหลแบบวัฏภาคเดียว โดยทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าเราเลือกนิยามสมการที่ (13), (14) หรือ (15) มาใช้คำนวณ

จากวิธีการข้างต้นจะเห็นได้ว่าเทอมค่าความดันลดของการไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลวจะถูกเขียนอยู่ในเทอม $\phi^2$ และค่าสัดส่วนช่องว่าง $\varepsilon$ (ซึ่งเป็นตัวแปรที่ต้องหาในการคำนวณองค์ประกอบของเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากสนามโน้มถ่วงและความเร่ง) ค่าตัวแปรทั้งสองนี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบจำลองที่นำมาใช้เป็นพื้นฐานในการคำนวณ

# ความสัมพันธ์เอมไพริกัลสำหรับการคำนวณหาเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทาน

ก่อนที่จะกล่าวถึงความสัมพันธ์เอมไพริกัลซึ่งเป็นสมการที่ได้มาจากข้อมูลการทดลอง ต้องกล่าวถึงแบบจำลองที่ง่ายที่สุดของการไหลแบบสองวัฏภาคที่ได้มาจากทฤษฎีและการตั้งสมมุติฐานก่อน แบบจำลองเหล่านี้ได้แก่ แบบจำลองการไหลแบบเนื้อเดียวกันตลอด (homogeneous flow) และแบบจำลองทรงกระบอกแยก (separate cylinders model)

## *รูปแบบจำลองการไหลแบบที่เป็นเนื้อเดียวกันตลอด*

รูปแบบนี้เกิดจากการตั้งสมมุติฐานที่ว่าความเร็วของวัฏภาคของเหลวและวัฏภาคก๊าซมีค่าเท่ากัน สมมุติฐานดังกล่าวจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อแรงลาก (drag) ระหว่างวัฏภาคมีค่าสูงเพียงพอ อาทิ เช่น เมื่ออนุภาคที่แขวนลอยในรูปของฟองก๊าซหรือหยดของเหลวที่มีขนาดเล็กมากและเคลื่อนที่ได้อย่างรวดเร็วพอๆ กับของไหลที่เป็นตัวกลางต่อเนื่อง ดังนั้นค่าเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทานมีค่าดังนี้

$$\frac{dP_F}{dz} = 2\frac{f_H}{D}\rho_H\bar{v}^2 = \frac{\tau_o S}{A} \qquad (20)$$

เมื่อ $f_H$ เป็นแฟกเตอร์ความเสียดทานของทั้งสองวัฏภาค ซึ่งนิยามให้เป็นฟังก์ชันของตัวเลขเรย์โนลด์ของของไหลที่มีการไหลเป็นแบบเนื้อเดียวกัน (homogeneous Reynolds number, $Re_H$) ดังนี้

$$Re_H = \frac{GD}{\mu_H} \tag{21}$$

$$\mu_H = \frac{x}{\mu_g} + \frac{(1-x)}{\mu_l} \tag{22}$$

และ $\rho_H$ เป็นค่าความหนาแน่นของของผสมที่มีการไหลเป็นแบบเนื้อเดียวกันตลอด ซึ่งมีค่าตามสมการ

$$\rho_H = \frac{x}{\rho_g} + \frac{(1-x)}{\rho_l} \tag{23}$$

โดยการใช้นิยามของเทอมเหล่านี้ สามารถคำนวณเทอมตัวคูณความเสียดทาน ($\phi^2$) โดยการใช้สมการของ *Blasius* ซึ่งนิยามไว้ว่า $f = C_1 / Re_H^n$ และพบว่า

$$\phi_{lo}^2 = \left\{1 + x\left(\frac{\mu_l}{\mu_g} - 1\right)\right\}^{-n}\left\{1 + x\left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1\right)\right\} \tag{24}$$

ค่า $n$ ในสมการจะมีค่าเท่ากับ 1 ถ้าการไหลในทั้งสองวัฏภาคเป็นแบบราบเรียบ และ $n = 0.25$ ถ้าการไหลในทั้งสองวัฏภาคเป็นการไหลแบบปั่นป่วนในท่อผิวเรียบ ส่วนค่า $\phi_l$ คำนวณจาก $\phi_{lo}^2$ ได้ดังนี้ (เนื่องจาก $\phi_{lo}^2 = \phi_l^2(1-x)^{2-n}$

$$\phi_l^2 = \frac{1}{\chi^2} + \frac{(\chi\Gamma)^{2-2-n}}{\chi^2} \tag{25}$$

เมื่อ $\chi$ และ $\Gamma$ นิยามจากความสัมพันธ์ข้างล่างนี้

$$\chi^2 = \left(\frac{dP_F}{dz}\right)_l / \left(\frac{dP_F}{dz}\right)_g$$

$$\text{การไหลแบบปั่นป่วน} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{1.8}\frac{\rho_g}{\rho_l}\left(\frac{\mu_l}{\mu_g}\right)^{0.2} \tag{26}$$

$$\Gamma^2 = \left(\frac{dP_F}{dz}\right)_{go} / \left(\frac{dP_F}{dz}\right)_{lo}$$

$$\text{การไหลแบบปั่นป่วน} = \frac{\rho_l}{\rho_g}\left(\frac{\mu_g}{\mu_l}\right)^{0.2} \tag{27}$$

## *รูปแบบจำลองทรงกระบอกแยก*

แบบจำลองการไหลแบบที่เป็นเนื้อเดียวกันตลอดจัดเป็นแบบจำลองทางทฤษฎีที่คิดว่าแรงกระทำระหว่างวัฏภาคเกิดขึ้นอย่างสมบูรณ์ ในขณะที่แบบจำลองทรงกระบอกแยกเป็นแบบจำลองซึ่งพิจารณาว่าไม่มีแรงกระทำระหว่างวัฏภาคเลย สภาพวิเคราะห์ดังกล่าวถูกคิดขึ้นโดย *Turner* และ *Wallis* ข้อสมมุติฐานที่ว่า "ไม่มีแรงกระทำระหว่างวัฏภาค" ทำให้สามารถคิดต่อได้ว่าเกรเดียนท์ความดันในแต่ละวัฏภาค (ซึ่งก็คือเกรเดียนท์ความดันของการไหลแบบสองวัฏภาค) ในขณะที่กำลังไหลด้วยกัน ย่อมมีค่าเท่ากับเกรเดียนท์ความดันเมื่อแต่ละวัฏภาคกำลังไหลตามลำพังในช่องทางไหลที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัดเท่ากับพื้นที่การไหลของตัวเองในขณะที่ไหลไปด้วยกัน จากหลักความคิดข้างต้นทำให้ได้สมการดังต่อไปนี้

$$-\frac{dP_F}{dz} = C_1 \frac{m_g^2}{\rho_g}\left(\frac{\mu_g}{2m_g}\right)^n \pi^{(n+1)/2} A_g^{(n-5)/2} \qquad (28)$$

= ค่าความดันลดในการไหลสองวัฏภาค

ในกรณีที่ต้องการหาเทอม $\phi'$ เรามีความจำเป็นที่จะต้องหาเทอม $\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_g$ ซึ่งเป็นเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทานของวัฏภาคของเหลวหรือก๊าซถ้าของไหลดังกล่าวกำลังไหลอยู่เพียงลำพังในท่อเดียวกัน ดังนั้น

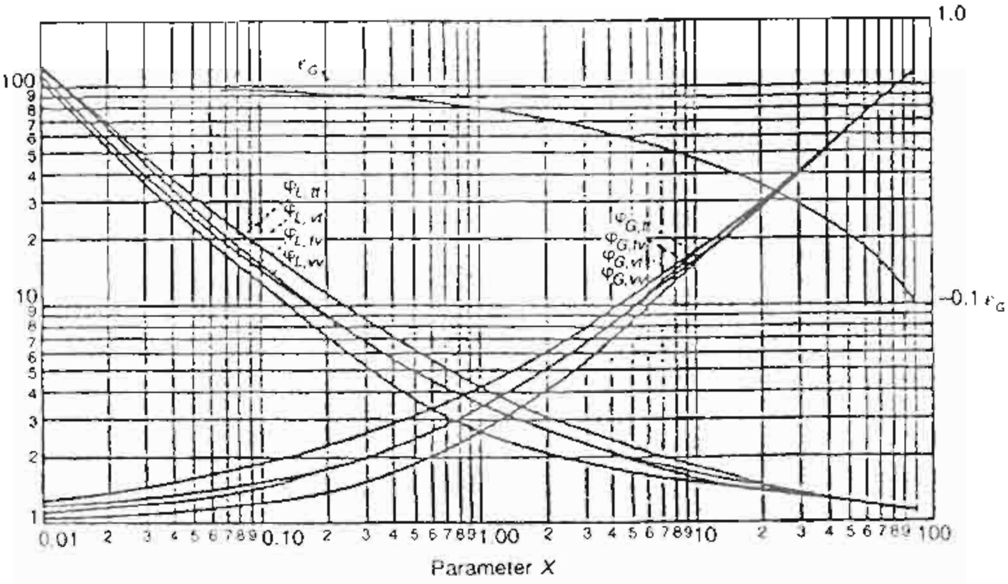
$$-\left(\frac{dP_F}{dz}\right)_g = C_1 \frac{m_g^2}{\rho_g}\left(\frac{\mu_g}{2m_g}\right)^n \pi^{(n+1)/2} A^{(n-5)/2} \qquad (29)$$

แทนสมการ (28) และ (29) ลงในสมการ (11) และใช้นิยามของ $\varepsilon = A_g / A$ ย่อมเขียนนิยามของ $\phi_g^2$ สำหรับวัฏภาคก๊าซได้ดังนี้

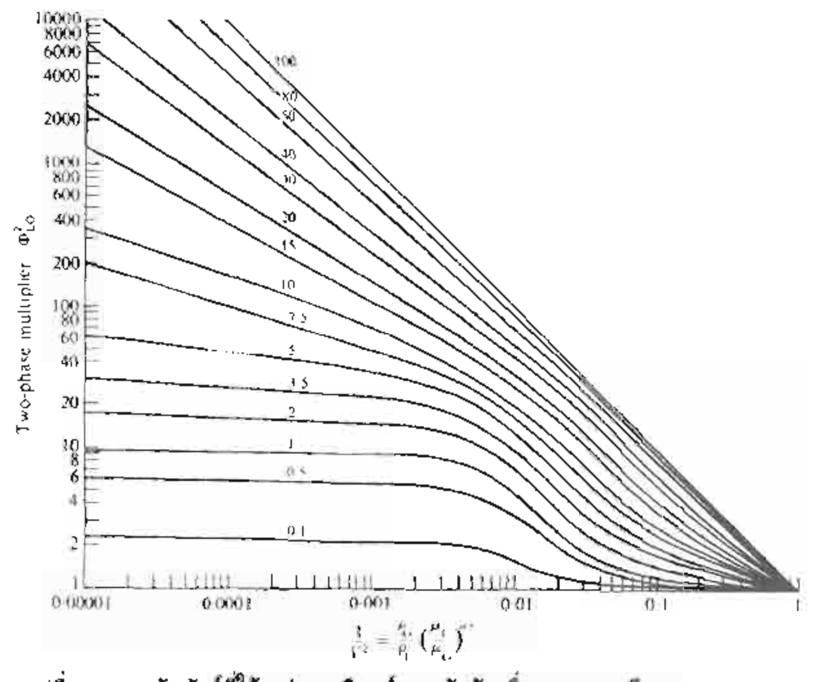
$$\phi_g^2 = \frac{1}{\varepsilon^{(5-n)/2}} = \left\{1 + \chi^{4/(5-n)}\right\}^{(5-n)/2} \qquad (30)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับวัฏภาคของเหลว

$$\phi_l^2 = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{(5-n)/2}} = \left\{1 + (1/\chi)^{4/(5-n)}\right\}^{(5-n)/2} \qquad (31)$$

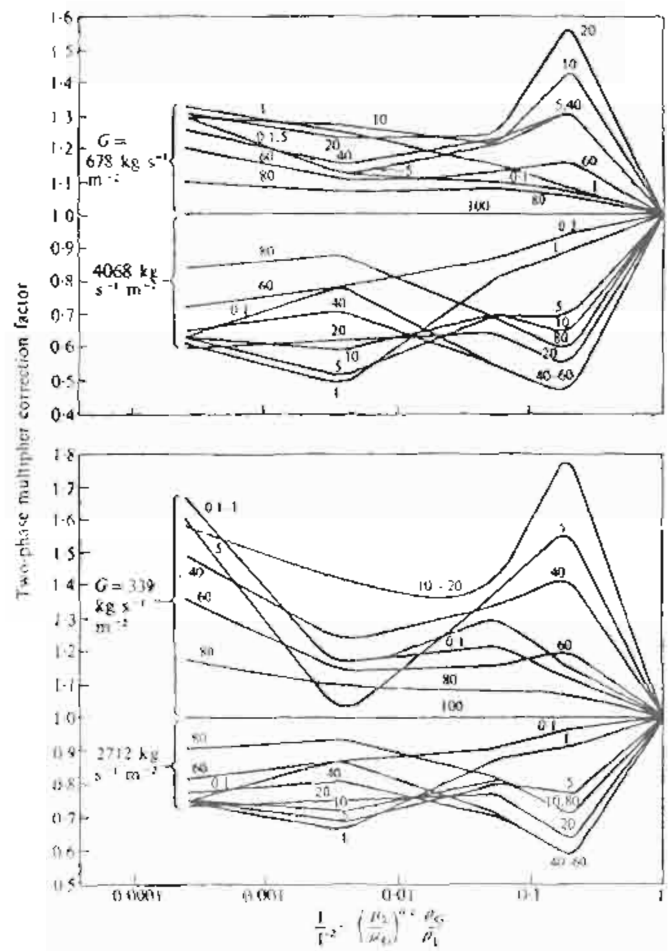



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ของ *Lockhart-Martine* [4]




รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ที่ใช้หาค่าเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องจากความเสียดทานของ Baroczy ที่ค่าความเร็วมวล 1356 kg/s $m^2$ ตัวเลขที่แสดงบนเส้นกราฟคือค่า x [4]

ในการคำนวณหาเทอม $\phi^2$ จากแบบจำลองในสองวิธีแรกที่ได้กล่าวมาเป็นการใช้ทฤษฎีแบบง่ายๆ โดยไม่ได้พิจารณาถึงข้อมูลการทดลองเลย แต่อย่างไรก็ตามพบว่าผลการทำนายจากสองทฤษฎีแบบง่ายๆ มักจะให้ค่าการคำนวณที่ผิดพลาด จึงได้มีผู้พัฒนาความสัมพันธ์ทั่วๆ ไป (overall correlation) ซึ่งเป็นลักษณะสมการเอมไพริกัลโดยการเปรียบเทียบข้อมูลการทดลอง ความสัมพันธ์เอมไพริกัลมีอยู่มากมายซึ่งเริ่มต้นโดย *Lockhart-Martinelli* ที่ได้นำเอาผลการทดลองมาทำการเขียนกราฟ $\phi_l$ หรือ $\phi_g$ กับเทอม $\chi$ ตามนิยามในสมการที่ (26) ดังแสดงอยู่ในรูปที่ 4




**รูปที่ 6** แฟกเตอร์แก้ไขความถูกต้องของความสัมพันธ์ของ Baroczy ที่ค่าความเร็วมวลอื่นๆ (ตัวเลขบนเส้นกราฟแสดงถึงคุณภาพ x) [4]

เส้นกราฟของ *Lockhart-Martinelli* สามารถแสดงเป็นสมการในรูปฟังก์ชันของ $\chi$ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 1 ความสัมพันธ์ของ *Lockhart-Martinelli* ประสบกับความล้มเหลวในการพิจารณาถึงอิทธิพลของฟลักซ์เชิงมวล ทั้งนี้ได้มีผู้ค้นพบว่าอัตราการไหลจะมีอิทธิพลต่อเกรเดียนท์ความดัน *Baroczy* เป็นผู้พิจารณาถึงอิทธิพลของฟลักซ์เชิงมวลเป็นคนแรก และได้เสนอข้อมูลในรูปกราฟที่แสดงความสัมพันธ์อยู่ในเทอมของ $\phi_{lo}^2$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันกับ $1/\Gamma^2$ โดยใช้ข้อมูลที่ฟลักซ์เชิงมวลเท่ากับ 1356 kg/s-m$^2$ (ดังแสดงในรูปที่ 5) และเพื่อแก้ไขอิทธิพลของอัตราการไหล *Baroczy* ได้เสนอแฟกเตอร์แก้ไขความถูกต้องสำหรับที่ค่าความเร็วมวล (ฟลักซ์เชิงมวล) อื่นๆ ดังแสดงในรูปที่ 6

การใช้แฟกเตอร์แก้ไขความถูกต้องของ *Baroczy* เป็นการบ่งบอกว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นความสัมพันธ์ของรูปแบบจำลองการไหลผสม หรือพูดเป็นนัยๆ ก็คือว่า ความมากหรือน้อยของแรงกระทำระหว่างวัฏภาคจะขึ้นอยู่กับอัตราการไหล และดังนั้น *Baroczy* จึงได้นำอัตราการไหลมาเป็นตัวแปรเพิ่มเติม *Chisholm* ได้เสนอความสัมพันธ์ที่สามารถอธิบายเส้นกราฟของ *Baroczy* ได้ดี ดังที่ได้รวบรวมไว้ในตารางที่ 1

ในปัจจุบันการไหลแบบสองวัฏภาคได้รับความสนใจมากขึ้น อันจะเห็นได้จากการที่มีผลการทดลองมากขึ้น *Friedel* ได้เปรียบเทียบข้อมูลเป็นจำนวนมากถึง 250,000 ข้อมูล และเสนอความสัมพันธ์ขึ้นมาใหม่ซึ่งได้แสดงไว้ในตารางที่ 1 ด้วย สมการของ *Friedel* สามารถใช้ได้กับการไหลขึ้นในท่อแนวดิ่งและการไหลในท่อแนวนอน สำหรับการไหลลงในท่อแนวดิ่งรูปสมการจะมีความแตกต่างไปเล็กน้อย

## ความสัมพันธ์ของค่าสัดส่วนช่องว่าง

ค่าสัดส่วนช่องว่าง ($\varepsilon$) เป็นเทอมที่จำเป็นต้องหาเพื่อใช้ในการคำนวณค่าเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเร่งและความโน้มถ่วง การคำนวณหาสัดส่วนช่องว่างสามารถกระทำได้เช่นเดียวกับการหาความสัมพันธ์ที่ใช้คำนวณหาเทอม $\phi$ โดยเริ่มจากรูปแบบจำลองการไหลแบบเนื้อเดียวกันตลอด จากนั้นใช้รูปแบบจำลองการไหลแยกและท้ายสุดเป็นรูปแบบจำลองการไหลผสม

สมการที่สามารถนำมาใช้คำนวณหาสัดส่วนช่องว่างคือ

$$\varepsilon = \frac{1}{\left\{1 + K\left(\frac{1-x}{x}\right)\frac{\rho_g}{\rho_l}\right\}} \qquad (32)$$

**ตารางที่ 1 สมการเอมไพริกัลที่ใช้คำนวณหาเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทานของการไหลแบบสองวัฏภาคในท่อ** $\chi^2 = (\Delta P / L)_l / (\Delta P / L)_g$

1) ความสัมพันธ์ของ Lockhart-Martinelli

$$\phi_l^2 = 1 + C / \chi + 1 / \chi^2 \quad \text{(A)}$$

$$\phi_g^2 = 1 + C / \chi + 1 / \chi^2 \quad \text{(B)}$$

$$\chi^2 = (\Delta P / L)_l / (\Delta P / L)_g \quad \text{(C)}$$

เมื่อค่า C มีค่าขึ้นอยู่กับสภาพการไหลของของไหลทั้งสองวัฏภาคดังนี้

| ของเหลว | ก๊าซ | สัญลักษณ์ | C |
|---|---|---|---|
| แบบเทอร์บิวเลนท์ | แบบเทอร์บิวเลนท์ | tt | 20 |
| แบบลามินาร์ | แบบเทอร์บิวเลนท์ | vt | 12 |
| แบบเทอร์บิวเลนท์ | แบบลามินาร์ | tv | 10 |
| แบบลามินาร์ | แบบลามินาร์ | vv | 5 |

2) ความสัมพันธ์ของ Chisholm-Baroczy

$$\phi_{lo}^2 = 1 + \left(\Gamma^2 - 1\right)\left[Bx^{(2-n)/2}(1-x)^{(2-n)/2} + x^{2-n}\right] \quad \text{(D)}$$

เมื่อ $n = 0.25$

$$\Gamma^2 = (\Delta P / L)_{go} / (\Delta P / L)_{lo} \quad \text{(E)}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B = 55 / G^{0.5}$ | เมื่อ | $0 < \Gamma < 9.5$ | (F) |
| $= 520 / \Gamma G^{0.5}$ | เมื่อ | $9.5 < \Gamma < 28$ | (G) |
| $= 15000 / \Gamma^2 G^{0.5}$ | เมื่อ | $\Gamma > 28$ | (H) |

3) ความสัมพันธ์ของ Friedel

$$\phi_{lo}^2 = E + \frac{3.24\, FH}{Fr^{0.045}\, We^{0.035}} \quad \text{(I)}$$

$$E = \left\{\left(1 - x^2\right) + x^2\left(\rho_l f_{go}\right) \left(\rho_g f_{lo}\right)\right\} \quad \text{(J)}$$

$$Fr = G^2 / g_c D \rho_{H}^2 \quad \text{(K)}$$

$$\rho_H = \left\{x / \rho_g + (1 - x) / \rho_l\right\}^{-1} \quad \text{(L)}$$

$$We = G^2 D / \rho_H \sigma \quad \text{(M)}$$

$$F = x^{0.78} / (1 - x)^{0.24} \quad \text{(N)}$$

$$H = \left[\left(\rho_l / \rho_g\right)^{0.91}\left(\mu_g / \mu_l\right)^{0.19}\left\{1 - \left(\mu_g / \mu_l\right)\right\}^{0.7}\right] \quad \text{(O)}$$

สำหรับรูปแบบการจำลองการไหลแบบเนื้อเดียวกันตลอด

$$\varepsilon_H = \frac{\dot{\forall}_g}{\dot{\forall}_{total}} = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{1-x}{x}\right)\frac{\rho_g}{\rho_l}\right\}} \tag{33}$$

สำหรับรูปแบบจำลองการไหลแบบแยก ค่าสัดส่วนช่องว่างอาจถูกเชื่อมความสัมพันธ์กับตัวแปรอื่น เช่นสำหรับรูปแบบการจำลองทรงกระบอกแยก

$$\varepsilon = \frac{1}{1+\chi^{4/(5-n)}} \tag{34}$$

สำหรับรูปแบบจำลองการไหลแบบผสม ได้แก่สมการของ *Premoli, Francesco* และ *Prina* โดยได้เลือกที่จะแสดงความสัมพันธ์ของการเพิ่มขึ้นของอัตราส่วนการลื่นไถล (slip-ratio increment, $\Delta K$) ดังนี้

$$\Delta K = K - 1 = a\sqrt{\left\{\frac{y}{1+b/y} - \frac{y}{b}\right\}} \tag{35}$$

เมื่อ

$$y = \frac{\varepsilon_H}{1-\varepsilon_H} = \frac{x}{1-x}\frac{\rho_l}{\rho_g} \tag{36}$$

$$a = 1.578\,Re_{lo}^{-0.19}\left(\rho_l/\rho_g\right)^{0.22} \tag{37}$$

$$b = 0.0273We\,Re_{lo}^{-0.51}\left(\rho_g/\rho_l\right)^{0.08} \tag{38}$$

$$Re_{lo} = GD/\mu_l \tag{39}$$

$$We = G^2 D/\sigma\rho_l \tag{40}$$

*Butterworth, D.A.* ได้ทำการสำรวจความสัมพันธ์ของค่าสัดส่วนช่องว่างที่ปรากฏอยู่ในวารสารทางวิชาการ และพยายามจัดรูปของสมการออกมาได้ดังนี้

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = A\left[\frac{1-x}{x}\right]^p\left[\frac{\rho_g}{\rho_l}\right]^q\left[\frac{\mu_l}{\mu_g}\right]^r \tag{41}$$

เมื่อ $A$ , $P$ , $q$ , และ $r$ คือ ค่าคงที่ที่มีค่าเปลี่ยนแปลงแล้วแต่ความสัมพันธ์ ดังแสดงในตารางที่ 2 สมการ (41) สามารถเขียนอยู่ในเทอมของอัตราส่วน $\dot{\forall}_g / \dot{\forall}_l$ ได้ดังนี้

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = K\left[\frac{\dot{\forall}_g}{\dot{\forall}_l}\right]^a \left[\frac{\rho_g}{\rho_l}\right]^b \left[\frac{\mu_g}{\mu_l}\right]^c \qquad (42)$$

เทอมค่าคงที่ $K, a, b, c$ ในสมการที่ (42) ได้แสดงอยู่ในตารางที่ 2 ด้วยแล้ว

**ตารางที่ 2** ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการความสัมพันธ์ที่ใช้หาค่าสัดส่วนช่องว่าง

| รูปแบบจำลอง | $A$ | $P$ | $q$ | $r$ | $K$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Homogeneous* | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| *Zivi* | 1 | 1 | 0.67 | 0 | 1 | 1 | 0.33 | 0 |
| *Turner-Wallis* | 1 | 0.72 | 0.40 | 0.08 | 1 | 0.72 | 0.32 | 0.08 |
| *Lockhart-Martinelli* | 0.28 | 0.64 | 0.36 | 0.07 | 3.57 | 0.64 | 0.28 | 0.07 |
| *Thom* | 1 | 1 | [illegible] | 0.18 | 1 | 1 | 0.11 | 0.18 |
| *Baroczy* | 1 | 0.74 | 0.65 | 0.13 | 1 | 0.74 | 0.09 | 0.13 |

# การใช้รูปแบบจำลองของไหล 2 ชนิด

ในการแก้ปัญหาข้างต้นที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นการคำนวณหาค่าความดันลดโดยการใช้สมดุลโมเมนตัมรวมของของผสม แต่อย่างไรก็ตามเป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่า การไหลของของไหลแบบสองวัฏภาคจะมีค่าความเร็วในแต่ละวัฏภาคไม่เท่ากัน วิธีการแก้ปัญหาให้ตรงจุดและถูกต้องคือการใช้สมดุลโมเมนตัมของแต่ละวัฏภาคมาแก้ปัญหา นอกจากนี้พบว่ารูปแบบจำลองการไหลในหนึ่งทิศทางไม่สามารถทำนายผลการทดลองได้ถูกต้องนักเพราะจริงๆ แล้วการไหลของของไหลแบบสองวัฏภาคเป็นการไหลในสามมิติ และอิทธิพลของการไหลสามมิตินี้เองที่ก่อให้เกิดการกระจายตัวของวัฏภาคในทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศทางการไหล รูปแบบการไหลแบบสองวัฏภาคที่อยู่ในช่วงการไหลแบบฟองก๊าซและแบบสลัก หรือแม้แต่การไหลแบบชั้นวงแหวนล้วนจัดเป็นการไหลในสามมิติซึ่งจะมีการแลกเปลี่ยนมวลสารและโมเมนตัมในแนวรัศมีด้วย และนี่จึงเป็นจุดที่ก่อให้เกิดแบบจำลองของไหล 2 ชนิดขึ้น

*Lahey, R.T.* ได้เขียนสมการสมดุลมวลสารและสมดุลโมเมนตัมในแต่ละวัฏภาคไว้ดังนี้

สมดุลมวลสารสำหรับวัฏภาคของเหลว

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_l\left(1-\varepsilon\right)A\right]+\nabla.\left[\rho_l v_l\left(1-\varepsilon\right)A\right] = -\dot{m}_e \qquad (43)$$

สมดุลมวลสารสำหรับวัฏภาคก๊าซ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_g \varepsilon A\right]+\nabla.\left[\rho_g v_g \varepsilon A\right] = \dot{m}_e \qquad (44)$$

เมื่อ

$\dot{m}_e$ = อัตราการเปลี่ยนวัฏภาคจากของเหลวไปเป็นก๊าซต่อหนึ่งหน่วยความยาว (ในกรณีที่เป็นการไหลแบบสองวัฏภาคโดยไม่มีการเปลี่ยนวัฏภาค เทอม $\dot{m}_e$ จะเท่ากับศูนย์)

ในกรณีที่ค่าพื้นที่หน้าตัด ($A$) มีค่าคงที่ สมการทั้งสองข้างต้นถูกเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_l\left(1-\varepsilon\right)\right]+\nabla.\left[\rho_l v_l\left(1-\varepsilon\right)\right] = -\frac{\dot{m}_e}{A} \qquad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_g\left(1-\varepsilon\right)\right]+\nabla.\left[\rho_g v_g \varepsilon\right] = \frac{\dot{m}_e}{A} \qquad (46)$$

สำหรับสมดุลโมเมนตัมในวัฏภาคของเหลว การเพิ่มขึ้นของค่าความหนืดประสิทธิผล (effective viscosity) อันเนื่องมาจากการไหลแบบปั่นป่วนสามารถคิดรวมได้โดยการใช้รูปแบบจำลองความปั่นป่วน $k-\in$ ($k-\in$ turbulence model) สำหรับในวัฏภาคก๊าซ ได้มีการสมมุติให้เทอมความเค้นอันเนื่องมาจากความปั่นป่วนมีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับแรงอื่นๆ

สมดุลโมเมนตัมของวัฏภาคของเหลวเขียนได้ดังนี้

$$\left(1-\varepsilon\right)\rho_l\frac{Dv_l}{Dt} = -\left(1-\varepsilon\right)\nabla P+\nabla.\left[\left(\mu_l+\mu_l^T\right)\nabla v_l\right]+\left(1-\varepsilon\right)\rho_l g+M_l \qquad (47)$$

เมื่อเทอมทางซ้ายมือหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัฏภาคของเหลว เทอมทางขวามือทั้งหมดหมายถึงแรงทั้งหมดที่กระทำบนวัฏภาคของเหลว โดยที่เทอมแรกคือเทอมของแรงจากความดัน เทอมที่สองจะเป็นแรงกระทำที่เกิดจากความเค้นเฉือน เทอมที่สามจะเป็นแรงจากสนามโน้มถ่วง ส่วนเทอมสุดท้าย ($M_l$) เป็นแรงที่กระทำระหว่างวัฏภาค (force of interaction between phases)

สมดุลโมเมนตัมของวัฏภาคก๊าซได้เขียนไว้ดังนี้

$$\varepsilon \rho_g \frac{Dv_g}{Dt} = -\varepsilon \nabla P - M_t \tag{48}$$

จะเห็นว่าเทอมแรงที่เกิดจากความเค้นเฉือนและแรงโน้มถ่วงมีค่าน้อยจนสามารถตัดทิ้งได้ เทอม $\mu_l^T$ สามารถหาได้จากสมการ $k - \epsilon_l$ ดังนี้

$$\mu_l^T = \frac{C_\mu \rho_l k_l^2}{\epsilon_l} \tag{49}$$

ค่า $k$ ในสมการข้างต้นมีชื่อเรียกว่า พลังงานจลน์ของความปั่นป่วน ซึ่งสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\rho_l \frac{Dk_l}{Dt} = {} & \nabla \left[ (1-\varepsilon) \frac{\mu_l^T}{\sigma_k} \nabla k_l \right] + (1-\varepsilon)\mu_l^T (\nabla v_l + v_l \nabla) . \nabla v_l \\ & - (1-\varepsilon)\rho_1 \varepsilon \end{aligned} \tag{50}$$

ส่วนเทอม $\epsilon_l$ มีชื่อเรียกว่า dissipation rate ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยการแก้สมการข้างล่างนี้

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\rho_l \frac{D\epsilon_l}{Dt} = {} & \nabla \left[ (1-\varepsilon) \frac{\mu_l^T}{\sigma_\varepsilon} \nabla \epsilon_l \right] \\ & + C_1 (1-\varepsilon)\mu_l^T \frac{\epsilon_l}{k_l} (\nabla v_l + v_l \nabla) . \nabla v_l - C_2 (1-\varepsilon)\rho_l \left( \frac{\epsilon_l^2}{k_l} \right) \end{aligned} \tag{51}$$

เมื่อเทอม $\sigma_K$ และ $\sigma_\epsilon$ เรียกว่า effective Prandtl number สำหรับการแพร่ของพลังงานจลน์ความปั่นป่วน และ dissipation rate ตามลำดับ ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการ (50) และ (51) ได้รับการเสนอโดย Rodi และมีค่าดังนี้

$$C_\mu = 0.99,\ C_1 = 1.44,\ C_1 = 1.92,\ \sigma_K = 1.0,\ \sigma_\epsilon = 1.3$$

เทอมการถ่ายเทโมเมนตัมของแรงกระทำระหว่างวัฏภาค ($M_t$) คือ แรงลากซึ่งสามารถคำนวณโดยการใช้ค่าสัมประสิทธิ์แรงลาก ($C_D$) และค่าความเร็วสัมพัทธ์ หรือ $(v_g - v_l)$ ดังนี้

$$M_t = \frac{1}{8} \rho_l c_D \left| v_g - v_l \right| (v_g - v_l) A_t \tag{52}$$

ค่าสัมประสิทธิ์แรงลาก ($C_D$) มีค่าขึ้นอยู่กับรูปแบบการไหล ยกตัวอย่างเช่น สำหรับการไหลแบบเป็นคลื่น ค่าสัมประสิทธิ์แรงลากมีค่าดังนี้

$$C_D = 0.0112\, Re_g^{-0.2}$$

เมื่อ

$$|v_R| \le 5\left(\frac{\rho_{g0}}{\rho_g}\right)^{1/2} m/s \quad (53)$$

$$C_D = \frac{1}{4}\left[1 + 15\left(\frac{h_L}{D}\right)^{0.5}\left[\frac{|v_R|}{5.0}\left(\frac{\rho_{g0}}{\rho_g}\right)^{1/2} - 1\right]\right]$$

เมื่อ

$$|v_R| > 5\left(\frac{\rho_{g0}}{\rho_g}\right)^{1/2} m/s \quad (54)$$

เมื่อ

$h_L$ = ความลึกของวัฏภาคของเหลว

$\rho_{g0}$ = ความหนาแน่นของแก๊สที่สภาวะมาตรฐาน (STP)

สำหรับกรณีที่ของไหลเป็นแบบฟองแก๊ส

$$C_D = 2.8 R_b (1-\alpha)^3 \quad (55)$$

เมื่อ $R_b$ = รัศมีของฟองแก๊ส

การคำนวณหาค่า $A_i$ (interfacial area density) จะขึ้นอยู่กับรูปแบบการไหลด้วย เช่นถ้าเป็นการไหลแบบฟองแก๊ส ค่า $A_i$ จะมีค่าสัมพันธ์โดยตรงกับค่าสัดส่วนช่องว่างที่ตำแหน่งนั้นๆ กล่าวคือ

$$A_i = \frac{3\alpha}{R_b} \quad (56)$$

สำหรับการไหลแบบแบ่งชั้น ค่า $A_i$ มีค่าดังนี้

$$A_i = 2R\sin(\phi/2) \quad (57)$$

เมื่อ

$R$ = รัศมีของท่อ

$\phi$ = มุมระหว่างแกนในแนวดิ่งและชั้นผิวสัมผัสซึ่งค่า $\phi$ มีค่าสัมพันธ์กับค่าสัดส่วนช่องว่างดังนี้

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{2\pi}(\phi - \sin\phi)$$

สำหรับตัวแปรที่เราต้องการวิเคราะห์หามีทั้งหมด 8 ตัวแปร นั่นคือค่าองค์ประกอบความเร็วของก๊าซในทั้ง 3 ทิศทาง ($V_g, U_g, W_g$) ค่าองค์ประกอบความเร็วของก๊าซในทั้ง 3 ทิศทาง ($V_l$, $U_l$, $W_l$) นอกจากนี้ยังมีค่า $\varepsilon$ และค่า $P$ ดังนั้นเราต้องการสมการทั้งหมด 8 สมการ ได้แก่ สมการสมดุลมวลสารของทั้งสองวัฏภาค 2 สมการ สมการสมดุลโมเมนตัม (สมการที่ 47 และ 48) ของทั้งสองวัฏภาค ซึ่งสามารถเขียนกระจายออกเป็นสมการสเกล่าร์ในแต่ละแกนโคออร์ดิเนตได้ทั้งหมด 6 สมการ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าจำนวนตัวแปรมีค่าเท่ากับจำนวนของสมการ ทำให้สามารถแก้สมการหาตัวแปรได้ แต่การแก้สมการจะต้องกระทำพร้อมกัน ซึ่งมีอยู่เพียงวิธีเดียวคือการใช้วิธีการทางตัวเลข โดยการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการแก้ปัญหาพลศาสตร์ของของไหล (computational fluid dynamics หรือ CFD) อาทิเช่น โปรแกรม PHOENICS เป็นต้น

# บทสรุป

## *การพิจารณาเลือกใช้รูปแบบจำลองในการคำนวณหาค่าความดันลดของการไหลแบบสองวัฏภาคระหว่างก๊าซ-ของเหลวในท่อแนวนอน*

ถึงแม้ว่าเป็นที่ทราบกันแล้วว่า การคำนวณหาค่าความดันลดของการไหลแบบสองวัฏภาคที่ดีคือ การใช้รูปแบบจำลองการไหลของของไหล 2 ชนิด เพราะสามารถทำให้เข้าใจปรากฏการณ์ทางกายภาพของการไหลแบบสองวัฏภาคได้ดีขึ้น ทั้งนี้เพราะเราจะเห็นได้ว่าในรูปแบบจำลองของของไหล 2 ชนิดนี้จะมีตัวแปรที่เกี่ยวข้องและโยงใยรูปแบบของการไหลเข้ามาในรูปแบบจำลอง จึงทำให้เกิดความแน่ใจว่ารูปแบบจำลองจะสามารถทำนายค่าความดันลดได้อย่างถูกต้องแม่นยำขึ้นและสามารถใช้ได้กับรูปแบบการไหลทุกรูปแบบ แต่อย่างไรก็ตามเนื่องจากการแก้ปัญหาโดยใช้รูปแบบจำลองของไหลสองชนิดยังคงต้องใช้การคำนวณโดยใช้คอมพิวเตอร์ จึงทำให้นักวิศวกรส่วนใหญ่ยังคงให้ความสนใจการคำนวณโดยการใช้สมการเอมไพริกัลเป็นหลัก ซึ่งการใช้สมการเอมไพริกัลดังกล่าวมีข้อเสนอแนะดังต่อไปนี

1) ความสัมพันธ์ที่ใช้ในการคำนวณเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องจากความเสียดทานมีอยู่มากมาย ความถูกต้องแม่นยำของแต่ละความสัมพันธ์มักขึ้นอยู่กับช่วงข้อมูลการทดลองที่ความสัมพันธ์นั้นได้รับการพิสูจน์มา *Whalley, P.B.* (1982) ได้แนะนำช่วงที่เหมาะสมของการนำไปใช้งานของแต่ละความสัมพันธ์และได้สรุปไว้ในตารางที่ 3

**ตารางที่ 3 คำแนะนำช่วงการใช้งานของแต่ละความสัมพันธ์**

| $\mu_l$ $\mu_g$ | $G$ (kg/m$^2$ sec) | ความสัมพันธ์ |
|---|---|---|
| < 1000 | ได้ทุกช่วง | *Friedel* |
| > 1000 | > 100 | *Chisholm-Baroczy* |
| > 1000 | < 100 | *Lockhart-Martinelli* |

2) นอกจากนี้ *Weisman* และ *Choe* ได้ให้คำแนะนำที่ค่าความเร็วมวลทั้งหมด ($G_T$) มีค่ามากกว่า 2700 $kg\,m^{-2}s^{-1}$ การไหลจะเป็นแบบเนื้อเดียวกันตลอด ดังนั้นในการคำนวณเราสามารถใช้รูปแบบจำลองการไหลแบบเป็นเนื้อเดียวกันตลอด โดยที่เทอมความหนืดถูกแทนด้วยความหนืดของของผสมก๊าซ-ของเหลวซึ่งนิยามไว้ดังต่อไปนี้

$$\mu_{tp} = \mu_l \, exp\left[\frac{2.5}{1-\frac{39}{64}\varepsilon_g}\right] \qquad (59)$$

$\mu_{tp}$ = ค่าความหนืดของของผสมสองวัฏภาค, หน่วย $Nsm^{-2}$

$\mu_l$ = ค่าความหนืดของของเหลว, หน่วย $Nsm^{-2}$

3) ถ้ารูปแบบการไหลอยู่ในช่วงการเปลี่ยนแปลงจากรูปแบบหนึ่งไปยังอีกรูปแบบหนึ่ง ควรใช้สมการ *Lockhart* และ *Martinelli* ในการคำนวณหาค่าเกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเสียดทาน

4) เนื่องจากความไม่แน่นอนของสมการเอมไพริกัลที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความดันลดอันเนื่องมาจากความเสียดทาน ดังนั้นจึงไม่ใช่เรื่องแปลกที่นักวิศวกรจะใช้ตัวประกอบความปลอดภัยในการคำนวณออกแบบระบบท่อ และแฟกเตอร์ความปลอดภัยสำหรับการไหลแบบสองวัฏภาคจะมีค่าอยู่ในช่วง 1.2 จนถึง 2.0

5) เนื่องจากความสัมพันธ์เอมไพริกัลของค่า $\phi^2$ มีอยู่มากมายในวารสารทางวิชาการ แต่ความสัมพันธ์เหล่านี้ควรมีลักษณะความเป็นจริงทางกายภาพ นั่นคือ ค่า $\phi^2$ จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้
   - $\phi^2$ มีค่าเข้าใกล้ 1 ในขณะที่ค่าสัดส่วนโดยมวลของของเหลวมีค่าเข้าใกล้ศูนย์
   - $\phi^2$ จะต้องมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อสัดส่วนโดยมวลของของเหลวมีค่าเพิ่มขึ้น
   - การเพิ่มขึ้นของค่าอัตราส่วนระหว่างค่าความหนาแน่นของของเหลวต่อก๊าซจะทำให้ค่า $\phi^2$ เพิ่มขึ้น หรือพูดอีกนัยหนึ่งคือ ในขณะที่ความดันของระบบมีค่าลดลง ค่า $\phi^2$ ควรมีค่าเพิ่มขึ้น
   - ค่า $\phi^2$ ควรมีค่าเข้าใกล้หนึ่งในขณะที่ความดันของระบบมีค่าเข้าใกล้ความดันวิกฤต
   - ค่า $\phi^2$ ควรมีค่าลดลงในขณะที่ฟลักซ์เชิงมวลทั้งหมดมีค่าเพิ่มขึ้น (โดยที่ค่าสัดส่วนเชิงมวลของของเหลวและคุณสมบัติทางกายภาพมีค่าคงที่)

6) เนื่องจากค่าสัดส่วนช่องว่างมีผลต่อทั้งการคำนวณแกรเดียนท์ความดันอันเนื่องมาจากความเร่ง และสนามโน้มถ่วงแล้ว ยังมีผลต่อเวลาที่ของเหลวอยู่ในระบบ (residence time) อีกด้วย การเลือกใช้สมการความสัมพันธ์ที่คำนวณหาค่า $\varepsilon$ จึงเป็นสิ่งสำคัญ ซึ่งสมการเหล่านี้ควรมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้
   - ค่า $\varepsilon$ ที่คำนวณควรมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ในขณะที่สัดส่วนมวลของก๊าซมีค่าเข้าใกล้ศูนย์
   - ค่า $\varepsilon$ ที่คำนวณควรมีค่าเข้าใกล้หนึ่ง ในขณะที่สัดส่วนมวลของก๊าซมีค่าเข้าใกล้หนึ่ง

## *สัญลักษณ์ (Nomenclature)*

a ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการ Premoli, Francesco และ Prina นิยามตามสมการที่ (37)
A พื้นที่หน้าตัด (cross-sectional area)
b ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการ Premoli, Francesco และ Prina นิยามตามสมการที่ (38)
B ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการของ Chisholm-Baroczy นิยามไว้ในตารางที่ 1 ตามสมการ (F-H)
$C_1$ ค่าคงที่ในสมการของ Blasius
C ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการของ Lockhart-Martinelli นิยามไว้ในตารางที่ 1
$C_D$ ค่าสัมประสิทธิ์แรงลาก (drag coefficient)
D เส้นผ่าศูนย์กลางภายในของท่อ
E ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการของ Friedel นิยามไว้ในตารางที่ 1 ตามสมการ (J)
f แฟกเตอร์ความเสียดทาน (Friction factor)
F ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการของ Friedel นิยามไว้ในตารางที่ 1 ตามสมการ (N)
F ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการของ Friedel นิยามไว้ในตารางที่ 1 ตามสมการ (K)
g ความเร่งอันเนื่องมาจากสนามโน้มถ่วง
G ฟลักซ์เชิงมวล (mass flux)
h ความลึก

H ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการของ Friedel นิยามไว้ในตารางที่ 1 ตามสมการ (O)

K อัตราส่วนการลื่นไถล (slip velocity)

k พลังงานจลน์ความปั่นป่วน (Turbulent Kinetic energy)

L ความยาว

$\dot{m}$ อัตราการไหลเชิงมวล (mass flow rate)

M เทอมการถ่ายเทมวลสารข้ามวัฏภาค

M เทอมการถ่ายเทโมเมนตัมระหว่างวัฏภาค

n เทอมยกกำลังในสมการของ Blasius

P ค่าความดัน

R รัศมี

Re เลขเรย์โนลด์ (Reynolds Number)

S เส้นรอบวง

v ค่าความเร็ว

$\dot{\forall}$ อัตราการไหลเชิงปริมาตร (Volumetric flow rate)

We ค่าคงที่ที่ใช้ในสมการของ Friedel นิยามไว้ในตารางที่ 1 ตามสมการ (M)

x ค่าสัดส่วนมวลของก๊าซ (quality)

z แกนโคออร์ดิเนตในทิศ z

## อักษรกรีก

$\lambda$ ตัวแปรของ Baker ที่นิยามตามสมการที่ (1)

$\psi$ ตัวแปรของ Baker ที่นิยามตามสมการที่ (2)

$\sigma$ ค่าความตึงผิว (surface tension)

$\mu$ ค่าความหนืด (viscosity)

$\varepsilon$ สัดส่วนช่องว่าง (void fraction)

$\theta$ มุม (Angle)

$\tau$ ความเค้นเฉือน (Shear stress)

$\phi$ ตัวคูณความเสียดทาน (frictional multipliers)

$\chi$ ตัวแปรที่นิยามตามสมการที่ (26)

$\Gamma$ ตัวแปรที่นิยามตามสมการที่ (27)

$\Delta$ ความแตกต่าง

$\in$ Dissipation Rate

$C_\mu$, $C_1$, $C_2$, $\sigma_K$, $\sigma_\varepsilon$ เทอมค่าคงที่ในแบบจำลองความปั่นป่วน k-$\in$

$\nabla$ เกรเดียนท์ (gradient) เป็นสัญลักษณ์ของเวคเตอร์ (Vector)

$|\ |$ เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ (absolute value)

## ตัวห้อย

a ความเร่ง

B ฟองก๊าซ (bubble)

F ความเสียดทาน (friction)

g วัฏภาคก๊าซ

H Homogeneous flow

l วัฏภาคของเหลว

lo กรณีที่คิดคุณสมบัติทั้งหมดของของไหลผสมเป็นของเหลวเพียงอย่างเดียว

T ความปั่นป่วน (turbulent)

w น้ำ

SP วัฏภาคเดี่ยว (single phase)

# บรรณานุกรม


1) Lawrence, D., "Dealing with Two-Phase Flows", Chemical Engineering, June 1995, pp 70-78.

2) Coker, A.K., "Understand Two-Phase Flow in Process Piping", Chemical Engineering Progress, November 1990, pp. 60-65.

3) Gidaspow, D., "Two-Phase Pressure Drops", Paper presented at China-U.S Seminar on Two-Phase Flow and Heat transfer, Xi'an China, May 7-18 1984.

4) Butterworth, D., and Hewitt, G.F., "Two-Phase Flow and Heat transfer, Oxford University Press, New York, 1977.

5) Hetsroni, G., "Handbook of Multiphase Systems, Hemisphere Publishing corporation, Washington, McGraw-Hill Book Company, 1982

6) Gidaspow, D., "Multiphase Flow and Fluidization, Continuum and Kinetic Theory Descriptions", Academic Press, Inc., Boston , 1994.

7) Therdthianwong, A., and Giolaspow.D., "Simulation of Steam/Water Flow in a Pipe Junction", Progress report submitted to Mobil Company, U.S.A, 1994

8) Lahey, R.T., Jr., "Current Understanding of Phase Separation Mechanisms in Branching Conduits", Nuclear Engineering and Design, 95, 1986, pp 145-161

9) Gidaspow, D., Rasouli, F., and Shin, Y.W., "An Unequal Velocity Model for Transient Two-Phase Flow by the Method of Characteristics", Nuclear Science and Engineering, 84, 1983, pp 179-195.

10) Raman, R., "Chemical Process Computations", Elsevier Applied Science Publisher, New York, 1985.

11) Walas, S.M., "Chemical Process Equipments: Selection and Design", Butterworth-Heinemann, Boston, 1990.