

การควบคุมลูกตุ้มผกผัน

สถาพร อุดมสิน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์

ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ศราวุธ โพธิ์ยา

นักศึกษาปริญญาโท

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาการควบคุมลูกตุ้มผกผันซึ่งเป็นแบบจำลองที่ดีของการควบคุมกระบวนการที่ไม่เป็นเชิงเส้นและไม่มีเสถียรภาพ โครงสร้างของลูกตุ้มผกผันประกอบไปด้วย ลูกตุ้มยึดกับจุดหมุนซึ่งติดกับตัวรถ โดยให้ลูกตุ้มสามารถเคลื่อนที่ได้ในระนาบเดียวกับกระดานไถเพียงระนาบเดียวเท่านั้น ตัวรถสามารถเคลื่อนที่ไปมาได้บนรางโดยมีมอเตอร์เป็นตัวขับเคลื่อนทำให้เกิดแรงทำให้ตัวรถเคลื่อนที่

การศึกษาลูกตุ้มผกผัน เริ่มจากการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลูกตุ้มผกผัน การสร้างแบบจำลองและทดสอบหาค่าพารามิเตอร์ เพื่อนำมาแทนค่าในสมการสเตท การสร้างวงจรถับมือมอเตอร์ การออกแบบและสร้างตัวควบคุม ซึ่งตัวควบคุมที่ใช้ในบทความนี้ออกแบบโดยใช้วิธี linear quadratic regulator (LQR) และออกแบบเอสติเมเตอร์ โดยใช้วิธี reduced order estimator ในการออกแบบจะใช้โปรแกรม MATLAB ช่วยในการออกแบบ สุดท้ายนำตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบมาสร้างเป็นวงจรโดยใช้อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์แล้วทดสอบการควบคุมผล พบว่า ตัวควบคุมสามารถควบคุมให้ลูกตุ้มผกผันมีเสถียรภาพได้ดีพอสมควร

Inverted Pendulum Control

Sathaporn Udomsin

Assistant Professor

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering Khon Kaen University

Sarawuth Potiya

Mater Student

Department of Electrical Engineering

Graduate School Khon Kaen University

Abstract

This paper is to study the control of an inverted pendulum. Which is a good example of nonlinear unstable process. The process to be controlled is an inverted pendulum hinged on a movable carriage. The pendulum movement is limited only on a single plane in the direction of the carriage movement. The carriage is installed on a straight rail and driven by a small dc motor.

The studies include a process modeling that results to state equation, measuring the model parameters, building a motor driver circuit, designing, simulating and building the controller. The controller utilized is a Linear Quadratic Regulator (LQR) with Reduce Order Estimator, measurement only two states and other two states were estimated. Using MATLAB was for designing and simulating.

The designed controller was built and tested on inverted pendulum. The complete control system works satisfactory with sufficient stability.

บทนำ

ลูกตุ้มผกผันเป็นแบบจำลองทางด้านกายภาพที่แสดงถึงกระบวนการที่ไม่เป็นเชิงเส้นและไม่มีเสถียรภาพ ใช้หลักการคล้ายกับการเลี้ยงไม้บนมือเพื่อรักษาสมดุลของไม้ไม่ให้ล้ม มีลักษณะคล้ายกับลูกตุ้มนาฬิกาแต่กลับหัวมีจุดหมุนติดกับฐานที่ประกบกับตัวรถ โดยลูกตุ้มนี้อาจเคลื่อนที่ได้ด้วย

อิสระ ในที่นี้จะบังคับให้ลูกตุ้มเคลื่อนที่ได้เฉพาะแกนเดียวเท่านั้น ส่วนตัวรถสามารถเคลื่อนที่ไปมาได้บนรางในแนวราบโดยขับเคลื่อนด้วยแรงจากมอเตอร์

จุดมุ่งหมายของการควบคุมคือ ต้องการควบคุมไม่ให้ลูกตุ้มล้มและตัวรถอยู่ในตำแหน่งกึ่งกลางของราง ลักษณะการทำงานของระบบควบคุมลูกตุ้มผกผันคือ ในกรณีที่ลูกตุ้มล้มไปทางซ้ายมือก็ควบคุมให้ตัวรถเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือด้วยความเร็วที่เร็วกว่าการล้มของลูกตุ้ม ทั้งนี้ เพื่อที่จะสร้างแรงเพื่อที่จะเอาชนะแรงที่ทำให้ลูกตุ้มล้ม และจะทำให้ทิศทางการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มกลับทิศทางมาทางด้านขวามือและเข้าสู่จุดสมดุลได้ ลูกตุ้มก็จะไม่ล้ม

จะเห็นได้ว่าแบบจำลองลูกตุ้มผกผัน เป็นแบบจำลองที่ดีที่ใช้เป็นแบบจำลองของกระบวนการที่ไม่มีเสถียรภาพ เป็นได้ทั้งระบบที่มีอินพุตเดียวเอาต์พุตเดียว (single input single output, SISO) และเป็นได้ทั้งระบบที่มีอินพุตเดียวหลายเอาต์พุต (single input multi-output, SIMO) ในบทความนี้จะพิจารณาในระบบที่เป็นอินพุตเดียวหลายเอาต์พุต ซึ่งเป็นระบบที่ค่อนข้างเร็วและตัวควบคุมบางตัวก็ไม่สามารถควบคุมระบบนี้ได้ อีกทั้งสามารถสร้างขึ้นได้ง่าย โครงสร้างไม่ซับซ้อน มีขนาดเล็ก เหมาะที่จะนำมาสาธิตถึงการควบคุมได้ง่าย

วิธีการควบคุมที่ใช้ในบทความนี้เป็นวิธีการควบคุมสมัยใหม่ โดยจำลองกระบวนการในรูปของสมการสเตต (state equation) การควบคุมจะใช้วิธีของ linear quadratic regulator หรือ LQR ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะสมสำหรับกระบวนการที่เป็นแบบหลายอินพุตหลายเอาต์พุตและเป็นการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด

ตัวแปรสเตต (state variable) ของลูกตุ้มผกผัน ที่พิจารณาในบทความนี้ มีอยู่ 4 ตัว คือ ตำแหน่งของตัวรถ (y) มุมของลูกตุ้ม (θ) ความเร็วของตัวรถ ($\dot{y}$) และความเร็วของลูกตุ้ม ($\dot{\theta}$) แต่วัดค่าตัวแปรสเตตเพียง 2 ตัวเท่านั้น คือ ตำแหน่งของตัวรถกับมุมของลูกตุ้ม ส่วนตัวแปรสเตตที่ไม่ได้วัดคือ ความเร็วของตัวรถกับความเร็วของลูกตุ้ม ซึ่งจะใช้การประมาณค่าโดยใช้วิธี Reduced Order Estimator

ลูกตุ้มผกผัน ยังเป็นแบบจำลองที่สามารถใช้ในการศึกษาเกี่ยวกับระบบของทางด้านเครื่องจักรกลไฟฟ้า ทางด้านอิเล็กทรอนิกส์ ทางด้านเครื่องมือวัด และทางด้านการควบคุม

การวิเคราะห์ระบบลูกตุ้มผกผัน

การวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลูกตุ้มผกผัน

การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลูกตุ้มผกผันสามารถทำได้หลายวิธี ในบทความนี้จะประยุกต์ใช้วิธีของลากราง (Lagrange's method) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการที่มีการเคลื่อนที่ของเครื่องจักรกลที่ซับซ้อนเช่น การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ โดยแสดงในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้จากการใช้วิธีนี้เรียกว่า สมการของลากราง (Lagrange's equation) และอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

ฟังก์ชันของลากรางเรียกว่า ลากรางเจียน (Lagrangian) เขียนอยู่ในรูปของ

$$\Gamma = T - P$$

(1)

เมื่อ

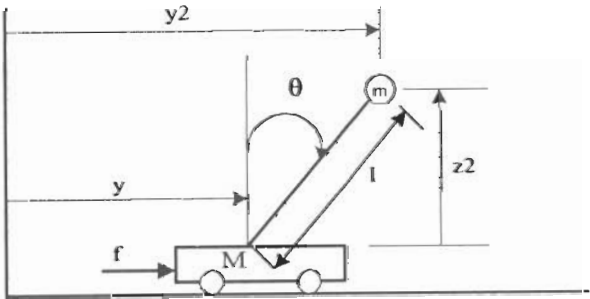
- T = ผลรวมของพลังงานจลน์ (kinetic energy)
- P = ผลรวมของพลังงานศักย์ (potential energy)

เมื่อประยุกต์ใช้กับสมการของการเคลื่อนที่ จะได้

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = Q_i$$

เมื่อ q_i คือ ตัวแปรที่สนใจที่จะควบคุม และ Q_i คือ แรงกระทำทั่วไป

เราสามารถหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองลูกตุ้มผกผัน ที่แสดงดังรูปที่ 1 ได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 1 แสดงแบบจำลองลูกตุ้มผกผัน (Inverted Pendulum)

เมื่อ M คือ มวลของตัวรถ น้ำหนักของสายพาน และน้ำหนักของล้อสายพาน (pulley) มีหน่วยเป็น กิโลกรัม (kg), m คือ มวลของลูกตุ้ม มีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg), l คือ ความยาวของแท่งลูกตุ้ม มีหน่วยเป็นเมตร (m) และ r คือ รัศมีของล้อสายพาน มีหน่วยเป็นเมตร (m)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของตัวรถในแนวราบและการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มทั้งในแนวราบและแนวตั้ง ผลรวมของพลังงานจลน์ หาได้จาก

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{y}^2 + 2\dot{y}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2 \right] \quad (2)$$

เนื่องจากพลังงานศักย์ของตัวรถมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จะมีพลังงานศักย์เกิดขึ้นเฉพาะในส่วนของลูกตุ้มเท่านั้น ดังนั้น ผลรวมของพลังงานศักย์ หาได้จาก

$$P = mgz_2 = mgl\cos\theta \quad (3)$$

จากฟังก์ชันของลากราง หรือลากรางเจียน จะได้

$$\Gamma = \frac{1}{2} (M + m) \dot{y}^2 + ml\cos\theta\dot{y}\dot{\theta} + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \quad (4)$$

สมการของลากรางสำหรับระบบนี้ คือ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= f \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

$$(M + m)\ddot{y} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = f \quad (5)$$

$$ml\cos\theta\ddot{y} - ml\sin\theta\dot{y}\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta + ml\sin\theta\dot{y}\dot{\theta} = 0$$

สมการที่ (5) เป็นสมการที่ถูกต้องของกระบวนการลูกตุ้มผกผัน ที่แสดงในรูปที่ 1 ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น มีเทอมของตรีโกณมิติคือ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ และเทอมกำลังสอง (quadratic) คือ $\dot{\theta}^2$ และ $\dot{y}\dot{\theta}$ ถ้าลูกตุ้มอยู่ในสภาวะที่มีเสถียรภาพมุม θ จะมีขนาดเล็กมาก ดังนั้น $\cos\theta \approx 1$ และ $\sin\theta \approx \theta$ และจะทำให้ $\dot{\theta}$ และ $\dot{y}$ มีขนาดเล็กด้วย ดังนั้น เทอมกำลังสองก็ไม่ต้องนำมาพิจารณา และให้ใช้การประมาณเป็นเชิงเส้น (linearized dynamic model) จะได้

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{y} + m\ddot{\theta} &= f \\ m\ddot{y} + m\ddot{\theta} - mg\theta &= 0\end{aligned}\tag{6}$$

แรงที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มผกผัน เป็นแรงที่ได้จากดีซีมอเตอร์ ดังนั้น ในหาแบบจำลองที่ถูกต้องจึงต้องรวมแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของดีซีมอเตอร์เข้าไปด้วย

ดีซีมอเตอร์ที่ใช้จะเป็นแบบแม่เหล็กถาวรหรือใช้การควบคุมขดลวดอาร์เมเจอร์ (amature controlled) ดังนั้น แรงบิดของมอเตอร์ (T_m) หาได้จาก

$$T_m = (K_1 K_f I_f) i_a = K_m i_a \tag{7}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสอาร์เมเจอร์ กับแรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ คือ

$$V_a = (R_a + sL_a) i_a + V_b \tag{8}$$

แต่

$$V_b = K_b \omega \tag{9}$$

เมื่อ

K_m = ค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแสของมอเตอร์ หน่วยเป็น (Nm/amp)

K_b = ค่าคงที่ระหว่างแรงดันกับความเร็วของมอเตอร์หน่วยเป็น (volt.sec/rad)

T_m = แรงบิดของดีซีมอเตอร์ หน่วยเป็น N

V_b = แรงดันย้อนกลับ (back emf voltage) ในอาร์เมเจอร์ หน่วยเป็น volt

V_a = แรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ หน่วยเป็น volt

i_a = กระแสอาร์เมเจอร์ หน่วยเป็น amp

ω = ความเร็วเชิงมุม หน่วยเป็น rad/sec

R_a = ความต้านทานของอาร์เมเจอร์ หน่วยเป็น Ω

X_a = ค่ารีเอคแตนซ์ของขดลวดอาร์เมเจอร์ หน่วยเป็น henry

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดของมอเตอร์ และแรงที่ใช้ขับเคลื่อน คือ

$$T = r \times f$$

เมื่อ r คือ รัศมีของล้อสายพาน (pulley) จะได้

$$f = \frac{K_m V_a - K_m K_b \omega}{R_a r} \quad (10)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์กับระยะทางที่ตัวรถเคลื่อนที่ได้ในแนวราบหาได้จาก

$$\omega = \frac{\dot{y}}{r}$$

จากสมการที่ (6) จะได้

$$\ddot{y} = \frac{K_m V_a}{M R_a r} - \frac{K_m K_b \dot{y}}{M R_a r^2} - \frac{m g \theta}{M} \quad (11)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g\theta}{Ml} + \frac{K_m K_b \dot{y}}{Ml R_a r^2} - \frac{K_m V_a}{Ml R_a r} \quad (12)$$

แบบจำลองที่สมบูรณ์ของแบบจำลองลูกตุ้มหัวกลับซึ่งขับเคลื่อนโดยดีซีมอเตอร์สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ ได้คือ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{K_m K_b}{M R_a r^2} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & \frac{K_m K_b}{Ml R_a r^2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_a K_m}{M R_a r} \\ -\frac{K_a K_m}{Ml R_a r} \end{bmatrix} u \quad (13)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

เมื่อ $x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$ และ $V_a = K_a \times u$ โดยที่ K_a คือ อัตราขยายของวงจรขับเคลื่อนมอเตอร์

สมการที่ (13) เรียกว่าสมการสเตต (state equation) ซึ่งมีอินพุตเดียวสองเอาต์พุต

การหาค่าพารามิเตอร์

ค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์ K_m , K_b และ R_a สามารถหาได้จากการทดลองค่าคงที่ K_m สามารถหาได้จากการที่น้ำหนักแท่งเหล็กที่รู้ มวล และความยาว มาต่อที่เพลาของมอเตอร์ จากนั้นจ่ายกระแสให้กับมอเตอร์ โดยการเพิ่มแรงดันไฟฟ้า จนกระทั่งแท่งเหล็กเคลื่อนตัวมาอยู่ในแนวราบ ที่จุดนี้

มอเตอร์จะมีแรงบิดเท่ากับน้ำหนักของแท่งเหล็ก นั่นคือ $\frac{1}{2}mgl$ พร้อมทั้งวัดค่ากระแส สามารถคำนวณค่าของ K_m ได้จาก

$$K_m = \frac{T}{i_a} = \frac{mgl}{2i_a} \quad (14)$$

มอเตอร์จะถูกนำไปต่อกับชุดเฟืองทด ดังนั้น การวิเคราะห์จะต้องรวมอัตราส่วนการทดรอบของเฟือง (มีค่าเป็น 6) โดยจะคูณค่านี้นับกับค่าของ K_m ด้วย

ค่าคงที่ K_b หาได้จากการวัดความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ เนื่องจาก เครื่องมือในการวัดไม่พร้อมเพรียงจึงวัดค่าความเร็วเชิงเส้นแทน โดยคำนวณได้จาก

$$v = \frac{S}{t}$$

เมื่อ

v = ความเร็วเชิงเส้น หน่วยเป็น m/s

S = ระยะทาง หน่วยเป็น m

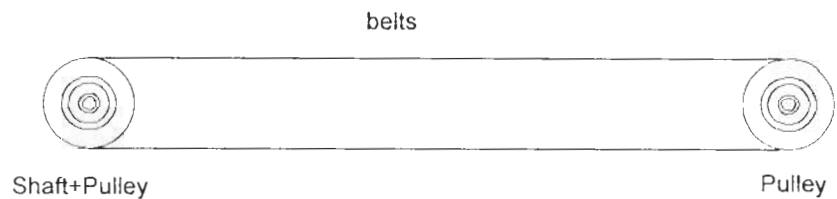
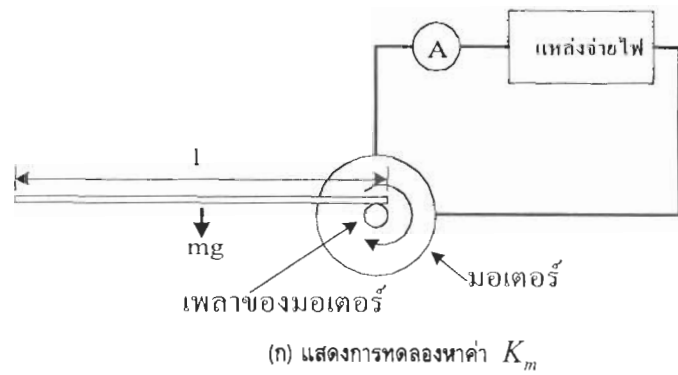
และจากความสัมพันธ์

$$\omega = \frac{v}{r}$$

จะได้

$$K_b = \frac{(V - i_a R_a)}{\omega}$$

ส่วนค่าความต้านทานของอาร์เมเจอร์ (R_a) สามารถหาได้จากการวัดความต้านทานคร่อมมอเตอร์ ซึ่งการทดลองหาค่าคงที่ K_m , K_b และ R_a หาได้จากการทดลองที่แสดงดังรูปที่ 2

รูปที่ 2 แสดงการหาค่า K_m และ K_b

การหาทรานซ์เฟอ์ฟังก์ชันของเครื่องมือวัด

เครื่องมือที่ใช้ในการวัดมุมของลูกตุ้มและตำแหน่งของตัวรถจะใช้ potentiometer ซึ่งค่ามุมของลูกตุ้มที่เปลี่ยนไปก็จะเปลี่ยนเป็นค่าของแรงดัน ซึ่งจะใช้การแบ่งแรงดันจากแหล่งจ่ายไฟ $+V$ และ $-V$ คือ เมื่อค่ามุม θ มีค่าน้อยกว่า 90° ค่าแรงดันจะมีค่าบวก และถ้าค่ามุม θ มีค่ามากกว่า 90° ค่าแรงดันจะมีค่าลบ และถ้าแกนของลูกตุ้มอยู่ในแนวตั้งพอดีแรงดันที่ได้ของ potentiometer จะมีค่าอยู่ตรงกลางระหว่าง $+V$ และ $-V$ คือ ศูนย์

Potentiometer ที่ใช้เป็นแบบแกนหมุนมีขนาดลดประมาณ 350° เมื่อหมุน potentiometer มาด้านขวาจนสุด จะมีแรงดันประมาณ 15 V คิดเป็นมุมประมาณ 150° เทียบกับแนวตั้ง ซึ่งหาอัตราขยายของเครื่องมือวัด (sensor gain) ได้ดังนี้

$$K_\theta = \frac{V_{\max}}{150^\circ} = \frac{V_{\max}}{0.83 \times \pi} \quad (15)$$

ส่วนเครื่องมือที่ใช้วัดตำแหน่งของตัวรถก็จะใช้ potentiometer เหมือนกัน แต่เป็นแบบ 10 รอบ ซึ่งจะวัดออกมาในรูปของความยาวเชิงมุมก่อนแล้วค่อยแปลงเป็นความยาวเชิงเส้น ทั้งนี้ จะขึ้นอยู่กับเส้นผ่าศูนย์กลางของล้อสายพาน ความยาวเชิงเส้นจะหาค่าได้จากสมการ $y = \pi D$ เมื่อ D คือเส้นผ่าศูนย์กลางของล้อสายพานมีค่าเป็น 0.075 m อัตราการขยายของเครื่องมือวัดจะมีค่าเป็น

$$K_y = \frac{V_{\max}}{10 \times \pi D} \tag{16}$$

ค่าพารามิเตอร์ ที่ใช้นับความนี้จะเป็นไปตามตารางที่ 1

ตารางที่ 1

ค่าพารามิเตอร์ของลูกตุ้มผกผัน

พารามิเตอร์	คำอธิบาย	ปริมาณ
r	รัศมีของล้อสายพาน	0.011 m
M	มวลของตัวรถ	0.3 Kg
m	มวลของแท่งลูกตุ้ม	0.25 Kg
l	ความยาวของแท่งลูกตุ้ม	0.51 m
K_m	ค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแส	0.0390 Nm/amp
K_h	ค่าคงที่ระหว่างแรงดันกับความเร็ว	0.0212 volt.sec/rad
R_a	ความต้านทานอาร์เมเจอร์	3 โอห์ม
K_θ	อัตราขยายของเซ็นเซอร์ของมุม	5.7526 volt/rad
K_y	อัตราขยายของเซ็นเซอร์ระยะทาง	6.3662 volt/m

แทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ลงในสมการที่ (13) จะได้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8.1750 & -45.5537 & 0 \\ 0 & 35.2647 & 89.3210 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 42.5455 \\ -83.4225 \end{bmatrix} u \\ Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{17}$$

$$\text{เมื่อ } x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} \text{ และ } V_a = K_a \times u$$

โดยที่ K_a คือ อัตราขยายของวงจรถับมอเตอร์เท่ากับ 1.8

จะเห็นว่า โพล (Poles) ของ ลูกตุ้มผกผัน อยู่ที่ 0 , 4.5487, -4.1963 และ -45.9061 โดยที่ โพลที่ 4.5487 ทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ

การออกแบบตัวควบคุม

การออกแบบตัวควบคุมที่ใช้ในบทความนี้จะใช้ทฤษฎีสถิตยใหม่ โดยกระบวนการจะถูกแทนด้วยสมการสเตท จึงออกแบบตัวควบคุมโดยการป้อนกลับโดยใช้สเตท (state feedback) ซึ่งวิธีของ Linear Quadratic Regulator หรือ LQR จะหาอัตราการขยายป้อนกลับที่เหมาะสมที่สุด (optimal feedback gain) มาป้อนกลับเป็นสัญญาณควบคุม ดังนั้นจะได้

$$u = -Kx \quad (18)$$

เมื่อ K คือ อัตราการขยายป้อนกลับที่เหมาะสมที่สุด

ดังนั้นระบบที่ออกแบบโดยวิธี LQR จึงเป็นระบบควบคุมที่เหมาะสมที่สุดโดยจะให้ผลตอบสนองทางเวลา (time response) ที่ดี อีกทั้งเหมาะสำหรับกระบวนการที่เป็นแบบหลายอินพุทหลายเอาต์พุท

การหาอัตราขยายของตัวควบคุม

พิจารณาระบบเชิงเส้นและดัชนีของสมรรถนะที่แสดงอยู่ในรูปของ

$$\dot{x}^* = Ax + Bu \quad (19)$$

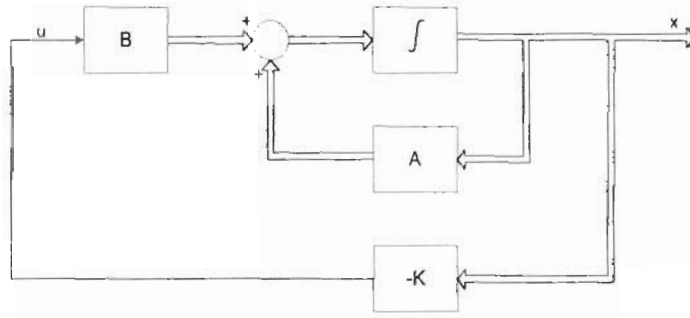
$$Y = Cx$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^* Q x + u^* R u) dt \quad (20)$$

ต้องการ minimize J โดยหาเมตริกซ์ K ที่เหมาะสมที่สุด

เมื่อ Q เป็น positive-definite (หรือ positive-semidefinite) Hermitian matrix หรือ real symmetric matrix, R เป็น positive-definite Hermitian หรือ real symmetric matrix และ control vector; u ในบทความนี้จะให้ $u \leq 25$ โวลต์

แผนภาพบล็อก (block diagram) แสดงระบบการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด แสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 ระบบการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (optimal control system)

การแก้ปัญหาที่เหมาะสมสามารถดำเนินการได้โดยการแทนสมการที่ (18) ลงในสมการที่ (19) จะได้

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (21)$$

เราสมมติให้เมตริกซ์ $(A - BK)$ มีเสถียรภาพแน่นอนคือราก (eigenvalue) ของ เมตริกซ์ $(A - BK)$ มีค่าของจำนวนจริงลบ (negative real parts) คืออยู่ทางด้านซ้ายมือของระนาบ (left half plane) หรือ LHP และแทนสมการที่ (18) ลงในสมการที่ (20) จะได้

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^* Q x + x^* K^* R K x) dt \\ &= \int_0^{\infty} x^* (Q + K^* R K) x dt \end{aligned}$$

เครื่องหมาย * หมายถึง Transpose กำหนดให้

$$x^* (Q + K^* R K) x = -\frac{d}{dt} (x^* P x)$$

เมื่อ P เป็น positive-definite Hermitian matrix หรือ real symmetric matrix และเมื่อเปรียบเทียบทั้งสองข้างของสมการข้างบน จะได้ว่า

$$(A - BK)^* P + P(A - BK) = -(Q + K^* RK) \quad (22)$$

ถ้าเมตริกซ์ $(A - BK)$ เป็นเมตริกซ์ที่มีเสถียรภาพ เมตริกซ์ P ที่เป็น positive definite ก็ยังทำให้สมการที่ (22) เป็นจริง

ขั้นตอนต่อไปคือ หาค่าของเมตริกซ์ P จากสมการที่ (22) สังเกตเห็นได้ว่าจะมีเมตริกซ์ P มากกว่าหนึ่งเมตริกซ์ที่ทำให้สมการเป็นจริง ถ้าระบบมีเสถียรภาพก็จะมีเมตริกซ์ P เพียงตัวเดียวที่ทำให้สมการเป็นจริง นั่นก็หมายความว่า ถ้าเราหาคำตอบของสมการนี้และหาเมตริกซ์ P ที่เป็น positive definite เพียงตัวเดียวที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพ เมตริกซ์ P ตัวอื่นที่ทำให้สมการเป็นจริงที่ไม่เป็น positive definite ก็ให้ตัดทิ้งไป

ส่วนค่าดัชนีของสมรรถนะ (performance index, J) สามารถหาได้จาก

$$J = \int_0^{\infty} x^* (Q + K^* RK) x dt = -x^* P x \Big|_0^{\infty} = -x^* (\infty) P x(\infty) + x^* (0) P x(0)$$

เมื่อสมมติให้ eigenvalues ของ $(A - BK)$ ทุกตัวมีค่าจำนวนจริงเป็นลบ เราจะได้ $x(\infty) \rightarrow 0$ ดังนั้น จะได้

$$J = x^* (0) P x(0) \quad (23)$$

วิธีการแก้ปัญหาของ quadratic optimal control เราจะดำเนินการดังต่อไปนี้ เมื่อ R สมมติให้เป็น positive definite Hermitian matrix หรือ real symmetric matrix เราสามารถเขียนได้ว่า

$$R = T^* T$$

เมื่อ T เป็น nonsingular matrix ดังนั้น สมการที่ (22) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$(A^* - K^* B^*) P + P(A - BK) + Q + K^* T^* T K = 0$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$A^* P + P A + [TK - (T^*)^{-1} B^* P]^* [TK - (T^*)^{-1} B^* P] - P B R^{-1} B^* P + Q = 0$$

ในการ minimized ของ J ที่สัมพันธ์กับค่า K จะต้อง minimized ค่าของ

$$x^* [TK - (T^*)^{-1} B^* P]^* [TK - (T^*)^{-1} B^* P]^* x$$

เทอมสุดท้ายในวงเล็บจะต้องไม่เป็นค่าลบ ดังนั้นค่าน้อยที่สุดก็คือศูนย์ จะได้

$$TK = (T^*)^{-1} B^* P$$

ดังนั้น

$$K = R^{-1} B^* P \quad (24)$$

สมการที่ (24) จะให้ optimal feedback gain matrix, K ดังนั้น optimal control law ที่ใช้กับ quadratic optimal control problem เมื่อ performance index ที่แสดงในสมการที่ (21) เป็นเชิงเส้น และมีความสัมพันธ์เป็น

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^* P x(t)$$

เมตริกซ์ P ในสมการที่ (24) จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขเดียวกับสมการที่ (22) หรือลดรูปได้เป็น

$$A^* P + PA - PBR^{-1} B^* P + Q = 0 \quad (25)$$

สมการที่ (25) เรียกว่า reduced matrix Riccati equation

ขั้นตอนการออกแบบ เป็นดังต่อไปนี้

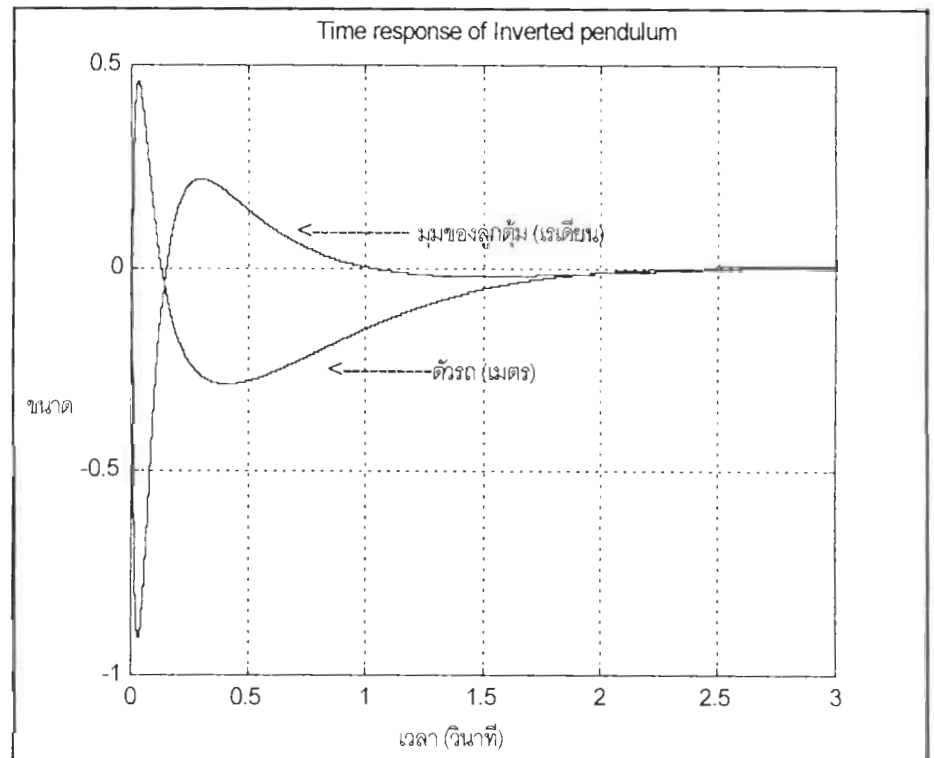
- แก้สมการที่ (25) คือ reduced matrix Riccati equation จะได้เมตริกซ์ P
- แทนเมตริกซ์ P ลงในสมการที่ (24) แล้วจะได้เมตริกซ์ K ซึ่งเป็น optimal feedback gain matrix

อัตราขยายของตัวควบคุมจะหาได้จากการใช้ คำสั่ง `lqr` ใน MATLAB โดยใช้ state weighting ของ $Q = \text{diag}(200, 500, 1, 1)$ และ control weighting ของ $R = 10$ จะได้ผลลัพธ์ของอัตราขยาย คือ

$$K = [-4.4721 \quad -14.0003 \quad -4.7620 \quad -2.7223]$$

โพลของระบบป้อนกลับสำหรับอัตราขยายนี้คือ $-53.4569, -12.6610, -1.9675 + 1.2395j$ และ $-1.9675 - 1.2395j$ ผลตอบสนองทางเวลาของระบบจะแสดงให้เห็นในรูปที่ 4 ซึ่งระบบจะมี settling

time ประมาณ 2 วินาที และสามารถตอบสนองของอินพุต ได้ดังรูปที่ 5 ซึ่งมีค่าอินพุตสูงสุด ประมาณ 25 Volts



รูปที่ 4 แสดง Impulse response ของ ตำแหน่งของตัวรถ และมุมของลูกตุ้ม

การออกแบบเอสติเมเตอร์

ระบบลูกตุ้มผกผันที่พิจารณาในบทความนี้มี 4 สเตต แต่วัดเอาต์พุตเพียง 2 สเตต ดังนั้น เรา ต้องการประมาณสเตตที่ไม่รู้ ซึ่งเรียกว่า reduced order estimator สำหรับออกแบบเอสติเมเตอร์ (estimator) เพราะเราสามารถวัดมุมของแท่งลูกตุ้มและตำแหน่งของตัวรถได้ ดังนั้น เราก็ประมาณค่า เพียง 2 สเตต เท่านั้น คือ ความเร็วในการแกว่งของลูกตุ้ม และความเร็วในการเคลื่อนที่ของตัวรถ

วิธีการของ reduced order estimator เริ่มโดยการหา linear transformation ของสเตต คือ

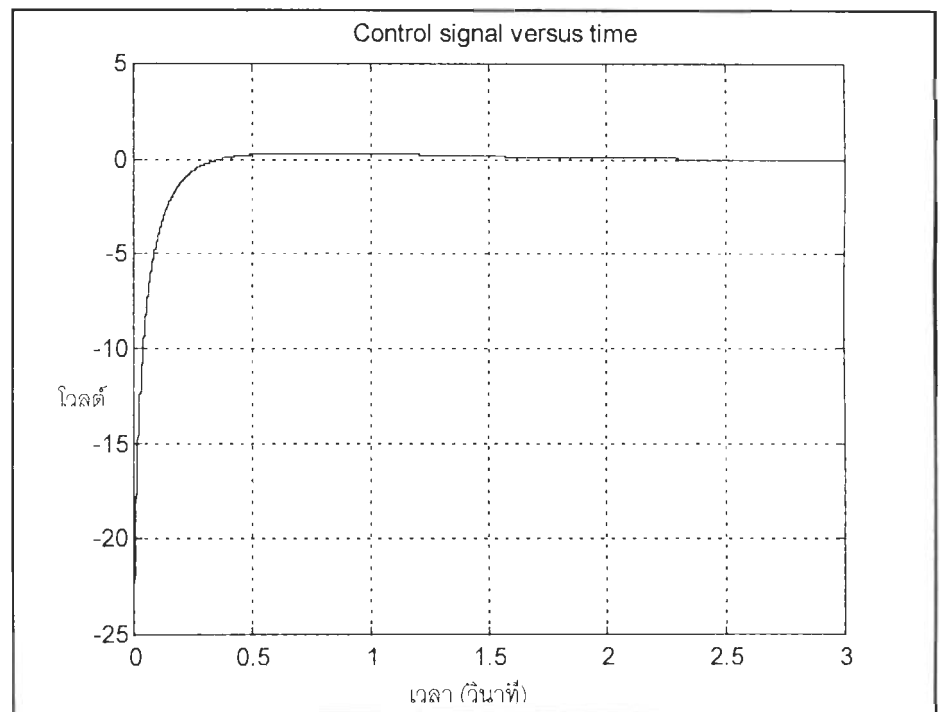
$$z = Tx, \text{ เมื่อ } \dim(T) = (n - m) \times n \text{ และ } \dim(z) = (n - m) \times 1$$

เมื่อ $n = 4, m = 2$ และ T เป็นเมตริกซ์ใดๆ ที่ทำให้ $E = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$ เป็น nonsingular และกำหนดให้ $E^{-1} = \begin{bmatrix} P & M \end{bmatrix}$, ถ้า $\text{rank}(C) = m$ การรวมกันของ Y และ z จะได้

$$\begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} x$$

จะได้

$$x = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} = PY + Mz$$



รูปที่ 5 แสดง Impulse response ของแรงที่ป้อนให้กับลูกตุ้มผกผัน

ต่อไปนีสมมุติว่าเราสร้าง full order observer ของ z (มิติของ observer = มิติของ $z = n - m$) ดังนั้น เราสามารถสร้างการประมาณค่าของ x จาก

$$\hat{x} = PY + M\hat{z} \quad (26)$$

เมื่อ $\hat{z}$ เป็นการประมาณค่าของ z

ดังนั้น การประมาณค่าของ x ทำได้โดยการเอาเมตริกซ์ E คูณเข้าข้างหน้ากับสมการสเตทจะได้

$$E\dot{x} = EAx + EBu$$

แทนค่าของ x และ E จะได้

$$E\dot{x} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Ax + \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Bu = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Bu$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CAP & CAM \\ TAP & TAM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CB \\ TB \end{bmatrix} u \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

สมการเชิงอนุพันธ์ ของ z จะได้

$$\dot{z} = A_{22}z + (A_{21}Y + B_2u)$$

เราสามารถแทนค่าของ z ด้วย $\hat{z}$ และรวมเทอมของความผิดพลาดเข้าไปด้วย

$$\dot{\hat{z}} = A_{22}\hat{z} + (A_{21}Y + B_2u) + L(Y - C\hat{x}) \quad (27)$$

เทอมที่อยู่ภายในวงเล็บแรกเป็นเทอมรู้ค่า ละเป็นอินพุตของตัวประมาณค่า ส่วนเทอมที่อยู่ภายในวงเล็บที่สองเป็นเทอมแก้ไขความผิดพลาดที่ทำให้ความผิดพลาดของตัวประมาณค่ามีเสถียรภาพ จะเห็นได้ว่าถ้า $\begin{bmatrix} P & M \end{bmatrix}$ เป็นตัวผกผัน (inverse) ของ E จะได้ $CP = I$ และ $CM = 0$ ดังนั้น

$$Y - C\hat{x} = Y - C(PY + M\hat{z}) = Y - CPY - CM\hat{z} = Y - Y - 0 = 0$$

อันที่จริงแล้วการทำแบบนี้ ค่าของเทอมแก้ไขความผิดพลาดเป็นศูนย์คือไม่ได้ทำการแก้ไขเลย ถ้าย้อนกลับไปดูการควบคุมแบบ classical control จะเห็นได้ว่าบางครั้งเมื่อทำการป้อนกลับด้วยเอาต์พุตเพียงอย่างเดียวไม่ได้ การป้อนกลับด้วยเอาต์พุตพร้อมกับอนุพันธ์ของเอาต์พุตอาจจะช่วยแก้ปัญหาก็แก้ไขความผิดพลาดได้

ดังนั้น จะแทนเทอมแก้ไขความผิดพลาดด้วยอนุพันธ์ของค่าที่ทำการวัด โดยจะได้สมการอนุพันธ์ของ Y จากสมการของการแปลงของระบบ (transformed system equation)

$$\dot{Y} = A_{11}Y + A_{12}z + B_1u \quad (28)$$

การแก้ไขทำได้โดยการย้ายปริมาณที่รู้ค่าทั้งหมดของสมการที่ (28) มาอยู่ด้านเดียวกัน พร้อมทั้งแทนค่าของ z ด้วย $\hat{z}$ ซึ่งการใช้เทอมนี้เป็นเอาต์พุตของตัวประมาณค่า สำหรับแทนลงในเทอมแก้ไขความผิดพลาดก็จะได้ตัวประมาณค่าที่มีมิติ $n-m$ คือ

$$\dot{\hat{z}} = A_{22}\hat{z} + (A_{21}Y + B_2u) + L(\dot{Y} - A_{11}Y - B_1u - A_{12}\hat{z}) \quad (29)$$

ขั้นตอนต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า ตัวประมาณค่าทำการแก้ไขความผิดพลาดได้อย่างไร โดยต้องพิสูจน์ให้เห็นว่า ค่าของความผิดพลาดจะเข้าใกล้ศูนย์เมื่อเทียบกับเวลา ซึ่งเป็นการตรวจสอบว่าความผิดพลาดของระบบจะมีเสถียรภาพ โดยการลบสมการอนุพันธ์ของ z ออกจากสมการอนุพันธ์ของ $\hat{z}$ จะได้ความผิดพลาดของระบบ (error system dynamics) เป็น

$$\dot{\hat{z}} - \dot{z} = A_{22}\hat{z} + (A_{21}Y + B_2u) + L(Y^* - A_{11}Y - B_1u - A_{12}\hat{z}) - A_{22}z - (A_{21}Y + B_2u)$$

$$\dot{\hat{z}} - \dot{z} = A_{22}(\hat{z} - z) - LA_{12}(\hat{z} - z)$$

$$\dot{e} = (A_{22} - LA_{12})e \quad (30)$$

เมื่อ e แทนค่าความผิดพลาดของระบบ

จากสมการที่ (30) จะเห็นได้ว่าค่าความผิดพลาดของระบบจะขึ้นอยู่กับเมทริกซ์ L ซึ่งไม่ได้มีการกำหนดค่าที่แน่นอน ปัญหาก็คือ การเลือกค่าของเมทริกซ์ L โดยการวางตำแหน่งราก (eigenvalues) ของตัวประมาณค่าไว้ที่ใดจึงจะทำให้ค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด

D.Luenberger[11] แสดงให้เห็นว่า observability ของ (A_{12}, A_{22}) มีลักษณะคล้ายกับ observability ของ (C, A) ดังนั้น สามารถเลือกค่าของเมทริกซ์ L โดยการวางตำแหน่งรากของตัวประมาณค่าไว้ที่ใดก็ได้ใน complex plane

เมื่อระบบมีเสถียรภาพ ค่าของ Y และ u จะมีค่าเป็นศูนย์

จะเห็นว่า เทอมของ $\dot{Y}$ ที่อยู่ในสมการที่ (29) ซึ่งเป็นสมการของตัวประมาณค่าสามารถกำจัดให้หายไปโดยการเปลี่ยนตัวแปร กำหนดให้

$$w = \hat{z} - LY \quad (31)$$

$$\dot{w} = \dot{\hat{z}} - LY$$

แทนค่าของสมการที่ (31) ลงในสมการที่ (29) จะได้

$$\dot{w} + L\dot{Y} = A_{22}(w + LY) + (A_{21}Y + B_2u) + L(\dot{Y} - A_{11}Y - B_1u - A_{12}(w + LY))$$

$$\dot{w} = (A_{22} - LA_{12})w + ((A_{22} - LA_{12})L + (A_{21} - A_{11}))Y + (B_2 - LB_1)u \quad (32)$$

$$\dot{w} = Fw + DY + Gu \quad (33)$$

เมื่อ $F = A_{22} - LA_{12}$, $D = FL + A_{21} - LA_{11}$, และ $G = B_2 - LB_1$

สมการที่ (29) และ (33) จะเรียกว่า "สมการของ reduced order estimator" เมื่อแทนค่าของสมการที่ (31) ลงในสมการที่ (26) จะได้

$$\hat{x} = PY + M\hat{z} = PY + M(w + LY)$$

$$\hat{x} = (P + ML)Y + Mw$$

หรือ

$$\hat{x} = NY + Mw \quad (34)$$

เมื่อ $N = P + ML$ สมการที่ (34) จะเรียกว่า สมการของ transformation

ตำแหน่งของโพลของ reduced order estimator หาได้จากรากของเมตริกซ์ $(A_{22} - LA_{12})$ หรือเมตริกซ์ F ดังนั้น ในการออกแบบตัวประมาณค่าควรจะให้ตำแหน่งของโพลของตัวประมาณค่าอยู่ใน left half plane (LHP) และอยู่ทางซ้ายมือของโพลของระบบลูปปิด เพื่อที่จะทำให้ตัวประมาณค่ามีผลตอบสนองเร็วกว่าระบบลูปปิด

ในการหาค่าอัตราขยายของเอสติเมเตอร์ คือ L เราจะใช้ คำสั่ง `lqr` ใน MATLAB โดยมีรูปแบบดังนี้

$$>> L = lqr(A_{22}', A_{12}', Q_0, R_0)$$

โดยที่ เมตริกซ์ A_{22} และ A_{12} คือ ส่วนหนึ่งของเมตริกซ์ A ซึ่งมีขนาด 2×2 Q_0 และ R_0 คือ weighting matrices การเลือก weight ทำได้โดยการ สุ่มหลายๆ ครั้ง ซึ่งในที่นี้จะใช้

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

และ

$$R_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้อัตราขยายของเอสติเมเตอร์ คือ

$$L = \begin{bmatrix} 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix}$$

รูปแบบของเอสติเมเตอร์ คือ

$$w^* = Fw + DY + Gu$$

$$w^* = \begin{bmatrix} -50.5223 & -4.7582 \\ 84.5628 & -42.7478 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -273.6635 & -451.9720 \\ 216.7534 & -1389.7420 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 42.5455 \\ -83.4225 \end{bmatrix} u$$

เมื่อโพลของเอสติเมเตอร์อยู่ที่ $-46.6350 \pm 19.6788j$ แสดงให้เห็นว่า โพลของเอสติเมเตอร์เร็วกว่าโพลของระบบ ดังนั้น จะทำให้เอสติเมเตอร์มี settling time เร็วกว่าระบบ

สมการของสเตทเอสติเมเตอร์จะได้

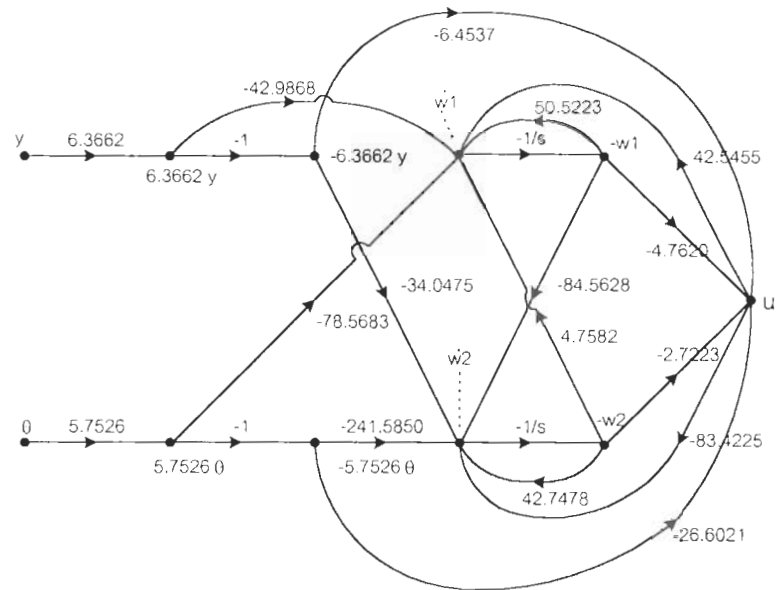
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w$$

เมื่อ $N = P + ML$

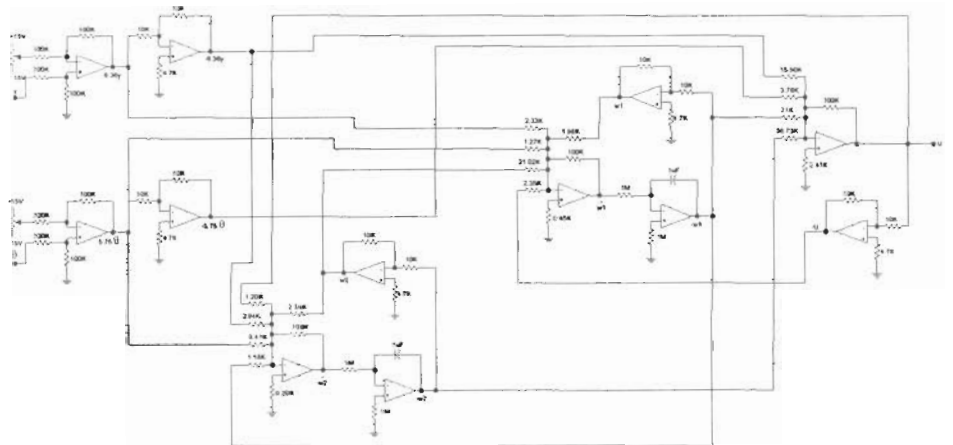
$$u = -K\hat{x} = -KNY - KMw$$

$$u = 41.0858y + 153.03150 + 4.7620w_1 + 2.7223w_2$$

signal flow graph ของตัวควบคุม จะแสดงไว้ในรูปที่ 6 ซึ่งได้เรา sensor gain K_y และ K_θ โดยจะต้องคูณกับ feedback gain ด้วย



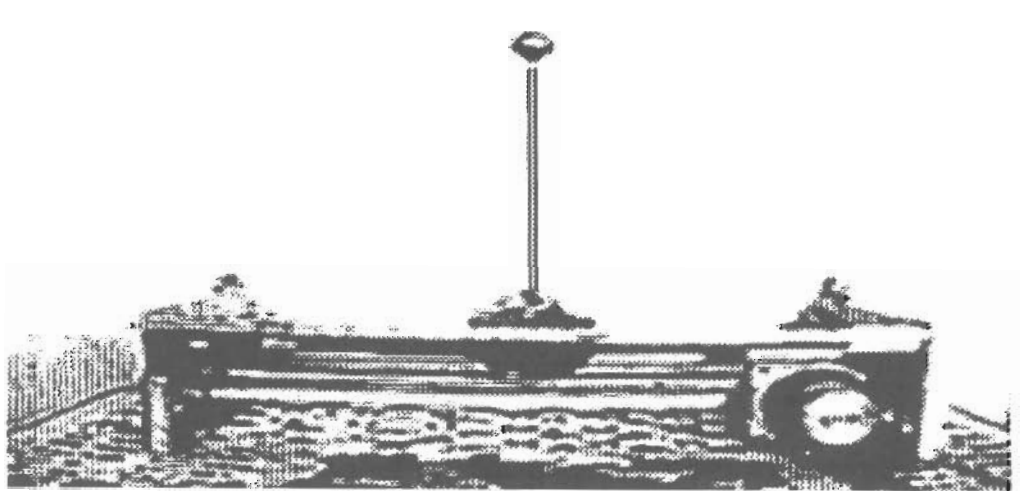
รูปที่ 6 Signal flow graph ของตัวควบคุมสำหรับควบคุมลูกตุ้มผกผัน



รูปที่ 7 วงจรของตัวควบคุมที่ใช้สำหรับควบคุมลูกตุ้มผกผัน

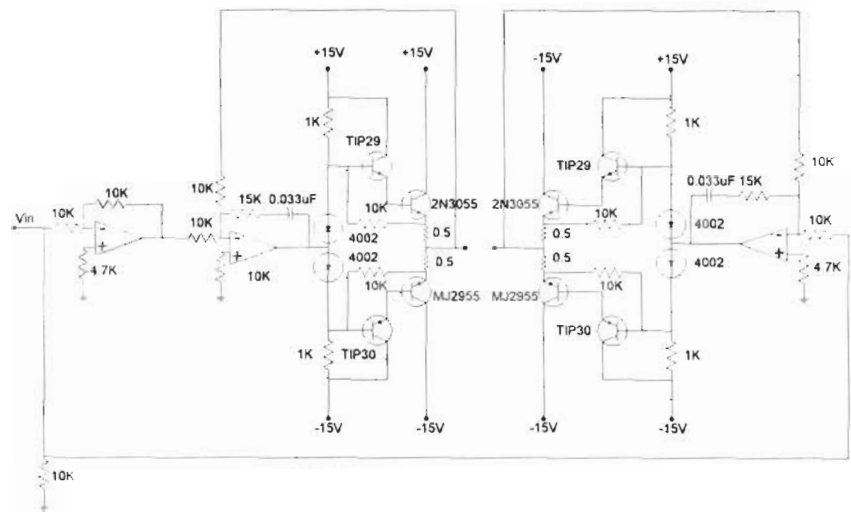
โครงสร้างของลูกตุ้มผกผัน

ตัวรถและรางจะประยุกต์ใช้ระบบการเคลื่อนที่ของหัวเข็มของเครื่องพิมพ์ที่ใช้สำหรับคอมพิวเตอร์เพราะมีระบบทางกลที่ดีโดยทำการเปลี่ยนมอเตอร์จากสเต็ปมอเตอร์ให้เป็นดีซีมอเตอร์ และสร้างลูกตุ้มพร้อมแกนติดเข้ากับตัวรถ จุดหมุนของแกนลูกตุ้มจะติดตั้ง potentiometer ที่แกนหมุน เพื่อใช้เป็นตัววัดตำแหน่งของแกนลูกตุ้ม ส่วนการวัดตำแหน่งของตัวรถใช้ potentiometer ติดที่แกนของมอเตอร์ที่ใช้ในการขับเคลื่อน โดยโครงสร้างของลูกตุ้มผกผันแสดงได้ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 แสดงโครงสร้างของลูกตุ้มผกผัน

การสร้างความควบคุมทำได้โดยต้องจรมตาม Signal flow graph ที่แสดงไว้ในรูปที่ 6 โดยแสดงในรูปบางส่วนของตัวควบคุมไว้ในรูปที่ 7 ส่วน วงจรขับเคลื่อนมอเตอร์ที่ใช้ขับเคลื่อนมอเตอร์เป็นแบบ H-bridge โดยใช้ transistor และมี local feedback โดยแสดงไว้ในรูปที่ 9



รูปที่ 9 แสดงวงจรขับเคลื่อนมอเตอร์

สรุป

ในการทดสอบได้ต่อวงจรควบคุมและวงจรขับเคลื่อนมอเตอร์ เข้ากับแบบจำลองลูกตุ้มผกผันที่สร้างขึ้น ผลปรากฏว่า เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำกับระบบ ตัวรถสามารถเลี้ยงไม่ให้ลูกตุ้มล้มได้ดีพอสมควร นั้นแสดงให้เห็นว่าการออกแบบทั้งหมัดสามารถควบคุมระบบได้ถึงแม้ถ้ามีแรงกระทำมากๆ ลูกตุ้มอาจจะล้มก็ตาม โดยส่วนมากแล้วตัวรถสามารถเลี้ยงลูกตุ้มได้ดีเมื่อมุมของแกนลูกตุ้มมีค่าน้อยกว่า 5° เหตุผลที่ทำให้ตัวรถไม่สามารถเลี้ยงลูกตุ้มได้เมื่อมีแรงกระทำมากๆ นั้น อาจมาจากหลายสาเหตุทั้งในทางด้านทฤษฎีและทางด้านปฏิบัติ โดยจะเห็นว่าระบบนี้เป็นระบบไม่เป็นเชิงเส้นเมื่อมุมของลูกตุ้มมีค่ามากกว่า 5° แต่ทำให้เป็นระบบเชิงเส้น ซึ่งโมเดลจะไม่ถูกต้องเมื่อมุมของแกนลูกตุ้มมีค่ามาก และไม่ได้อธิบายความเสียดทานที่เกิดขึ้นในทางปฏิบัติเลย แต่ในความเป็นจริงแล้วมีแรงเสียดทานเกิดขึ้นที่หลายจุดด้วยกัน ทั้งความเสียดทานระหว่างตัวรถกับราง เฟืองกับสายพาน เป็นต้น ซึ่งอาจก่อให้เกิดความผิดพลาดขึ้นได้

อย่างไรก็ตามวัตถุประสงค์หลักของบทความนี้ ไม่ได้อยู่ที่ว่าทำอะไรจะไม่ให้ลูกตุ้มล้ม แต่อยู่ที่เป็นการใช้ทฤษฎีการควบคุมมาทดลองควบคุมระบบ โดยบทความนี้ได้เสนอวิธีการควบคุมระบบที่มีอินพุตเดียวสองเอาต์พุต ตลอดจนวิธีการควบคุมทั้งทางทฤษฎีและปฏิบัติ ซึ่งระบบของลูกตุ้มผกผันเป็นระบบค่อนข้างมีความไวสูง (high sensitive) ซึ่งอาจจะยุ่งยากต่อการควบคุม อีกทั้งเป็นระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นผู้อ่านสามารถประยุกต์ใช้วิธีการในบทความนี้ใช้ในการควบคุม ระบบที่มีความซับซ้อนน้อยกว่านี้ได้ อีกทั้งเป็นพื้นฐานในการศึกษาการควบคุม ระบบที่ซับซ้อนมากกว่านี้ต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ ผศ.สถาพร อุดมสิน และอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ ทุกท่านที่ได้ให้คำปรึกษา และความรู้ในการทำงานวิจัย เป็นอย่างดี ตลอดจนขอขอบคุณเพื่อนๆ ที่ได้ช่วยเหลือ และให้กำลังใจ

เอกสารอ้างอิง

- [1] สถาพร อุดมสิน, "ระบบควบคุมเชิงเส้น", มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2534
- [2] สุธีธร เกียรติสุนทร, "พื้นฐานวิศวกรรมระบบควบคุมในกระบวนการอุตสาหกรรม", สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี(ไทย-ญี่ปุ่น), 2536
- [3] ชีรเดช โฆษณสันติ และ นิกร อัครสิทธิกิจ, "การควบคุมอินเวอร์เตอร์เฟดเพนดูลัม", มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2539
- [4] พงษ์พันธ์ คำใส และ ธงไทย โพธิราช, "การควบคุมตำแหน่งของดีซีมอเตอร์โดยใช้พีคอนโทรลเลอร์", วิทยาลัยภาคตะวันออกเฉียงเหนือ, 2540
- [5] วิบูลย์ ธรรมทินโน, พรพจน์ แดงท่าไม้ และ สุวลัย กลั่นความดี, "ตัวควบคุมแบบฟัซซี่ชนิดที่มีการปรับตัวสำหรับเพนดูลัมผกผัน", การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 20, 2540
- [6] Bahram Shahian and Michael Hassul, "**Control System Design Using Matlab**", Prentice-Hall International Inc, 1993.
- [7] Katsuhiko Ogata, "**Modern Control Engineering**", 3rd edition, Prentice-Hall International Inc, 1997
- [8] Chi-Tsong Chen, "**Analog and Digital Control System Design**", Saunders College Publishing, 1993.
- [9] Frank L. Lewis, "**Applied Optimal Control and Estimation**", Prentice-Hall International Inc, 1992
- [10] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, "**Modern Control Systems**", 7th, Addison-Wesley Publishing Company, 1995
- [11] D.G.Luenberger. "**Observing the State of a Linear System**". IEEE Trans.Mil>Electron., MIL-8 , pp.74-80,1964.