

การวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อน ดินโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ดร.วัชรินทร์ กาสลัก

อาจารย์

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

บทคัดย่อ

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกนำมาใช้ในงานทางวิศวกรรมศาสตร์หลายสาขา รวมทั้งงานทางวิศวกรรมปฐพีด้วย บทความนี้ได้สรุปถึงการนำวิธีนี้มาใช้ในการวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดิน แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์มีทั้งลักษณะของเนื้อดินไม่สม่ำเสมอ (non-homogeneity) และคุณสมบัติการไหลของน้ำในแต่ละทิศทางไม่เหมือนกัน (anisotropy) ซึ่งวิธีธรรมดาที่นิยมใช้ เช่น วิธีตาข่ายการไหล ไม่สามารถประยุกต์ใช้กับแบบจำลองลักษณะนี้ได้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ยังใช้ได้กับแบบจำลองที่มีขอบเขต (boundary) ซับซ้อนได้

นอกจากนี้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ยังช่วยให้ทราบค่าศักย์ (potential) และความลาดชันทางชลศาสตร์ (hydraulic gradient) ในทุกบริเวณของแบบจำลองอีกด้วย

Analysis of Seepage Through Earth Dams by Finite Element Method

Dr. Watcharin Gasaluck

Lecturer

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering Khon Kaen University

Abstract

The analysis of seepage problem through porous media by the use of Finite Element Method can overcome many shortcomings of the conventional Flow Net Method. The problems of anisotropy and non-homogeneity of the material as well as the complexity of boundary condition can be conveniently handled.

A procedure for determining values of the potential and the hydraulic gradient at any point in the media is presented.

บทนำ

ในการวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดินนั้น Braja M.Das[1] ได้สรุปวิธีที่นิยมใช้เนื่องจากไม่ซับซ้อนและสามารถคำนวณได้โดยใช้เครื่องคิดเลขขนาดเล็กซึ่งได้แก่ วิธีของ Dupuit, Schaffernak, Pavlovsky, Casagrande และวิธีตาข่ายการไหล (flow net) วิธีเหล่านี้สะดวกต่อการใช้แต่เป็นวิธีการประมาณที่ได้ผลไม่ละเอียด

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งถูกนำไปใช้ในหลายสาขาของงานทางวิศวกรรมศาสตร์ วิธีนี้ได้รับการพัฒนาขึ้นมาพร้อมกับความก้าวหน้าของอุปกรณ์คอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นอุปกรณ์สำคัญสำหรับการคำนวณ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำมาใช้ในงานทางวิศวกรรมปฐพี ในปี 1960 และได้รับความนิยมในการใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลของเหลวผ่านตัวกลาง เนื่องจากใช้ได้กับแบบจำลองที่มีขอบเขตลักษณะใดก็ได้ นอกจากนี้ยังใช้ได้

ดีในปัญหาที่ซับซ้อน เช่น ตัวกลางมีเนื้อไม่สม่ำเสมอ ตัวกลางที่มีคุณสมบัติไม่เหมือนกันในแต่ละทิศทาง หรือแม้แต่ตัวกลางที่มีคุณสมบัติทั้งเนื้อไม่สม่ำเสมอและไม่เหมือนกันในแต่ละทิศทาง มีนักวิจัยหลายคนเสนอผลงานเกี่ยวกับการวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านดินโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ บทความที่มักถูกใช้เป็นแนวทางของการวิจัยต่อมาก็คือ การวิเคราะห์ที่ใช้เทคนิคตาข่ายการไหลไม่คงที่ (variable mesh) ซึ่งเสนอโดย Liam Fin W.D.[2] ในปี 1967 และเป็นเทคนิคที่จะใช้ในบทความนี้ และการวิเคราะห์ที่ใช้เทคนิคตาข่ายการไหลคงที่ (constant mesh) ซึ่งเสนอโดย Bathe และ Khoshgoftaar[3] ในปี 1979

ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดิน

สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดินนั้น สรุปโดย Segerlind L.J.[4] ดังนี้

$$[K]\{\phi\} = \{F\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{e=1}^E (K^{(e)}) \\ &= \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \{F\} &= \sum_{e=1}^E (F^{(e)}) \\ &= \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T Q dV - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T q dS \right) \end{aligned} \quad (3)$$

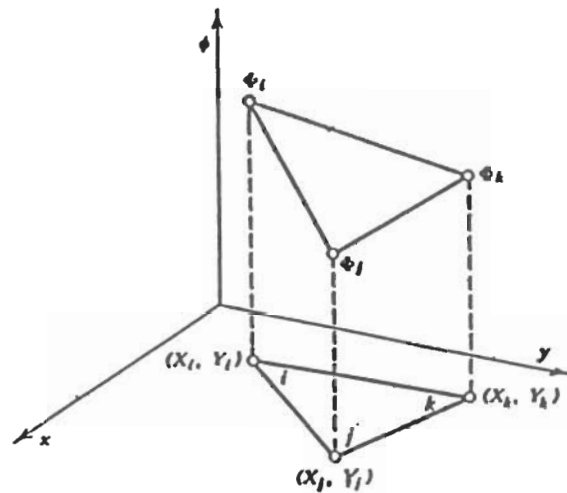
$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$N^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} & N_k^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

โดย ϕ คือ ค่าศักย์ที่จุดใดๆ ในตัวกลาง E คือ จำนวนของชิ้นส่วน

$N_i^{(e)}$ $N_j^{(e)}$ และ $N_k^{(e)}$ คือ ฟังก์ชันของรูปร่าง (shape function) ของชิ้นส่วนหมายเลข e ในกรณีของการไหลใน 2 มิติ นั้น ค่าฟังก์ชันหาได้โดยอาศัยรูปที่ 1



รูปที่ 1 การหาค่าฟังก์ชันของรูปร่าง

จุด i , j และ k ในรูปที่ 1 เป็นจุดที่มุมของชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีค่าศักย์เป็น ϕ_i , ϕ_j และ ϕ_k ตามลำดับ ค่าศักย์ของจุดใดๆ (x, y) ซึ่งอยู่ภายในชิ้นส่วนนี้มีค่าเป็น

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \quad (7)$$

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad \text{โดย} \quad \begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases} \quad (8)$$



12992

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad \text{โดย} \quad \begin{cases} a_j = X_k Y_i - Y_k X_i \\ b_j = Y_k - Y_i \\ c_j = X_i - X_k \end{cases} \quad (9)$$

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad \text{โดย} \quad \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k = Y_i - Y_j \\ c_k = X_j - X_i \end{cases} \quad (10)$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} \quad (11)$$

เมื่อ Q และ q ในสมการที่ (3) คือ อัตราการไหลของน้ำเข้าสู่ชั้นส่วนและอัตราการไหลของน้ำออกโดยผ่านขอบเขตของชั้นส่วนตามลำดับ

ในขณะที่ k_k และ k_y ในสมการที่ (5) คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการซึมผ่านได้ของน้ำในดิน (coefficient of permeability) ในแนวราบและแนวดิ่งตามลำดับ

จากสมการที่ (2) ถึง (11) จะได้

$$[K^{(e)}] = \frac{k_x}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j b_j & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j c_j & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix} \quad (12)$$

และ

$$\{F^{(e)}\} = \frac{QA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - q \frac{\zeta_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

โดยที่ ζ_{ij} คือ ความยาวของด้านของชั้นส่วนรูปสามเหลี่ยม ซึ่งน้ำไหลออกผ่านด้านนี้ และเป็นด้านที่อยู่ระหว่างจุด i และ j ในกรณีของน้ำไหลผ่านเขื่อนดินนั้น สมการที่ (13) จะมีค่าเป็นศูนย์

จากเงื่อนไขของขอบเขตของน้ำไหลผ่านเขื่อนดินนั้น ค่าศักย์มีค่าดังแสดงในสมการที่ (14) ถึง (18) (Desai[5]) ซึ่งความหมายของตัวแปรในสมการเหล่านี้ได้จากรูปที่ 2

$\phi = D$ บนแนว 1-2 (14)

$\phi = h$ บนแนว 2-3 (15)

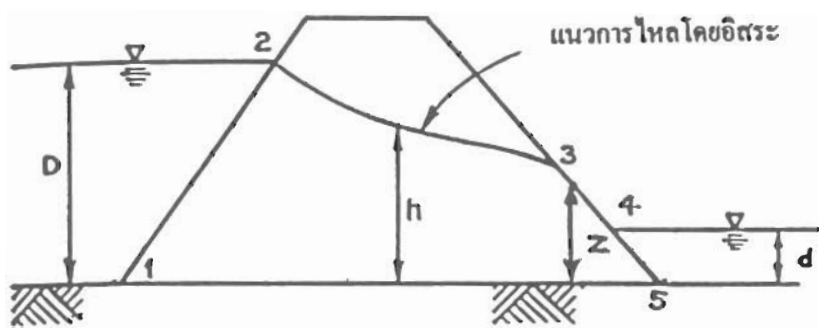
$\phi = Z$ บนแนว 3-4 (16)

$\phi = d$ บนแนว 4-5 (17)

และ

$\frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0$ บนแนว 1-5 (18)

แนวการไหลโดยอิสระ



รูปที่ 2 เงื่อนไขของขอบเขต

สมการที่ (14) (16) และ (17) เป็นข้อมูลที่ต้องป้อนให้กับโปรแกรมและจะเป็นค่าคงที่ตลอดการคำนวณ สมการที่ (15) และ (18) เป็นเงื่อนไขที่ใช้ในการคำนวณหาตำแหน่งของแนวการไหลโดยอิสระ (free surface) ในทางปฏิบัตินั้นจะใช้ค่า $\partial \phi / \partial Z$ ที่มีค่าใกล้เคียงศูนย์ แทนที่จะใช้ค่าศูนย์ทั้งนี้เพื่อประหยัดเวลาในการคำนวณของคอมพิวเตอร์ (CPU Time)

ขั้นตอนการคำนวณ โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดิน กระทำดังนี้

1. อ่านข้อมูลซึ่งได้แก่ หมายเลขและค่าพิกัดของจุด (node) หมายเลขของชั้นส่วนประสมของดินสำหรับแต่ละชั้นส่วน ค่าสัมประสิทธิ์ของการซึมผ่านได้ของดินแต่ละประเภท ค่า $\partial\phi/\partial Z$ ที่ยอมรับสำหรับค่าพิกัดของจุดบนแนวการไหลอิสระนั้น ใช้วิธีประมาณค่า
2. สร้างแมทริกซ์ตามสมการที่ (1) แล้วแก้สมการหาค่า $\{\phi\}$
3. ตรวจสอบจุดบนแนวการไหลอิสระว่าเป็นไปตามเงื่อนไขในสมการที่ (15) และ (18) หรือไม่ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไข โปรแกรมจะปรับตำแหน่งของจุดนั้นใหม่ แล้วย้อนไปทำตามข้อ 2 อีกครั้ง ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไขจึงทำตามข้อ 4
4. แสดงผลการคำนวณ ซึ่งได้แก่ ค่าพิกัดและค่าศักย์ของทุกจุด
5. หากต้องการหาอัตราการไหลของน้ำผ่านเขื่อนดิน สามารถใช้สมการต่อไปนี้

$$v_x^{(e)} = k_x \frac{\partial\phi}{\partial x} = k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (19)$$

$$v_y^{(e)} = k_y \frac{\partial\phi}{\partial y} = k_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} + 1 \right) \quad (20)$$

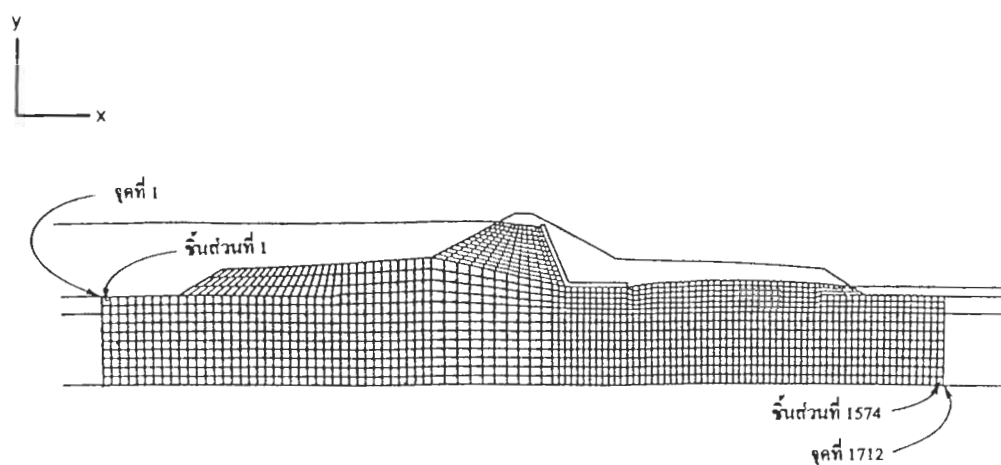
$$q_x^{(e)} = v_x^{(e)} L_y^{(e)} \quad (21)$$

$$q_y^{(e)} = v_y^{(e)} L_x^{(e)} \quad (22)$$

โดย $v_x^{(e)}$ และ $v_y^{(e)}$ เป็นความเร็วของการไหลในชั้นส่วน e ในทิศทางราบและตั้งตามลำดับ $q_x^{(e)}$ และ $q_y^{(e)}$ เป็นอัตราการไหลในชั้นส่วน e ในทิศทางราบและตั้งตามลำดับ

ตัวอย่างการวิเคราะห์

แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์ แสดงในรูปที่ 3 ซึ่งเป็นเขื่อนดิน มีดินที่น้ำซึมผ่านได้ 2 ชนิด ดินแต่ละชนิดมีค่า k_x และ k_y ไม่เท่ากัน ดังแสดงในตารางที่ 1 แบบจำลองถูกแบ่งออกเป็น 1712 จุด และ 1574 ชั้นส่วน ดังแสดงในรูปที่ 4

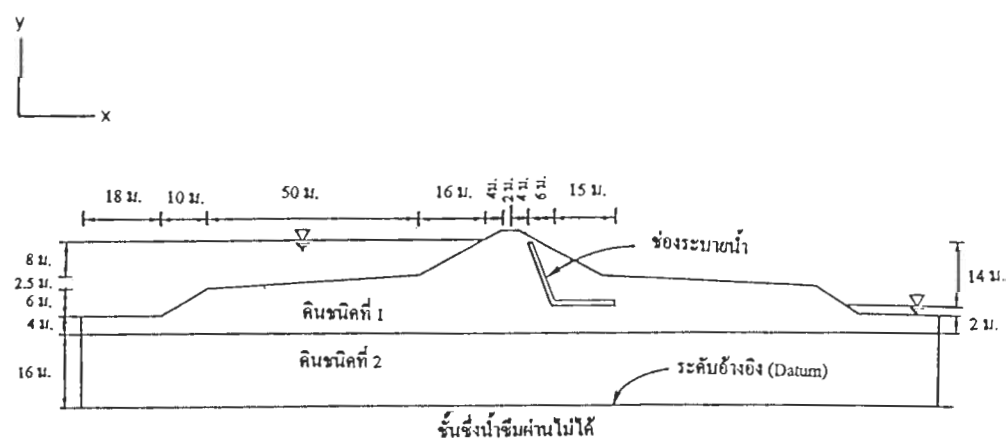


รูปที่ 3 แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์

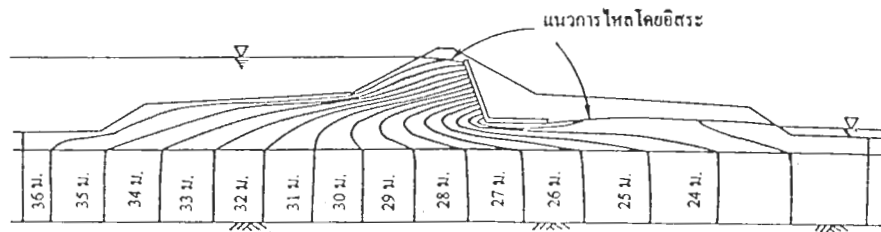
ตารางที่ 1

คุณสมบัติของดินในแบบจำลองตามรูปที่ 3

ชนิดของดิน	k_x , ม./วัน	k_y , ม./วัน	k_x / k_y
1	1.093×10^{-2}	2.189×10^{-4}	49.93
2	1.978×10^{-2}	8.029×10^{-3}	2.46



รูปที่ 4 หมายเลขของจุดและชั้นส่วนในแบบจำลอง



รูปที่ 5 เส้นสมศักย์ (equipotential line) ที่ได้จากกราฟวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ข้อมูลที่ป้อนให้มัน ชั้นส่วนจะมีรูปร่างเป็นรูปสี่เหลี่ยมทั้งนี้เพื่อลดจำนวนข้อมูลที่ป้อนให้แก่โปรแกรม แต่ในขั้นตอนของการคำนวณโปรแกรมจะเปลี่ยนชั้นส่วนสี่เหลี่ยม 1 ชั้นส่วนไปเป็นชั้นส่วนสามเหลี่ยม 4 ชั้นส่วน โดยเพิ่มจุดเข้าไปที่กึ่งกลางของรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งค่าพิกัดของจุดนี้เป็นค่าเฉลี่ยของค่าพิกัดที่มุมทั้งสี่ของชั้นส่วนรูปสี่เหลี่ยมนั้น

จากผลการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์ซึ่งได้ค่าศักย์ของแต่ละจุดในแบบจำลอง สามารถนำมาเขียนเส้นสมศักย์ (equipotential line) ได้ดังแสดงในรูปที่ 5 ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าแนวการไหลโดยอิสระจากจุดที่น้ำซึมเข้าสู่ตัวเขื่อน จนถึงช่องระบายน้ำนั้นอยู่สูง เนื่องจากดินชนิดที่ 1 มีค่า k_y น้อยมากเมื่อเทียบกับ k_x จึงทำให้น้ำไหลในแนวราบเป็นส่วนใหญ่ แนวการไหลโดยอิสระจึงไม่ลดต่ำลง ในดินชนิดที่ 2 นั้น เกือบจะเป็นเส้นตรงในแนวตั้ง ซึ่งแสดงว่ามีการไหลน้อยมาก ทั้งนี้เนื่องจากน้ำไหลผ่านดินชนิดที่ 1 ในแนวตั้งลงมาสู่ดินชนิดที่ 2 ได้น้อย

โดยการรวมอัตราการไหลของน้ำในชั้นส่วน ซึ่งเรียงตัวในแนวตั้ง ได้แนวการไหลโดยอิสระ ได้ค่าอัตราการไหลซึมผ่านเขื่อนดินของน้ำได้แนวการไหลก่อนช่องระบายน้ำ และหลังช่องระบายน้ำเป็น 6.50×10^{-2} และ 2.26×10^{-2} ลบ.ม./วัน/ความยาว 1 เมตรของเขื่อน ตามลำดับ ดังนั้นจึงทราบว่าน้ำถูกระบายออกจากช่องระบายน้ำ 4.24×10^{-2} ลบ.ม./วัน/ความยาว 1 เมตรของเขื่อน

สรุป

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถใช้ได้ดีกับการวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดิน ข้อดีของวิธีนี้คือ สามารถใช้ได้กับปัญหาที่ซับซ้อน ดังเช่นตัวอย่างที่ใช้วิเคราะห์ในบทความนี้มีลักษณะทั้งไม่เป็นเนื้อเดียวกัน k_x และ k_y ของดินแต่ละชนิดไม่เท่ากัน นอกจากนี้อัตราส่วน k_x / k_y ของดิน 2 ชนิดก็ไม่เท่ากันด้วย ซึ่งเป็นไปได้ยากที่จะใช้วิธีตาข่ายการไหลวิเคราะห์ปัญหานี้ ทั้งนี้เพราะวิธีตาข่ายการไหลต้องปรับขนาดตามแกนราบของแบบจำลอง (แกน x) โดยใช้สมการที่ (23) ดังนี้

$$x' = \left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{1/2} x \quad (23)$$

โดย x' เป็นขนาดที่ปรับแล้ว และ x เป็นขนาดที่แท้จริงของแบบจำลอง ดังนั้น ถ้าดิน 2 ชนิดมีค่า k_y / k_x ไม่เท่ากันจะทำให้ขนาดที่ปรับแล้วไม่เท่ากัน กล่าวคือ จาก $x = 200$ เมตร จะต้องปรับเป็น 28.30 เมตร และ 127.42 เมตร สำหรับดินชนิดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ทำให้ขอบเขตของแบบจำลองสำหรับดิน 2 ชนิดไม่ต่อเนื่องกัน และการเขียนตาข่ายการไหลจะยุ่งยากมาก

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ยังช่วยให้ทราบค่าศักย์ที่จุดต่างๆ ในเขื่อนดิน ทำให้สามารถคำนวณหาค่าความลาดชันทางชลศาสตร์ระหว่างจุดเหล่านั้นด้วย ซึ่งเป็นประโยชน์ในการตรวจสอบความปลอดภัยของตัวเขื่อนต่อไป

เอกสารอ้างอิง

1. Braja M. Das : **Advanced Soil Mechanics**, Hemisphere Publishing Corporation, USA, Chapter 2, 1983.
2. Liam Fin W.D. : **Finite Element Analysis of Seepage Through Dams**, J. of Soil Mechanics and Foundations Division SM6, pp.41-48, November 1967.

3. Bathe K.J. and Khoshgoftaar M.R. : ***Finite Element Free Surface Seepage Analysis Without Mesh Iteration***, Int.J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.3, pp.13-22, 1979.
4. Segerlind L.J.: ***Applied Finite Element Analysis***, Second Edition, John Wiley and Sons, USA, Chapter 5 to 10, 1984.
5. Chandrakant S. Desai : ***Numerical Method in Geotechnical Engineering***, McGraw-Hill, Inc., USA, Chapter 14, 1977.