

เงื่อนไขขอบเขตทันทานสูง สำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ *

บุญชัย เลิศนุวัฒน์¹⁾

¹⁾อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Email : Boonchai.L@Chula.ac.th

บทคัดย่อ

วิธีการตั้งเงื่อนไขขอบเขตของความดัน สำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้บนขอบเขตทางเข้าและออกของการไหลได้ถูกนำเสนอในบทความนี้ วิธีการที่นำเสนอนี้ให้เงื่อนไขขอบเขตที่มีความทันทานสูง เนื่องจากการตั้งเงื่อนไขที่เลียนแบบความเป็นจริง ผลการคำนวณเชิงเลขได้แสดงให้เห็นว่า วิธีการนี้ช่วยให้การคำนวณหาคำตอบเชิงเลขลู่ออกได้ ในขณะที่วิธีการปกติไม่สามารถทำได้ แม้ว่าจะยังคงมีความไม่ต่อเนื่องหลงเหลืออยู่ในคำตอบสุดท้าย ที่สภาวะเสถียรก็ตาม แต่ก็เป็นปริมาณที่น้อยมากจนไม่อาจก่อให้เกิดการรบกวนต่อสนามการไหลโดยรวมได้

คำสำคัญ : การไหลแบบอัดตัวไม่ได้, เงื่อนไขขอบเขต, พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ

* รับต้นฉบับเมื่อวันที่ 7 เมษายน 2548 และได้รับบทความฉบับแก้ไขเมื่อวันที่ 7 กรกฎาคม 2548

Highly Robust Boundary Condition for Incompressible Flow^{*}

Boonchai Lertnuwat¹⁾

¹⁾Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University

Email : Boonchai.L@Chula.ac.th

ABSTRACT

The method for posing boundary condition of pressure for incompressible flow on inlet and outlet boundary is presented. This method gives highly robust boundary condition since it is derived by imitating reality. Computational results show that the presented method can help computational algorithm to converge while the conventional method cannot. Discontinuity is still left in the steady-state result but not much enough to disturb all whole flow filed.

Keywords : Incompressible Flow, Boundary condition, Computational Fluid Dynamics (CFD)

^{*} Original manuscript submitted: April 7, 2005 and Final manuscript received: July 7, 2005

บทนำ

จนถึงปัจจุบัน การคำนวณเชิงเลขมีบทบาทสูงในงานวิจัยทางด้านจลศาสตร์ของไหลซึ่งมีความซับซ้อนสูง อันเนื่องมาจากตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง และมีผลต่อสภาวะการไหลมีจำนวนมาก (high degree of freedom) ด้วยเหตุนี้จึงมีการพัฒนาระบบวิธีการคำนวณเชิงเลขที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้นมาอย่างต่อเนื่อง อย่างไรก็ตามการคำนวณเชิงเลขไม่ว่าจะใช้เทคนิคใดก็ตาม การตัดโดเมนคำนวณให้อยู่ในขอบเขตจำกัดยังคงเป็นสิ่งจำเป็น เพื่อลดระยะเวลาคำนวณ และปริมาณหน่วยความจำที่จะต้องใช้ในเครื่องช่วยคำนวณ เนื่องจากการตัดขอบเขตโดเมนการคำนวณนั้น เป็นการนำเอาบริเวณที่สนใจออกจากสิ่งแวดล้อม จึงจำเป็นต้องมีการจัดการกับตัวแปรต่างๆ บนขอบเขตให้เหมาะสม หรือที่เรียกว่าการตั้งเงื่อนไขขอบเขต (posing boundary condition)

การไหลแบบอัดตัวไม่ได้ เป็นรูปแบบการไหลที่พบได้บ่อยและยังคงเป็นหัวข้อสำคัญที่มีการวิจัย และนำไปประยุกต์ใช้งานอย่างต่อเนื่อง การไหลแบบนี้จัดอยู่ในการไหลแบบ subsonic เนื่องจากความเร็วเสียงในของไหลมีค่าสูงเป็นอนันต์ $dp/d\rho = \infty$ เนื่องจากลักษณะของการไหลที่ความหนาแน่นของของไหลจะไม่มีเปลี่ยนแปลง ทำให้การไหลมีลักษณะเฉพาะตัว และการตั้งเงื่อนไขขอบเขตก็มีลักษณะที่พิเศษออกไป แม้ว่าจะมีการพัฒนาวิธีการตั้งเงื่อนไขขอบเขตมาโดยตลอด เช่น การวิเคราะห์ลักษณะทางคณิตศาสตร์ของสมการการไหล (J. D. Anderson, Jr, 1995) เพื่อช่วยระบุถึงตัวแปรที่ควรกำกับตามขอบเขตชนิดต่างๆ แต่ปัญหาในการตั้งเงื่อนไขขอบเขตด้วยวิธีนี้ยังมิอยู่ในแง่ของโจทย์ปัญหาทางกายภาพ ซึ่งมีความแตกต่างจากทางคณิตศาสตร์ มีผลให้เกิดการสะท้อนกลับของคลื่นกระแทกจากขอบเขตเข้าสู่โดเมนคำนวณได้ เป็นเหตุให้เงื่อนไขขอบเขตแบบไม่สะท้อนกลับ (nonreflecting boundary) เป็นหัวข้อที่สำคัญขึ้นมา เช่น การใช้ convective boundary condition (R. W. Johnson, 1998) อย่างไรก็ตามวิธีนี้ใช้ได้กับการตั้งเงื่อนไขขอบเขตสำหรับค่าความเร็วของกระแสการไหล เพียงเท่านั้น แต่ไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับความดันซึ่งเป็นตัวแปรสำคัญในการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ Rudy (D. H. Rudy and J. C. Strikwerda, 1980) เสนอวิธีการจัดการกับขอบเขตสำหรับ subsonic flow แต่เนื่องจากวิธีการนี้ใช้สำหรับการไหลแบบอัดตัวได้จึงมีค่าความเร็วเสียงในการไหลเข้ามาเกี่ยวข้อง ทำให้ไม่สามารถใช้ได้กับโจทย์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ ที่มีค่าความเร็วเสียงเป็นอนันต์ ในขณะที่ Atassi (O. V. Atassi, 2004) เสนอวิธีการจัดการที่ต้องใช้ Fourier-Bessel function เข้ามาช่วย ซึ่งมีผลทำให้กระบวนการจัดการกับเงื่อนไขขอบเขตซับซ้อนยิ่งขึ้น

ในงานชิ้นนี้วัตถุประสงค์เน้นไปที่ การตั้งเงื่อนไขขอบเขตสำหรับค่าความดันสำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้โดยใช้วิธีที่เป็นสามัญที่สุด เพื่อค่าตัวแปรที่อยู่บนขอบเขตมีลักษณะการกระจายตัวใกล้เคียงกับความเป็นจริงให้มากที่สุด โดยอาศัย mass flowrate (ซึ่งเป็นพารามิเตอร์สำคัญของการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ เนื่องจาก mass flowrate จะมีค่าคงที่บนหน้าตัดของการไหลตลอดสนามการไหล) เป็นตัวกำกับการตั้งเงื่อนไขขอบเขตทั้งทางเข้าและทางออกของสนามการไหล

การตั้งชื่อ (Nomenclature)

ตัวอักษร

$\dot{m}$	mass flowrate
p	ความดัน
u	ความเร็วการไหลในแนวแกน x
v	ความเร็วการไหลในแนวแกน y
t	เวลา
x	ตำแหน่งในแนวแกน x
y	ตำแหน่งในแนวแกน y
ν	ความหนืด dynamic
ρ	ความหนาแน่น

ตัวยกและตัวห้อย

e, w, n, s	ตำแหน่งกึ่งกลางบน cell face ของ control volume ทางด้านตะวันออก, ตะวันตก, เหนือ และใต้ ตามลำดับ
E, W, N, S	ตำแหน่งกึ่งกลางของ control volume รอบข้างของ control volume ที่ถูกพิจารณา ทางด้านตะวันออก, ตะวันตก, เหนือ และใต้ ตามลำดับ
P	ตำแหน่งกึ่งกลางของ control volume ที่ถูกพิจารณา

ทฤษฎี

1. การไหลแบบอัดตัวไม่ได้และลักษณะจำเพาะ

การไหลแบบอัดตัวไม่ได้ใน 2 มิติบนแกนอ้างอิงแบบ Cartesian ในกรณีที่ไม่พิจารณาแรงน้ำหนัก (body force) มีสมการกำกับเป็นดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + vics_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + vics_y \quad (3)$$

เมื่อ $vics_x = \nu \nabla^2 u$ และ $vics_y = \nu \nabla^2 v$

การพิจารณาลักษณะจำเพาะทางคณิตศาสตร์ของชุดสมการกำกับกับการไหลโดยทั่วไปนั้น นิยมใช้การพิจารณาค่า Eigen value ของระบบสมการโดยละพจน์ที่เกี่ยวข้องกับความหนืดไว้ อย่างไรก็ตาม

ในกรณีชุดสมการกำกับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (1)-(3) จำเป็นต้องพิจารณาสมการที่ (1) เป็นพิเศษ โดยเราจะพบว่าเมื่อ $\partial(1)/\partial t$, $\partial(2)/\partial x$ และ $\partial(3)/\partial y$ เราจะได้สมการชุดใหม่เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (6)$$

แทนค่า (5) และ (6) ลงใน (4)

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (7)$$

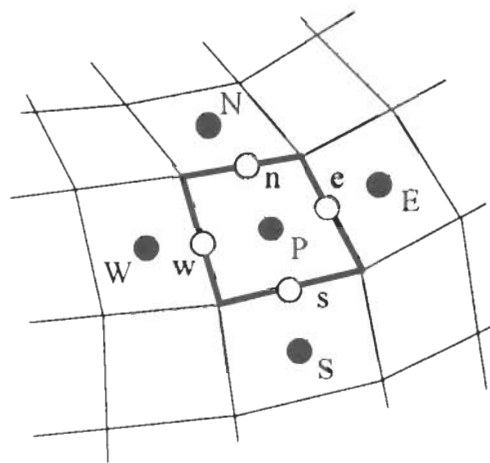
ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (1) เป็นสมการ Elliptic บนตัวแปรความดัน p

สำหรับสมการ (2) และ (3) การพิจารณา Eigen value เป็นไปได้ตามวิธีปกติ โดยจะได้ Eigen value ของ 2 สมการนี้เป็น $\lambda_x = u$ เพียงค่าเดียวเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น x และ t (ในทำนองเดียวกัน $\lambda_y = v$ เพียงค่าเดียวเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น y และ t) ซึ่งเป็น การระบุว่าสมการที่ (2) และ (3) เป็นระบบสมการแบบ Parabolic

2. เปรียบวิธีทางเชิงเลข

โดยทั่วไปการจัดการกับชุดสมการกำกับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้แบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่คือ

1. Artificial compressibility method
2. Pressure (projection/correction) method



รูปที่ 1 รายละเอียดตำแหน่งที่สำคัญ ของ control volume ประกอบการใช้สมการที่ (8) และ (9) โดย เส้นหนาแสดง control volume ที่ถูกพิจารณา

เนื่องจากวิธีที่ 2 จะเป็นที่ยอมรับมากกว่าโดยมีข้อได้เปรียบอยู่หลายด้าน (C. Kiris and D. Kwak, 2002) ในบทความนี้ numerical algorithm ที่เลือกใช้คือ SIMPLE algorithm ซึ่งจัดอยู่ในกลุ่ม Pressure projection method และได้ทำการปรับสมการบางสมการเพื่อให้มีเสถียรภาพการคำนวณสูงขึ้น โดยมีสมการที่สำคัญเป็นดังนี้ (J. H. Ferziger and M. Peric, 2002) (ดูรูปที่ 1 ประกอบสมการ)

Pressure correcting equations:

$$A_p^p p_p + \sum_l A_l^p p_l = -\Delta \dot{m}_p^* - \Delta \dot{m}_p' \quad (8)$$

โดยที่

$$A_p^p = -\sum_l A_l^p, \quad l = E, W, N, S \quad (8.1)$$

$$A_E^p = -(\rho S^2 / A_p'')_e \quad (8.2)$$

$$A_W^p = -(\rho S^2 / A_p'')_w \quad (8.3)$$

$$A_N^p = -(\rho S^2 / A_p'')_n \quad (8.4)$$

$$A_S^p = -(\rho S^2 / A_p'')_s \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{m}_p^* &= (\rho S u^*)_e - (\rho S u^*)_w \\ &\quad + (\rho S v^*)_n - (\rho S v^*)_s \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{m}_p' &= (\rho S \tilde{u}^*)_e - (\rho S \tilde{u}^*)_w \\ &\quad + (\rho S \tilde{v}^*)_n - (\rho S \tilde{v}^*)_s \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$u_e^* = \tilde{u}_e^* - (S_e / A_p'')(p_E - p_p) \quad (8.8)$$

$$u_w^* = \tilde{u}_w^* - (S_w / A_p'')(p_p - p_W) \quad (8.9)$$

$$u_n^* = \tilde{u}_n^* - (S_n / A_p'')(p_N - p_p) \quad (8.10)$$

$$u_s^* = \tilde{u}_s^* - (S_s / A_p'')(p_p - p_S) \quad (8.11)$$

Momentum equations:

$$A_p'' u_p + \sum_l A_l'' u_l = Q_p'' \quad (9)$$

โดยที่

$$A_p'' = A_p' - \sum_l A_l'', \quad l = E, W, N, S \quad (9.1)$$

$$A_E'' = \min(\dot{m}_e'', 0) - \mu_e S_e / (x_E - x_p) \quad (9.2)$$

$$A_W'' = \min(\dot{m}_w'', 0) - \mu_w S_w / (x_p - x_W) \quad (9.3)$$

$$A_N'' = \min(\dot{m}_n'', 0) - \mu_n S_n / (x_N - x_p) \quad (9.4)$$

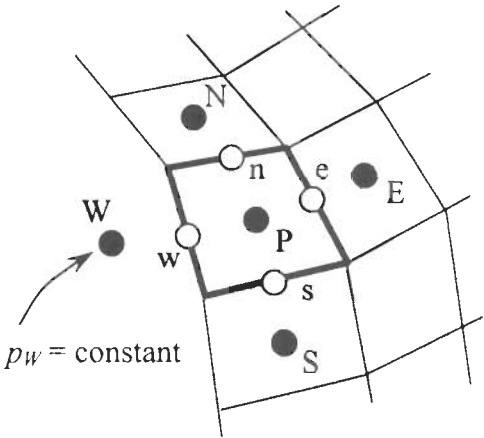
$$A_S'' = \min(\dot{m}_s'', 0) - \mu_s S_s / (x_p - x_S) \quad (9.5)$$

ชุดสมการที่ (9) เป็น momentum equations บนแกน x ซึ่งมีการปรับปรุงสมการเพื่อให้มีเสถียรภาพสูงขึ้นด้วยการใช้ Upwind scheme ในกรณีสมการ momentum บนแกน y ก็จะมีรูปแบบคล้ายคลึงกัน

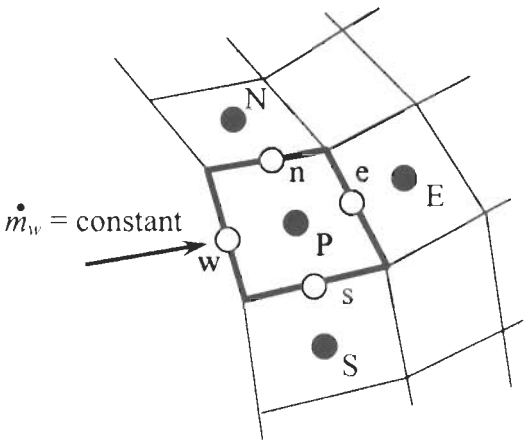
รายละเอียดของชุดสมการที่ (8) และ (9) จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ ผู้ที่สนใจสามารถติดตามเพิ่มเติมได้จาก เอกสารอ้างอิง (J. H. Ferziger and M. Peric, 2002)

3. เงื่อนไขขอบเขตบนทางสูง

ในเรื่องของการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของ ชุดสมการ (8)-(9) นั้น เนื่องจากชุดสมการคู่นี้ถูกปรับมาจากชุดสมการ (1)-(3) เป็นการผสมกันระหว่างสมการ Elliptic (บนตัวแปร p) และ Parabolic (บนตัวแปร u และ v) ตามกฎแล้วตัวแปร p จะถูกกำหนดตายตัวบนทุกๆ ขอบเขต ในขณะที่ตัวแปร u และ v จะถูกกำหนดตายตัวบนขอบเขตที่มีลักษณะเป็น การไหลเข้าสู่โดเมนการคำนวณ (inlet boundary) และปล่อยลอยตัว (float) บนขอบเขตที่มีการไหลออกจากโดเมนการคำนวณ (outlet boundary) (J. D. Anderson, Jr, 1995)



รูปที่ 2 การตั้งเงื่อนไขบนขอบเขตโดยการกำหนดค่าความดัน



รูปที่ 3 การตั้งเงื่อนไขบนขอบเขตโดยการกำหนดค่า mass flowrate

แม้ว่าโดยทางทฤษฎีการตั้งเงื่อนไขขอบเขตจะกล่าวไว้โดยชัดเจนแล้วก็ตาม แต่จากการทดลองการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับชุดสมการ (8)-(9) นี้ ในกรณีของตัวแปร u และ v นั้นเป็นไปได้

ได้ตามปกติ แต่การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับตัวแปร p นั้นเนื่องจากมีความตึงเครียดมาก (ต้องกำหนดค่าบนขอบเขตทุกค่า) ยังผลให้เกิดปัญหาตามมาหลายประการ ได้แก่ การกระจายตัวของความดัน p บนขอบเขตที่ไม่สามารถคาดเดาได้ในตอนต้นของการคำนวณ รวมทั้งปัญหา shock wave ที่สะท้อนกลับมาจากขอบเขตที่มีการกำหนดค่าความดันไว้อย่างไม่ยืดหยุ่น เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงเงื่อนไขขอบเขต (สำหรับความดัน) ที่ไม่ยืดหยุ่น ความดันจะไม่ถูกกำหนดบนขอบเขตโดยตรงหากแต่เป็น mass flowrate ที่จะเป็นตัวที่ถูกกำหนดแทน โดยมีรายละเอียดเปรียบเทียบแสดงได้โดยตัวอย่างดังนี้

พิจารณารูปที่ 2 เมื่อ cell face ทางด้านตะวันตกเป็นขอบเขตการคำนวณ หากจำเป็นต้องกำหนดค่าความดันตายตัวที่ขอบเขตทางด้านนี้สมการที่ (8) จะเปลี่ยนรูปลงมาเป็น

$$A_p^p p_p + \sum_k A_k^p p_k = -\Delta \dot{m}_p' - \Delta \dot{m}_p' - A_w^p p_w \quad (10)$$

โดยที่ $k = E, N, S$

ในอีกทางหนึ่งหากเราต้องการกำหนด mass flowrate บน cell face ทางด้านตะวันตกแทนการกำหนดความดัน ตามรูปที่ 3 สมการที่ (8) จะปรับรูปลงมาเป็น

$$A_{pp}^p p_p + \sum_i A_i^p p_i = -\Delta \dot{m}_p' - \Delta \dot{m}_p' + A_w^p (p_p - p_w) \quad (11)$$

โดยที่

$$A_{pp}^p = -\sum_i A_i^p, \quad j = E, N, S \quad (11.1)$$

จากสมการที่ (8.3) และ (8.9) เราสามารถปรับให้พจน์สุดท้ายของสมการที่ (11) ให้ลงมาอยู่ในรูป mass flowrate ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A_w^p (p_p - p_w) &= -(\rho S^2 / A_p'')_w (p_p - p_w) \\ &= -(\rho S)_w (S / A_p'')_w (p_p - p_w) \\ &= (\rho S)_w [\tilde{u}_w' - (S / A_p'')_w (p_p - p_w) - \tilde{u}_w'] \\ &= (\rho S)_w [u_w' - \tilde{u}_w'] \\ &= \dot{m}_w' - \dot{m}_w' \end{aligned} \quad (12)$$

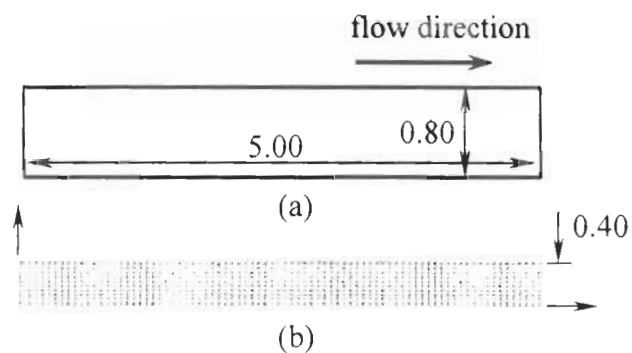
ดังนั้นสมการที่ (11) จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$A_{pp}^p p_p + \sum_i A_i^p p_i = -\Delta \dot{m}_p' - \Delta \dot{m}_p' + \dot{m}_w' - \dot{m}_w' \quad (13)$$

อย่างไรก็ดีเนื่องจากสมการที่ (13) เป็นสมการสำหรับคำนวณค่าความดัน p ที่กระจายตัวอยู่ในสนามการไหล จึงมีความจำเป็นต้องกำหนดค่าความดันอ้างอิงไว้ที่ๆ จุดๆ หนึ่ง ในสนามการไหล โดยความดันที่จุดนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง (หรือเปลี่ยนแปลงได้แต่ต้องทราบถึงการเปลี่ยนแปลงนั้นตลอดเวลา) มิฉะนั้นแล้วค่าความดันจะไม่สามารถเข้าสู่คำตอบได้ แต่จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงไปเรื่อยๆ กันทั่วทั้งสนามการไหล

คอมพิวเตอร์โปรแกรม

คอมพิวเตอร์โปรแกรมที่ใช้ในการศึกษาถูกการประยุกต์จากงานของ J. H. Ferziger and M. Peric (2002) ซึ่งใช้หลักการในการคำนวณเชิงตัวเลขแบบ SIMPLE algorithm บน Collocated grid system และเพื่อทดสอบความสามารถในการคำนวณของโปรแกรมก่อนนำไปใช้ในการศึกษา โปรแกรมตัวนี้จึงถูกนำมาคำนวณการไหลแบบ Poiseuille flow ซึ่งเป็นรูปแบบการไหลอย่างง่ายและมี close-form solution ที่ใช้ตรวจสอบความถูกต้องได้



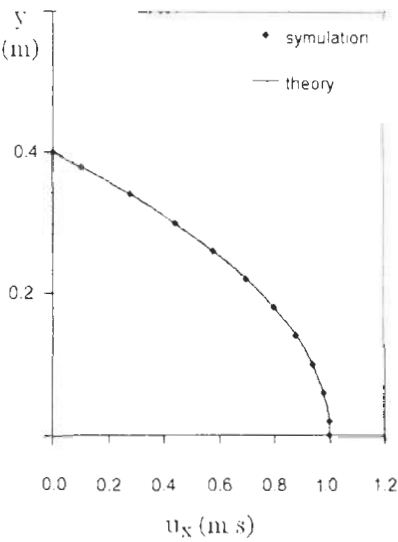
รูปที่ 4 ภาพตัดขวางท่อเหลี่ยมสำหรับการไหลแบบ Poiseuille Flow และ gridline ที่ใช้ในการคำนวณเชิงเลข

รูปที่ 4 แสดงมิติของท่อตรง และ gridline ที่ใช้ในการคำนวณ Poiseuille flow โดยท่อมีขนาด 5 m x 0.4 m ในขณะที่ gridline ที่ใช้มีขนาด 80 x 10 (W x H) และวางตัวอยู่เฉพาะส่วนครึ่งบนของท่อ เนื่องจาก Poiseuille flow เป็นการไหลที่มีความสมมาตรระหว่างส่วนครึ่งบนและครึ่งล่างของท่อ

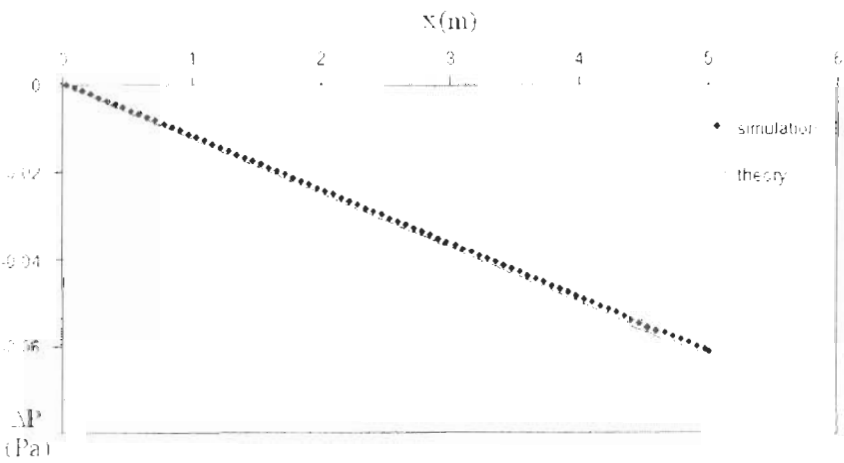
ความเร็วของการไหลที่หน้าตัดทางเข้ามีการกระจายตัวแบบ parabolic โดยมีความเร็วที่ศูนย์กลางท่อเป็น 1 m/s และความเร็วที่ผิวท่อเป็นศูนย์ ของไหลที่ใช้มีความหนาแน่นเป็น 1 kg/m³ และความหนืดเท่ากับ 0.001 N-s/m²

รูปที่ 5 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วในการไหลที่หน้าตัดทางออกของเส้นท่อ ระหว่างค่าที่ได้จากคอมพิวเตอร์โปรแกรม และค่าทางทฤษฎี ซึ่งมีความแตกต่างที่จุดสูงสุดประมาณ

0.3% รูปที่ 6 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความดันเฉลี่ย ตามแนวความยาวของท่อระยะ 5 เมตรซึ่งพบว่าเป็นการกระจายตัวแบบเชิงเส้นตามทฤษฎีของ Poiseuille flow โดยมีค่าความแตกต่างสูงสุดที่ทางออกของท่อประมาณ 2% ดังนั้น จากผลการเปรียบเทียบผลการคำนวณของโปรแกรมกับค่าทางทฤษฎีจึงเป็นการระบุถึงความสามารถในการคำนวณของคอมพิวเตอร์โปรแกรมได้เป็นอย่างดี



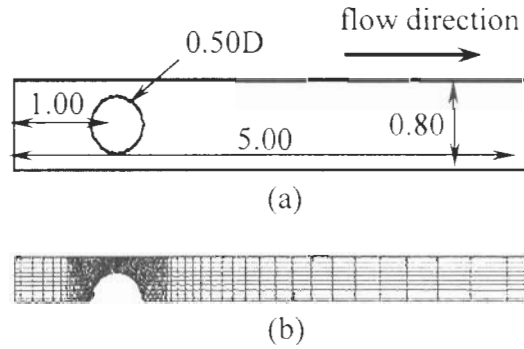
รูปที่ 5 เปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วในการไหลที่หน้าตัดทางออกของสันท่อระหว่างค่าที่ได้จากการใช้โปรแกรมคำนวณ และค่าทางทฤษฎี



รูปที่ 6 เปรียบเทียบการกระจายตัวของความดันเฉลี่ย ตามแนวความยาวของเส้นท่อระหว่างค่าที่ได้จากการใช้โปรแกรมคำนวณ และค่าทางทฤษฎี

ตัวอย่างการไหลที่ใช้ศึกษา

ในที่นี้จะใช้ปัญหาการไหล 2 มิติในเส้นท่อเหลี่ยมที่มีท่อนทรงกระบอกวางตัวขวางการไหลดังแสดงในรูปที่ 7(a) และเนื่องจากการไหลจะมีความสมดุลระหว่างส่วนครึ่งบน และครึ่งล่างของท่อเหลี่ยม ดังนั้นจึงสามารถจัด gridline ได้โดยใช้เพียงครึ่งบนของท่อเหลี่ยมเท่านั้น ดังแสดงในรูป 7(b) โดย gridline มีขนาด 80×10 (W x H) และสนามการไหลมีทิศทางหลักจากซ้ายไปขวา และค่า Re ($\rho UD/\mu$) ของการไหลคือ 500



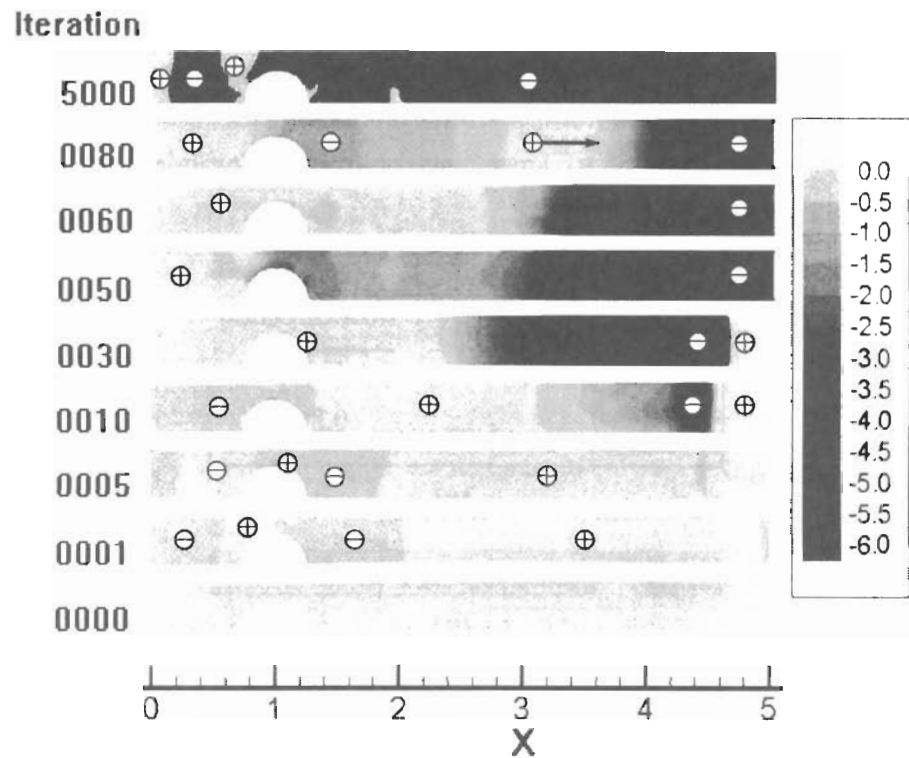
รูปที่ 7 ภาพตัดขวางท่อเหลี่ยมที่มีท่อนทรงกระบอกวางตัวขวางการไหล และ gridline ที่ใช้ในการคำนวณเชิงเลข

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับความดัน และความเร็วของของไหล 2 แบบถูกใช้ในการทดสอบ ได้แก่

1. กำหนดค่าความดันตายตัวที่ทางเข้า และทางออกของท่อเหลี่ยม ในที่นี้กำหนดให้ค่าความดันต่างระหว่างทางเข้า และทางออกเป็น 0.5Pa ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่ steady state ในขณะที่ความเร็ว u และ v ถูกกำหนดตายตัวที่ทางเข้าและปล่อยลอยตัวที่ทางออก โดยกำหนดให้ความเร็วที่ทางเข้ามีค่าเป็น $u=1$ และ $v=0$ เท่ากันไปตลอดช่วงขอบเขต
2. กำหนดค่า mass flowrate คงที่ไว้ที่ทางเข้าและทางออก และที่ความเร็ว u และ v ถูกกำหนดตายตัวทั้งที่ทางเข้าและทางออกซึ่งขนาดของความเร็วจะต้องสัมพันธ์กับขนาดของ mass flowrate ที่กำหนดไว้ โดยกำหนดให้ความเร็วที่ทางเข้ามีค่าเป็น $u=1$ และ $v=0$ เท่ากันไปตลอดช่วงขอบเขตเช่นเดียวกันกับแบบที่ 1 สำหรับค่าความดันที่ขอบเขตสามารถคำนวณได้ด้วยการ extrapolation จากค่าภายในโดเมนสนามการไหล

ผลการทดลอง

ผลการคำนวณโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบที่ 1 แสดงการกระจายตัวของความดันในแต่ละขั้นตอนการคำนวณซ้ำ (iteration) เป็นดังที่แสดงในรูปที่ 8

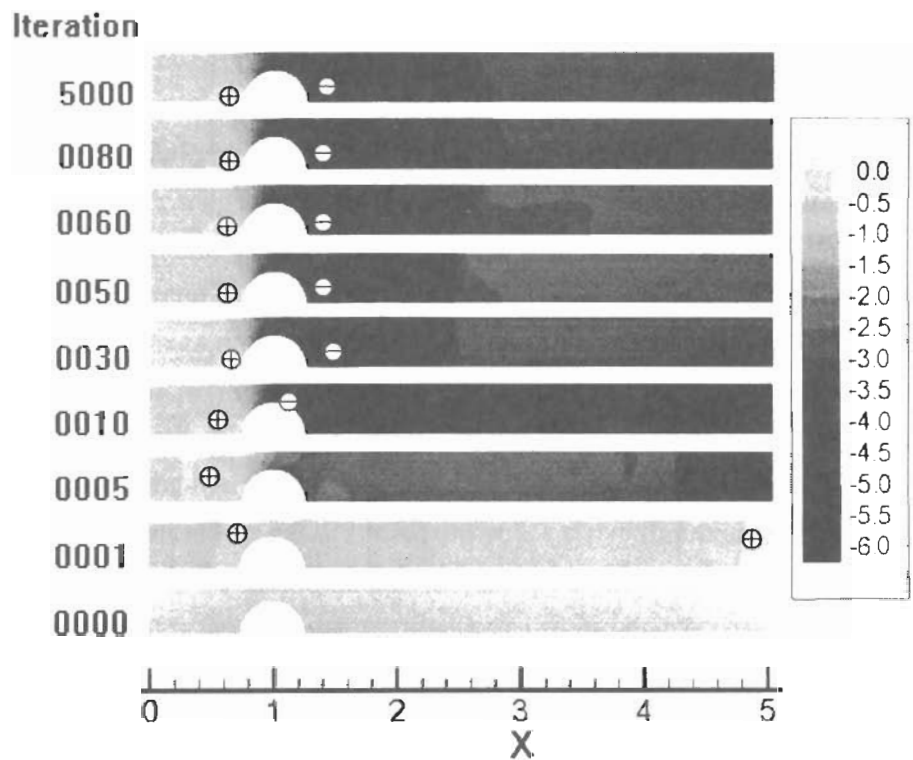


รูปที่ 8 การกระจายตัวของความดัน (Pa) ในท่อเหลี่ยมที่มีท่อนทรงกระบอกขวางสนามการไหลหลัก $Re=500$ เรียงตามขั้นการคำนวณซ้ำ (iteration) โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้ความดันมีค่าตายตัวที่ทั้งทางเข้าและทางออกของท่อ, ⊕ แสดงตำแหน่งความดันสูง และ ⊖ แสดงตำแหน่งความดันต่ำในแต่ละขั้นการคำนวณซ้ำโดยประมาณ

ก่อนเริ่มการคำนวณ (iteration 0000) ความดันถูกกำหนดให้เท่ากันตลอดทั่วสนามการไหล หลังจากนั้นลดความดันที่ทางออกลง 0.5 Pa หลังจากคำนวณไปหนึ่งขั้นความดันเริ่มปรับตัวก่อให้เกิดคลื่นความดันที่มียอดคลื่นสูงต่ำ ดังที่แสดงโดยเครื่องหมายบวก และลบตามลำดับ เมื่อผ่านการคำนวณไป 10 ขั้นซ้ำ จะปรากฏคลื่นกระแทกขึ้นที่ทางออก คลื่นกระแทกด้านทางออกจะวิ่งไปหยุดอยู่ที่ขอบเขตทางออกในขั้นคำนวณซ้ำถัดๆ ไป (30-60) โดยมีขนาดของความดันหน้าคลื่นกระแทก ต่ำกว่าค่าความดันซึ่งกำหนดตายตัวที่บริเวณทางออก (สามารถเห็นได้อย่างชัดเจนจากแถบสีที่แตกต่างบริเวณทางออก) ในส่วนทางเข้าจะถูกคลื่นกระแทกที่มียอดคลื่นสูงเคลื่อนที่เข้าหา จนกระทั่งเมื่อถึงขั้นคำนวณซ้ำที่ 60 ยอดคลื่นกระแทกสูงและต่ำจะแบ่งพื้นที่ภายในท่อเหลี่ยมออกเป็น 2 ส่วนอย่างรุนแรง หลังจากนั้นคลื่นกระแทกยอดสูงจะสะท้อนกลับจากทางเข้าเคลื่อนตัวย้อนกลับไปยังทางออกของท่อ ซึ่งมองเห็นได้จากผลการคำนวณในขั้นที่ 80 (แสดงด้วยเครื่องหมายลูกศร) ขณะที่คลื่นกระแทกยอดสูงเคลื่อนไปทางขวา มันจะทิ้งลูกคลื่นไว้ทางด้านหลัง (ทางซ้าย) ของมันเองด้วย ในขั้นนี้คลื่นกระแทกยอดต่ำจะถูกบีบกดทำให้มันมี

ขนาดความดันต่ำลงยิ่งขึ้น จนกระทั่งสามารถดันคลื่นยอดสูงกลับไปได้ การดันกลับไปกลับมาเกิดขึ้นในชั้นคำนวณซ้ำๆ ไป และในแต่ละครั้ง ขนาดความดันแตกต่างระหว่างยอดสูงและต่ำจะมีความมากขึ้นเรื่อยๆ จนกระทั่งในที่สุดนำไปสู่การลู่ออกของการคำนวณ (divergence) ที่ชั้นคำนวณซ้ำ 227 แสดงการกระจายตัวของความดันขั้นสุดท้ายก่อนที่โปรแกรมคำนวณจะหยุด เนื่องจากไม่สามารถหาคำตอบที่ลู่ออกได้ ซึ่งในขั้นนี้เราจะเห็นได้ชัดว่าคลื่นกระแทกสูงต่ำมีขนาดความต่างรุนแรงอย่างยิ่งยวด

ในรูปที่ 9 เราจะเห็นการพัฒนาการกระจายค่าความดันในสนามการไหลที่ราบเรียบกว่า อันเนื่องมาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยใช้ mass flowrate ที่มีค่าคงที่เป็นตัวกำกับการไหล



รูปที่ 9 การกระจายตัวของความดัน (Pa) ในท่อเหลี่ยมที่มีท่อนทรงกระบอกขวางสนามการไหลหลัก $Re = 500$ เปรียบตามขั้นการคำนวณซ้ำ (iteration) โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้ mass flowrate มีค่าตายตัวที่ทั้งทางเข้าและทางออกของท่อ, $\oplus$ แสดงตำแหน่งความดันสูง และ $\ominus$ แสดงตำแหน่งความดันต่ำในแต่ละขั้นการคำนวณซ้ำโดยประมาณ

เริ่มต้นการคำนวณ ด้วยการกำหนดให้ความดันเท่ากันตลอดทั่วทั้งสนามการไหล จากนั้นหลังจากคำนวณไปหนึ่งขั้นทำซ้ำเราจะเริ่มเห็นความดันสูงที่ด้านหน้า (ทางซ้าย) ของท่อนทรงกระบอก และที่บริเวณทางออก ผลการคำนวณในขั้นที่ 5 เราจะเห็นว่าคลื่นกระแทกยอดสูงที่ด้านหน้าท่อนทรงกระบอกเริ่มพัฒนาตัวโน้มนำทางด้านหน้าเข้าใกล้จุดที่เป็น stagnation ส่วนคลื่นกระแทกยอดสูงที่ทางออกได้หลุดออกไปจากสนามการไหลแล้ว ในขั้นคำนวณซ้ำถัดๆ ขึ้นไปเราจะพบว่า การกระจายความ

ต้นพัฒนาไปอย่างค่อยเป็นค่อยไป โดยความดันที่มีค่าสูงจะขยับตัวมาติดอยู่ที่จุด stagnation และจะเริ่มเห็นยอดความดันต่ำเกิดขึ้นทางด้านหลังของท่อนทรงกระบอก ซึ่งเป็นตำแหน่งของ vortex นั้นเอง การคำนวณยังคงถูกกระทำต่อไปจะกระทั่งถึงขั้นคำนวณซ้ำที่ 5000 เพื่อให้แน่ใจว่าการคำนวณได้เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุดที่ algorithm นี้จะให้ได้ แล้วจึงหยุดการคำนวณ สำหรับจุดความดันอ้างอิงที่ต้องกำหนดให้เป็นค่าตายตัวในการคำนวณครั้งนี้อยู่ที่ตำแหน่งมุมซ้ายบนของสนามการไหล การเลือกจุดนี้เป็นจุดอ้างอิงก็เนื่องมาจากเป็นจุดที่อยู่ติดกับผิวท่อทางเข้า ซึ่งน่าจะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยเมื่อสนามการไหลพัฒนาตัวไปจากค่าเริ่มต้น เราจะเห็นได้ว่าความดันที่จุดอ้างอิงยังคงมีความแตกต่างจากบริเวณใกล้เคียงอยู่บ้างแต่ไม่มากนัก

อภิปราย

จากการพิจารณาเปรียบเทียบผลการคำนวณในรูปที่ 8 และ 9 เราจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าการกำหนดให้ความดันตายตัวมีปัญหาตั้งแต่เริ่มต้น เนื่องจากเราไม่สามารถระบุค่าความดันที่ขอบเขตทุกๆ แห่งได้พร้อมๆ กัน และถึงแม้ว่าจะทำการคาดเดาค่าความดันที่ขอบเขตไว้ใกล้เคียงกับค่าที่ควรจะเป็นจริงได้แล้วก็ตามที การกำหนดค่าความดันตายตัวย่อมลดทอนความยืดหยุ่นในการปรับตัวของความดันบริเวณขอบเขต ซึ่งเห็นได้จากคลื่นกระแทกยอดต่ำที่ยื่นหยุดอยู่ที่ทางออก และการกระแทกกลับของคลื่นกระแทกยอดสูงที่ทางเข้าของท่อเหลี่ยมในรูปที่ 8 ในตอนช่วงต้นของการคำนวณ ทั้งนี้เหตุผลของการหยุดนิ่งและการกระแทกกลับอาจมาจาก upwind scheme ที่ถูกใช้ใน momentum equations (ชุดสมการที่ 9) โดยที่ทิศทางการไหลหลักซึ่งวิ่งจากซ้ายไปขวา จะนำข้อมูลการคำนวณให้วิ่งจากซ้ายไปขวาได้ง่ายกว่า การส่งข้อมูลย้อนกลับทิศการไหล สำหรับกรณีที่เราวางเงื่อนไขขอบเขตโดยกำหนดค่า mass flowrate ให้ตายตัว ผลลัพธ์ที่แสดงในรูปที่ 9 บอกถึงความยืดหยุ่นในการปรับตัวของความดันที่ดีกว่า โดยเฉพาะในช่วงระหว่างการคำนวณในขั้นที่ 1 ถึง 5 ซึ่งมีการปล่อยให้คลื่นกระแทกหลุดออกไปทางด้านทางออกของท่อเหลี่ยม (ในกรณีกำหนดความดันตายตัวคลื่นกระแทกจะยืนนิ่งอยู่ที่ตำแหน่งปลายท่อเนื่องจากความดันที่ขอบเขตทางออกถูกกำหนดตายตัวไว้แล้ว จึงไม่สามารถปล่อยคลื่นกระแทกออกไปได้) หากพิจารณาในเชิงกายภาพเราจะพบว่าในความเป็นจริงการไหลที่พุ่งออกจากท่อโดยเฉพาะในช่วงก่อนสมตูล (transient state) ก็ไม่สามารถรักษาความดันที่ทางออกให้มีค่าคงที่ตลอดทั่วทั้งพื้นที่หน้าตัดได้เช่นกัน หากแต่จะมีการกระจอกของสสารการไหล เช่นกรณีของน้ำที่พุ่งออกจากสายยางในช่วงเริ่มต้นของการไหล ด้วยเหตุนี้การกำหนดให้ mass flowrate คงที่ด้านทางออกจึงเป็นการเลียนแบบสิ่งที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาติได้เหมาะสมกว่าการกำหนดไปที่ความดัน

ระยะห่างของ gridline (หรือจำนวนของ gridline) ก็เป็นค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญอีกตัวหนึ่งต่อการลู่ออกของคำตอบ โดยปกติระยะห่างของ gridline จะถูกกำหนดโดยความซับซ้อนของสนามการไหล กล่าวคือ สนามการไหลที่มีความซับซ้อนสูงเช่นมีการเลี้ยวหักมุมมาก ก็จะต้องมีความจำเป็นต้องใช้ gridline ที่มีความละเอียดสูง หรืออีกนัยหนึ่งคือจำนวน gridline ที่มากขึ้น ในกรณีซึ่งความดันที่ทางออกถูกกำหนดให้ตายตัว ความดันที่ตำแหน่งนี้จะถูกลดลงอย่างทันทีหลังจาก iteration 0000 หากกระยะระหว่าง

gridline นั้นมีค่าน้อยลง ความดันต่าง (pressure gradient) บริเวณที่ใกล้กับทางออกก็จะมีค่ามากขึ้น มีผลให้คลื่นกระแทกบริเวณนี้มีความรุนแรงสูงขึ้น นำไปสู่การลู่ออกของคำตอบเร็วขึ้น ในทางตรงกันข้าม เมื่อ mass flowrate ถูกกำหนดให้ตายตัวแทนความดัน ระยะห่างของ gridline จะไม่มีผลต่อค่า mass flowrate ที่ถูกกำหนดขึ้นเลย หรืออีกนัยหนึ่งคือไม่มีผลต่อการลู่เข้าและออกของคำตอบนั่นเอง

ประเด็นย่อยที่น่าสนใจอีกประเด็นที่ควรพิจารณา ก็คือตำแหน่งความดันอ้างอิง ซึ่งในการทดลองคำนวณครั้งนี้ได้กำหนดไว้ที่มุมซ้ายบนของโดเมนคำนวณ จากผลลัพธ์ที่ได้ในรูปที่ 9 พบว่ามีความไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้นที่จุดอ้างอิงความดันนี้ ทั้งนี้เป็นเพราะการกำหนดค่าความดันไปพร้อมๆ กับการกำหนด mass flowrate ให้มีค่าตายตัวแทนจะลดความสามารถในการปรับตัวไปตามการพัฒนาของสนามการไหลของจุดอ้างอิงความดันจุดนี้ และหากค่าความดันที่กำหนดไว้อย่างตายตัวแทนไม่สัมพันธ์กับค่า mass flowrate ซึ่งกำหนดไว้อย่างตายตัวแทนที่ตำแหน่งนี้เช่นเดียวกัน ความไม่สอดคล้อง (inconsistency) จะเกิดขึ้นเป็นผลให้เกิดความไม่ต่อเนื่องระหว่างความดันที่จุดอ้างอิงกับความดันโดยรอบ ดังนั้นการเลือกจุดความดันอ้างอิงจึงจำเป็นต้องพิจารณาให้รอบคอบ หากจุดความดันอ้างอิงเป็นจุดที่คาดเดาความดันสุดท้ายได้ยาก หรือเป็นจุดที่ความดันมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรุนแรงระหว่างขั้นการคำนวณซ้ำ จะก่อให้เกิดการลู่ออกของคำตอบได้เช่นกัน อย่างไรก็ตามหากเราเลือกจุดนี้โดยพิจารณาอย่างรอบคอบ (เช่นในงานนี้เลือกใช้จุดที่อยู่บนขอบผิวผนังท่อด้านทางเข้า) ก็จะทำให้คำตอบลู่เข้าได้แม้ว่าความไม่ต่อเนื่องยังคงปรากฏอยู่ แต่ก็ไม่มี ความรุนแรงสูงจนมีผลต่อสนามการไหลโดยรวม และอยู่ห่างจากวัตถุที่เราสนใจ (ในที่นี้คือท่อนทรงกระบอก) ออกมามากจนไม่ก่อให้เกิดผลต่อความดันรอบข้างวัตถุที่เราสนใจได้

สรุป

1. สำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับความดันซึ่งมีสมการกำกับเป็น Elliptic equation นั้นควรกำหนดเงื่อนไขไว้ที่ mass flowrate แทนการกำหนดไปที่ตัวความดันโดยตรง ซึ่งทำให้เงื่อนไขที่ได้มามีความทวนทวนสูงขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากเงื่อนไขที่กำหนด mass flowrate ไว้อย่างตายตัวแทน

- ไม่ต้องการการคาดเดาการกระจายตัวของความดัน ที่ขอบเขตทั้งหมด ซึ่งโดยทั่วไปจะเป็นค่าที่ไม่สามารถทราบได้ในตอนต้นของการคำนวณ

- สามารถปล่อยคลื่นกระแทกของความดัน ออกไปนอกโดเมนการคำนวณได้ จึงไม่ก่อให้เกิดการสะสมของคลื่นกระแทกในโดเมน

- เลียนแบบความเป็นจริงได้ใกล้เคียง เนื่องจากสำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้จะมี mass flowrate คงที่ที่ทุกๆ หน้าตัดของการไหลซึ่งรวมถึงที่หน้าตัดทางเข้า และทางออกด้วยเช่นกัน

2. การเลือกจุดความดันอ้างอิง (ที่จำเป็นต้องมีเพื่อให้การกระจายตัวของความดันในสนามการไหลหยุดการพัฒนาตัวไว้ที่รูปแบบหนึ่งเดียว แทนที่จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงไปเรื่อยๆ โดยไม่มีการจำกัด) ก็มีความสำคัญเช่นกัน เนื่องจากที่จุดนี้จะมีการควบคุมทั้ง mass flowrate และ ความดัน ไปพร้อมๆ กัน ทำให้ขาดความยืดหยุ่นในการปรับตัวไปตามสนามการไหล มีผลต่อเนื่องไปยังความไม่สอดคล้อง และความ

ไม่ต่อเนื่องของความดันที่ตำแหน่งอ้างอิงกับความดันโดยรอบ อย่างไรก็ตามหากมีการเลือกตำแหน่งที่เหมาะสมแล้วก็จะทำให้การคำนวณลู่เข้าได้ แม้ว่าจะยังคงมีความไม่ต่อเนื่องเหลืออยู่บ้างก็ตาม

เอกสารอ้างอิง

- J. D. Anderson, Jr, 1995. **Computational Fluid Dynamics**, USA, McGraw-Hill, Inc., pp. 95-124 (chapter 3).
- O. V. Atassi, 2004. "Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent convective wave equation in a duct", **J. Comp. Phys.**, Vol.197, pp. 737-758.
- J. H. Ferziger and M. Peric, 2002. **Computational Methods for Fluid Dynamics**, 3rd ed., Germany, Springer, pp. 157-264 (chapter 7 and 8).
- R. W. Johnson, 1998. "Solution Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations", **The Handbook of Fluid Dynamics**, hardcover ed., May. pp. 31_24-31_25.
- C. Kiris and D. Kwak, 2002. "Aspects of unsteady incompressible flow simulations", **Computers & Fluids**, Vol. 31, pp. 627-638.
- D. H. Rudy and J. C. Strikwerda, 1980. "A Nonreflecting Outflow Boundary Condition for Subsonic Navier-Stokes Calculations", **J. Comp. Phys.**, Vol.36, pp.55-70.