

การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่น*

เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต¹⁾

¹⁾ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จ.ขอนแก่น 40002

Email: kiatfa@kku.ac.th

บทคัดย่อ

ในการศึกษาการวิเคราะห์การหาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่นโดยใช้ทฤษฎี Rayleigh-Ritz ร่วมกับโปรแกรม MatLab, วิธี Finite Element Analysis (โดยใช้โปรแกรม ANSYS), ค่าคำนวณทางทฤษฎี และผลจากการทดลอง ในการวิเคราะห์จะทำการวิเคราะห์คานยื่นที่อัตราส่วนต่างๆกัน โดยกำหนดให้ความกว้างคงที่ 100 มม. และ ความยาวของคานแปรตามอัตราส่วนของคาน คือ 3 , 5 , 7 , 9 , 15 และ 20 คานหนา 5 มม.

จากผลการทดลอง และการวิเคราะห์ด้วยวิธีต่างๆ จะพบว่า ค่าความธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณ โดยใช้โปรแกรม MatLab, Finite Element Analysis (ANSYS) และค่าที่ได้จากการทดลองจริง เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทฤษฎี ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดสูงสุด จากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MatLab, จากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม ANSYS และ จากการทดลอง มีค่าเท่ากับ 3.22%, 10.3% และ 41.05% ตามลำดับ

คำสำคัญ วิธี Rayleigh-Ritz, คานยื่น, ความถี่ธรรมชาติ, MatLab

* รับต้นฉบับเมื่อวันที่ 25 มีนาคม 2548 และได้รับบทความฉบับแก้ไขเมื่อวันที่ 12 กรกฎาคม 2548

Natural Frequency Analysis of Cantilevered Beams^{*}

Kiatfa Tangchaichit¹⁾

¹⁾ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,
Khon Kaen University, Khon Kaen 40002

Email: kiatfa@kku.ac.th

ABSTRACT

Rayleigh-Ritz method (using MatLab), Finite Element Analysis (using ANSYS), Exact solution and experiment were used to calculate the natural frequency of cantilevered beams. Cantilevered beams ratios 3, 5, 7, 9, 15 and 20 with thickness 5 mm were used in this analysis. The breadthwise was fixed (100 mm) and the lengthwise was varied with the geometric ratios.

The natural frequencies calculated from Rayleigh-Ritz method, Finite Element Analysis, and experiment were compared with Exact solution. The maximum errors of Rayleigh-Ritz method, FEA and experiment were 3.22%, 10.3% and 41.05 % respectively.

Keywords : Rayleigh-Ritz Method, Cantilevered beam, Natural frequency, MatLab

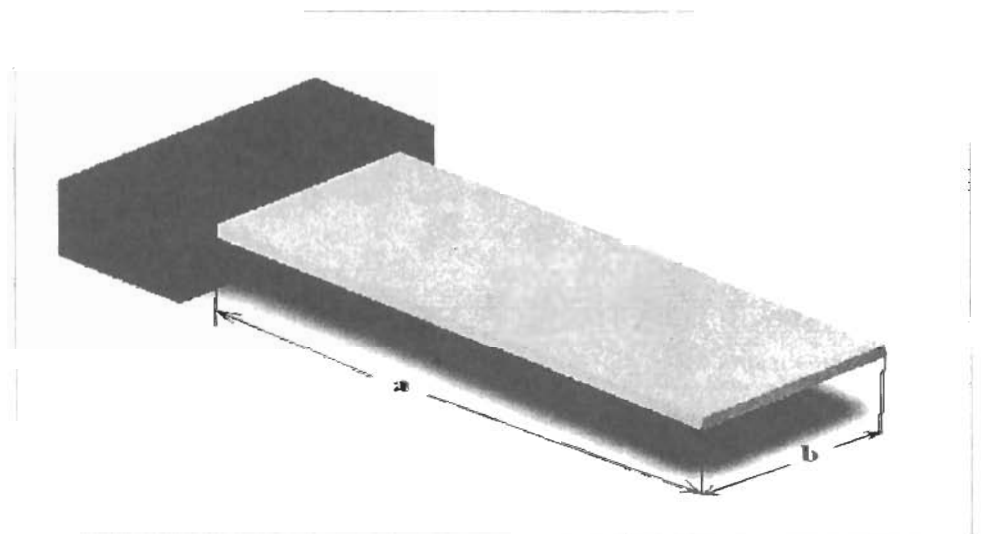
^{*} Original manuscript submitted: March 25, 2005 and Final manuscript received: July 12, 2005

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานย่น วิธีที่ให้ค่าได้แม่นยำคือ การวิเคราะห์โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ของเส้นลวด แต่ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้นั้นจะได้เฉพาะ bending mode ซึ่งขาดในส่วนของการ torsion mode และอีกวิธีหนึ่งที่นิยมใช้ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติคือ การวิเคราะห์โดยใช้ Finite Element Analysis ซึ่งค่าที่ได้มีความแม่นยำและสามารถทำนายผลได้ทุก mode ทั้ง bending และ torsion แต่ก็มีข้อจำกัดในบางประการคือ ในการวิเคราะห์ด้วยวิธี Finite Element Analysis นั้น จำเป็นต้องใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ซึ่งมีราคาแพง และ ยังต้องการเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูงเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ ดังนั้นงานวิจัยนี้จะทำการนำเสนอการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติโดยใช้วิธี Rayleigh-Ritz ร่วมกับโปรแกรม MatLab ซึ่งเป็นโปรแกรมที่สามารถทำงานได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล (PC) ทั่วไป

2. การวิเคราะห์โดยใช้ Finite Element Analysis

ในการวิเคราะห์ด้วยวิธี Finite Element Analysis นั้น จะใช้โปรแกรม ANSYS โดยทำการวิเคราะห์กำหนดให้คานย่นทำจากอลูมิเนียม มีความหนาที่ 5 มม และ ความยาวคงที่ 50 ซม ส่วนความกว้างแปรตามอัตราส่วนของคาน ($r = a/b$, a = ความยาวของคาน และ b = ความกว้างของคาน) ซึ่งจะใช้จำนวน 6 อัตราส่วนคือ 3, 5, 7, 9, 15 และ 20 โดยใช้จำนวน element ในแนวยาวของคาน (N_x) เท่ากับ 50 element และ จำนวน element ในแนวตามยาวของคาน (N_y) แปรตามอัตราส่วนของคาน ($r = N_x / N_y$) และ ใช้ element ประเภท shell element



รูปที่ 1 แบบจำลองของคานย่น

โดยเริ่มต้น ได้ทำการเปรียบเทียบผลของค่าความถี่ธรรมชาติของคานายื่น เมื่อใช้ค่าจำนวน element ในแนวยาวของคาน (N_x) ต่างกัน ได้แก่ 20, 40, 50, 100 และ จำนวน element ในแนวดตามยาวของคาน (N_y) แปรตามอัตราส่วนของคาน จากผลการศึกษาพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการใช้ค่า $N_x = 50$ และ $N_x = 100$ มีค่าใกล้เคียงกัน แต่ในกรณี $N_x = 50$ จะใช้เวลาน้อยกว่าในกรณี $N_x = 100$ ดังนั้นในการวิเคราะห์จึงใช้ $N_x = 50$

3. การวิเคราะห์โดยใช้ Rayleigh-Ritz Method ร่วมกับ MatLab

เนื่องจาก general form สำหรับหาค่าความถี่ธรรมชาติของคานายื่น (Cantilevered beam) นั้นไม่มี ดังนั้นจึงจะใช้วิธี Rayleigh-Ritz ในการศึกษาการสั่นสะเทือนของคานายื่น โดยวิธีของ Rayleigh-Ritz นั้นโหมดของการสั่นสะเทือนสามารถแสดงในรูปของผลรวมของ assumed shape function ซึ่งอย่างน้อยที่สุดต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) ซึ่งความแม่นยำของผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้วิธี Rayleigh-Ritz นั้นขึ้นอยู่กับ assumed shape function ที่ใช้ นั่นคือ (Szliard R. 1974)

$$w = \sum \sum c w_m w_n \quad (1)$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ และ w_m, w_n เป็นฟังก์ชันของการสั่นของเส้นลวดในแนวความยาวและความกว้างตามลำดับ

จากสมการ Lagrange's (Clarence W. de Silva. 2000)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (2)$$

สำหรับการสั่นสะเทือนแบบอิสระ สมการจะลดรูปเหลือ

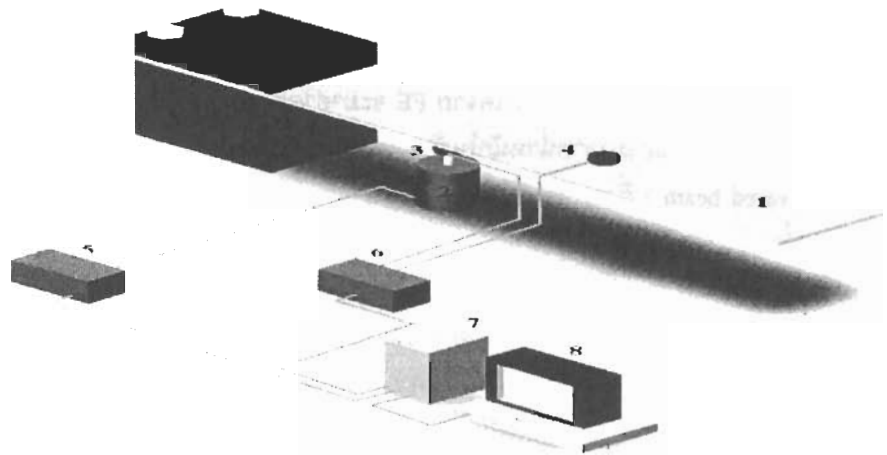
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (3)$$

โดยที่ T คือพลังงานจลน์, U คือพลังงานศักย์, t คือ เวลา และ q คือ generalized co-ordinates ซึ่งสุดท้ายจะได้ในรูปของ matrix ดังนี้

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \dots & T_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{c}_1 \\ \ddot{c}_2 \\ \vdots \\ \ddot{c}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{m1} & U_{m2} & \dots & U_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [0]_{m \times n} \quad (4)$$

ในการสมมติ assumed shape function นั้น ในงานวิจัยได้ทำการทดลองหลายรูปแบบ และ พบว่า เมื่อใช้ฟังก์ชันของการสั่นสะเทือนของเส้นลวด (มีแต่ความยาวไม่คิดความกว้าง) แบบ fixed-free คุณ กับค่าคงที่ ซึ่งเป็นด้านกว้างของคานยื่น จะได้ค่า bending mode ที่ใกล้เคียงกับค่าทางทฤษฎี และ เมื่อใช้สมการการบิดของเพลลา (แทนด้านยาวของคานยื่น) คุณกับสมการเส้นตรงที่มีความชัน (แทนด้านกว้างของคานยื่น) ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีค่าใกล้เคียงผลการคำนวณโดยใช้ FE (Finite Element)

4. การหาค่าความถี่ธรรมชาติจากการทดลอง



รูปที่ 2 แบบจำลองของการทดลอง

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| 1. Cantilevered Beam | 5. Power amplifier |
| 2. Electromagnetic exciter (shaker) | 6. Signal conditioner |
| 3. Force transducer | 7. Data acquisition system |
| 4. Accelerometer | 8. HP workstation (computer) |

ทำการทดลองหาค่าความถี่ธรรมชาติ โดยใช้อุปกรณ์การทดลองดังแสดงในรูปข้างต้น โดยใช้คานที่ทำจากอลูมิเนียม มีความหนาคงที่ 5 มม. และ ความกว้างคงที่ 10 ซม. ส่วนความยาวแปรตามอัตราส่วนของคาน ($r = a/b$, a = ความยาวของคาน และ b = ความกว้างของคาน) เป็นแบบคานยื่น (Cantilevered Beam) โดยคานถูกยึดติดกับแท่นยึด (support) แท่นยึดทำจากเหล็ก hollow section beam ขนาด 250 มม. x 250 มม. และหนา 25 มม. มีตัวกระตุ้นการสั่น (Electromagnetic shaker) (หมายเลข 2) ติดกับคาน โดยการเปลี่ยนแปลงกระแสให้เป็นแรง (หมายเลข 3) กระทำต่อคานทำให้คานสั่น ตำแหน่งการติดตั้งตัวกระตุ้นการสั่น (shaker) จะติดตั้งห่างบริเวณใกล้ๆกับขอบของคานด้านที่อิสระและห่างประมาณ 20% ของความยาวคาน โดยวัดจากปลายของคานที่มีการยึดไปยังปลายคานอีกด้านหนึ่งที่เป็นอิสระ ตัวกระตุ้นการสั่น (shaker) จะถูกกระตุ้นจากความถี่แบบ random จากคอมพิวเตอร์ (หมายเลข 8) สัญญาณดิจิตอล (digital) จะถูกเปลี่ยนกลับมาเป็นสัญญาณอนาล็อก (analog) โดย data acquisition system (หมายเลข 7) และ มีการขยายสัญญาณ (หมายเลข 5)

จากนั้นถูกส่งไปยังตัวกระตุ้นการสั่น (shaker) ส่วน accelerometer (หมายเลข 4) ถูกวางยึดติดบนคาน เพื่อทำการวัดผลตอบสนองความถี่ของคานตามจุดที่ต้องการวัด สัญญาณ output จาก force transducer และ accelerometer ถูกส่งไปยัง signal conditioner ซึ่งทำหน้าที่ขยายสัญญาณและแปลงสัญญาณไปอยู่ในรูปความต่างศักย์ไฟฟ้า ความต่างศักย์ ไฟฟ้านี้จะถูกวิเคราะห์โดยโปรแกรมในเครื่องคอมพิวเตอร์ และได้ผลลัพธ์เป็นค่าความถี่ธรรมชาติ

5. วิเคราะห์ผลการทดลอง

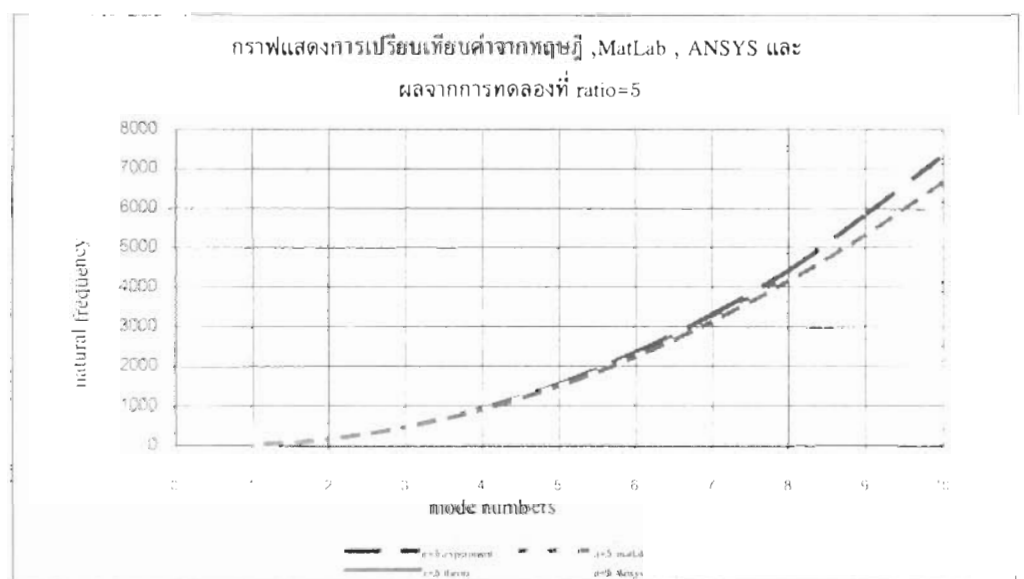
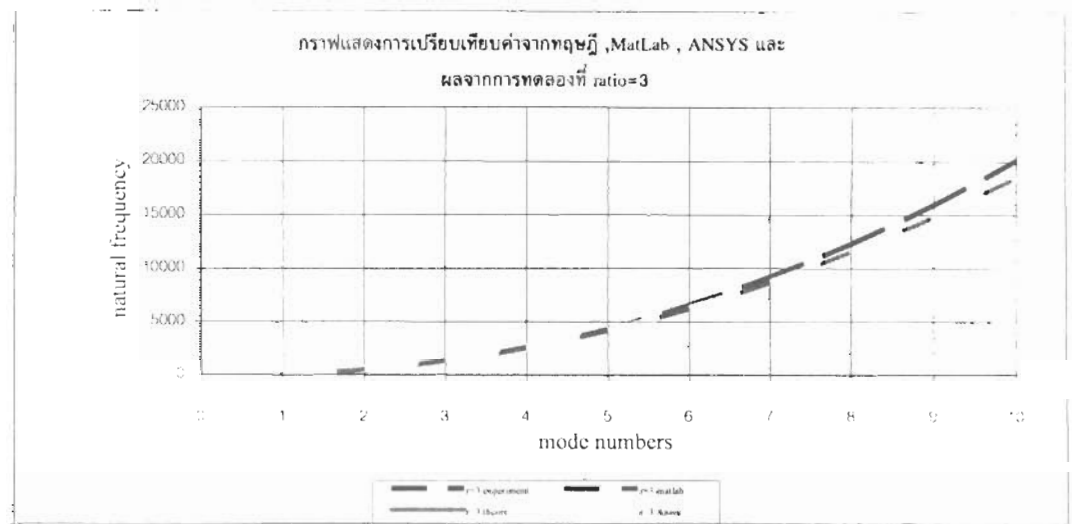
จากผลการทดลองที่ได้ จะพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติใน mode ดันๆมีค่าใกล้เคียงกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี, โดยใช้ Finite Element และ โดยวิธี MatLab แต่ที่ mode สูงๆ ค่าที่ได้จากการทดลองเมื่อเทียบกับค่าที่ได้จาก FE จะมาค่าความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมาก สาเหตุที่เกิดความคลาดเคลื่อนนั้น เนื่องมาจากน้ำหนักในตัวของตัวเอง ซึ่งคานที่ใช้ในการทดลองถูกยึดแบบคานยื่น (cantilevered beam) ซึ่งถูกยึดเพียงด้านเดียว ด้านที่เหลือถูกปล่อยอิสระ ทำให้คานมีลักษณะแอ่นลงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง ซึ่งต่างจากการวิเคราะห์โดยใช้ Finite Element ซึ่งถือว่าคานไม่มีการโก่ง และ ในการวิเคราะห์ทาง Finite Element คานถือว่าถูกยึดอย่างแน่นหนา แต่ในความเป็นจริงในการทดลอง คานถูกยึดด้วยแท่นยึดขนาด 250 มม x 250 มม.หนา 250 มม. ซึ่งเมื่อมีการสั่นที่ความถี่สูงๆ ผลกระทบจากการสั่นของตัวแท่นยึดเองมีผลต่อความถี่ของคาน ดังนั้นจึงเป็นเหตุให้ที่ mode สูงๆ เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสูงขึ้น

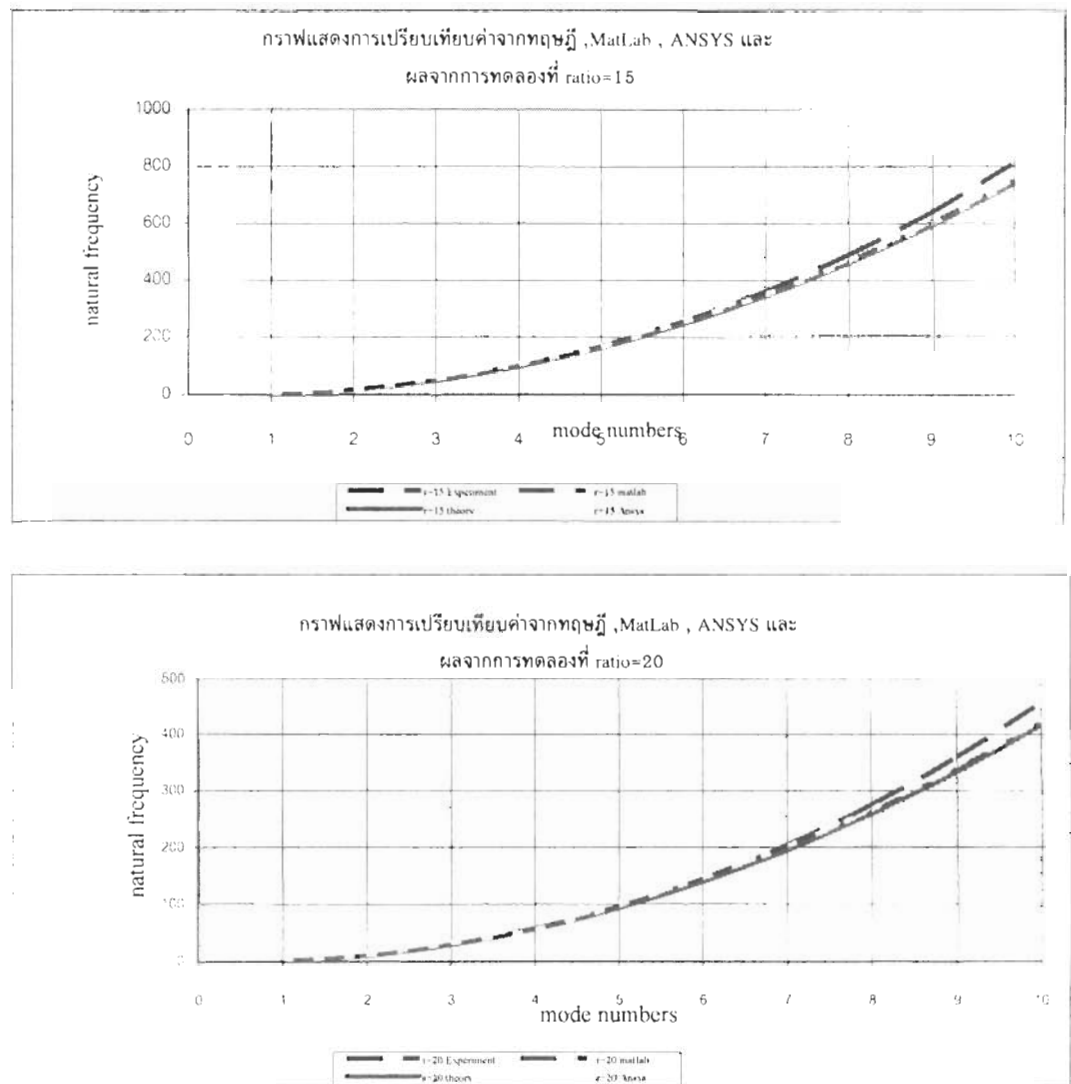
6. สรุปผล

จากกราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติจากการทดลอง, ทฤษฎี, Finite Element Method และ Rayleigh-Ritz ร่วมกับ MatLab จะเห็นว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทั้ง 4 วิธีมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ในการคำนวณโดยใช้สมการการสั่นสะเทือนของคาน (bending) โดยตรงนั้นจะได้ค่าความถี่ธรรมชาติเฉพาะ bending mode ซึ่งในความเป็นจริงบาง mode จะเกิด torsion mode ดังนั้นวิธีนี้จึงไม่เหมาะสมที่จะใช้ ส่วนวิธีการคำนวณโดยใช้โปรแกรม Finite Element การคำนวณโดยวิธี Finite Element เป็นการคำนวณค่าโดยประมาณ ที่ให้ค่าความแม่นยำสูง และ สามารถทำนายผลให้ได้ทั้ง bending mode และ torsional mode แต่วิธีการคำนวณโดยใช้ FE นี้ จำเป็นต้องใช้โปรแกรม FE ซึ่งมีราคาสูงและในการใช้โปรแกรม FE ก็ต้องการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูง และ มีหน่วยความจำมาก รวมทั้งพื้นที่ของ hard disk สูง การหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธี MatLab เป็นการประยุกต์วิธีของเรย์เลย์ โดยใช้โปรแกรม MatLab เป็นตัวคำนวณ ซึ่งค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้ทั้งจาก FE (ทั้ง bending และ torsion mode) และ ทฤษฎี (bending mode)

จากผลการทดลอง และการวิเคราะห์ด้วยวิธีต่างๆ จะพบว่า ค่าความธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม MatLab, Finite Element Analysis (ANSYS) และค่าที่ได้จากการทดลองจริง

เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทฤษฎี ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดสูงสุด จากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MatLab, จากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม ANSYS และ จากการทดลอง มีค่าเท่ากับ 3.22%, 10.3% และ 41.05% ตามลำดับ





รูปที่ 3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติ และ mode number ที่อัตราส่วน 3, 5, 15, 20

7. ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยพบว่า สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติได้รวดเร็วและสะดวกขึ้นโดยใช้สมการการสั่นของเส้นลวดแบบ fixed-free ร่วมกับสมการเส้นตรงเพื่อทำนายค่าความถี่ธรรมชาติของ cantilevered beam ดังนั้นประเด็นที่น่าจะศึกษาต่อเนื่องไปคือ เป็นไปได้หรือไม่หากจะใช้สมการการสั่นสะท้อนของเส้นลวดแบบ fixed-free ร่วมกับการสั่นแบบ free-free เพื่อทำนายค่าความถี่ธรรมชาติของ cantilevered plate

8. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยขอนแก่นที่สนับสนุนทุนอุดหนุนวิจัย โครงการนักวิจัยหน้าใหม่ สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

9. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Clarence W. de Silva. 2000 . **Vibration : Fundamentals and Practice**, CRC Press, New York.
Szliard R. 1974. **Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical methods**, Prentice-Hall, London.