

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่น บางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น*

นิตพงศ์ โพธิ์ทอง¹⁾ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต²⁾

¹⁾ นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 40002

²⁾ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 40002

Email : s75099@hotmail.com

บทคัดย่อ

การสันนิษฐานแบบอิสระของแผ่นบางยื่นและคานยื่น ที่มีความหนาคงที่ 5 มม. และมีอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นบางยื่นและคานยื่นเท่ากับ 0.25 ถึง 20 ถูกวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ โปรแกรม ANSYS ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติ และได้เส้นโค้ง (รูปพาราโบลา) ของการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นไปเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น

คำสำคัญ : การสันนิษฐานแบบอิสระ, แผ่นบางยื่น, คานยื่น, วิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์

* รับต้นฉบับเมื่อวันที่ 20 กุมภาพันธ์ 2549 และได้รับบทความฉบับแก้ไขเมื่อวันที่ 5 เมษายน 2549

The Transition curve from Plate-Like to Beam-Like Behaviour of Cantilevered Beams and Plates^{*}

Nitipong Photong¹⁾ Kiatfa Tangchaichit²⁾

¹⁾ Graduate Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, 40002 Khon Kaen University

²⁾ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering 40002 Khon Kaen University

Email : s75099@hotmail.com

ABSTRACT

The free vibration analysis of cantilevered beams and plates of 5 mm thickness and of a geometric ratio of 20 down to a geometric ratio 0.25 were analysed by means of the finite element analysis. ANSYS FE programme was used to calculate the natural frequencies. The transition curve (parabola form) from plate-like behaviour to beam-like behaviour was found.

Keywords : Free vibration, Cantilevered beam, Cantilevered plate, Finite element analysis

*

Original manuscript submitted: February 20, 2006 and Final manuscript received: April 5, 2006

บทนำ

การสั่นสะเทือน (Vibration) คือการเคลื่อนที่ของวัตถุรอบ ๆ จุดสมดุลในห้วงเวลาหนึ่งของการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลนั้นไม่ว่าจะเกิดขึ้นในแบบซ้ำตัวเองหรือไม่ก็ตาม ตัวอย่างเช่น การแกว่งตัวของลูกตุ้มนาฬิกา การโยกตัวของเสาสูง หรือการเคลื่อนที่ของมวลที่ติดอยู่บนสปริง การสั่นสะเทือนทางกล (Mechanical vibration) ก็เป็นการสั่นสะเทือนทางวิศวกรรมที่เกิดการสั่นมาจากระบบทางกลซึ่งอาจเป็นการสั่นสะเทือนแบบอิสระหรือการสั่นสะเทือนแบบบังคับโดยผลของการสั่นสะเทือนแบบอิสระนั้น ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ไป-มา ซึ่งเรียกว่า ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ซึ่งอาจเป็นความถี่เดียวหรือหลายความถี่ก็ได้ โดยที่รูปแบบการเคลื่อนที่หรือตำแหน่งการเคลื่อนที่ซึ่งเรียกว่ารูปร่างโหมด (Mode shape) ของการสั่นสะเทือน

ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ของการสั่นสะเทือนนั้นสามารถหาได้ด้วยวิธีต่างๆ เช่น การคำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element) , Rayleigh-Ritz method เป็นต้น ในปัจจุบันนี้การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและ รูปร่างโหมด โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่นิยม ซึ่งจะสามารถทำการวิเคราะห์คำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติลำดับสูงๆ และ Mode Shape ซึ่งมีความซับซ้อนได้ผลคำตอบอย่างรวดเร็วและแม่นยำ ซึ่ง Kobayashi.Y ได้ทำการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางสี่เหลี่ยม โดยวิเคราะห์เป็นแบบโมดอล (modal) แบบไม่เชิงเส้น (Non-linear) โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนเอลิเมนต์ในแต่ละด้าน (Kobayashi.Y ,2005)

การวิเคราะห์จากทฤษฎี Rayleigh-Ritz method นั้นสามารถนำไปคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นยื่นที่เกิดการสั่นแบบอิสระได้หลากหลายแบบ เช่น การศึกษาถึงผลของการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเป็นแบบ Isotropic และ Orthotropic (Ming-Hung Hsu ,2003), การศึกษาถึงผลของการเพิ่มขึ้นของค่าอัตราส่วน (ความยาว/ความกว้าง) ของแผ่นบาง (K. Hyde, J. Y. Chang, C. Bacca, J. A. Wickert ,2001), การศึกษาถึงผลของการสั่นของรูปทรงที่มีทั้งแบบแผ่นบางยื่นและคานยื่นอยู่ในแบบจำลองเดียวกัน (M.Chiba, I. Yoshida,1996) สำหรับทฤษฎี Rayleigh-Ritz method ก็ได้ถูกนำไปใช้การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติที่ 30 ค่าแรกของแผ่นบางที่ถูกยึดแน่นทั้งสี่ด้านที่เกิดการสั่นแบบอิสระ (C. Rajalingham, R.B. Bhat, G.D. Xistria ,1996) และยังมีการศึกษาหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางโดยได้สมมติการวิเคราะห์ของแผ่นบาง เป็นแบบการวิเคราะห์คานในช่วงสถิต (Zhou Ding ,1995) นอกจากนี้ยังสามารถนำทฤษฎี Rayleigh-Ritz method มาประยุกต์ใช้ร่วมพฤติกรรมการณ์การสั่นของคานในลักษณะต่างๆ คำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่น (Cantilevered Beam) (เกียรติพิฟ้า ,2005)

การสั่นตามแนวขวางของคาน

ในการศึกษาการสั่นของระบบต่อเนื่องของคานที่มีหน้าตัดคงที่นั้น จะสามารถหาสมการในการหาค่าความถี่ธรรมชาติของคานได้ (กนต์ธร ชำนิประศาสน์, 2545) คือ

$$\omega_n = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (1)$$

โดยที่ ω_n = ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/sec)
 β^2 = ค่าจำเพาะ (rad)
 ρ = ความหนาแน่น (kg/m³)
 I = moment of inertia (or second moment) of a plane area (m⁴)
 E = Young's modulus (N/m²)
 A = พื้นที่หน้าตัดของคาน (m²)

การสั่นของแผ่นบาง

เป็นการพิจารณาการสั่นของระบบที่มีมิติความยาวสองมิติหรือก็คือ พิจารณาการสั่นของแผ่นบางนั่นเอง แผ่นบางที่จะกล่าวถึงในที่นี้หมายถึง วัสดุที่มีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับมิติด้านอื่นๆ ทำให้แผ่นบางไม่สามารถที่จะรับภาระโมเมนต์บิดได้ ซึ่งจะคล้ายกับกรณีเส้นเชือกไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดได้นั่นเองโดยสมการหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง (Weaver et al., 1990) คือ

$$\omega = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2)$$

โดยที่ ω = ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad/sec)
 α = a constant depending on the mode
 a = ความยาวของแผ่นบาง (m)
 ρ = ความหนาแน่น (kg/m³)

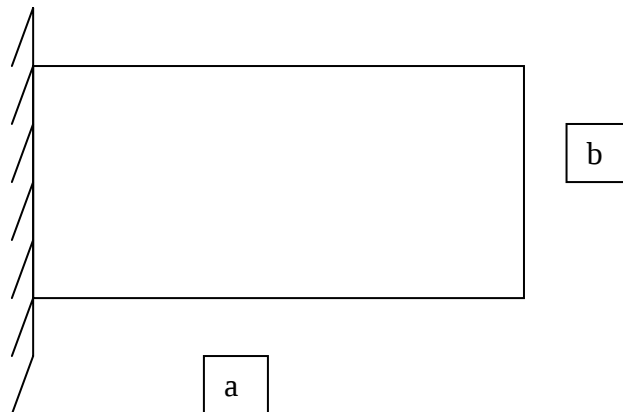
และ

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

เมื่อ D = flexural rigidity of the plate
 h = ความหนาของแผ่นบาง (m)

วิธีการศึกษา

แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด จะมีลักษณะเป็นแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plates) หรือคานยื่น (Cantilevered Beam) โดยมีขนาดความยาว (a) คงที่ 0.5 ม. ความกว้าง (b) และความหนาคงที่ 0.005 ม. โดยที่ความกว้างของคานจะแปรผันตามอัตราส่วนทางเรขาคณิต (Geometric Ratio; r) โดยที่ $r=a/b$ และทำจากเหล็กกล้า (Carbon Steel) มีคุณสมบัติทางกลเป็นแบบ Linear Isotropic ที่มีค่าคุณสมบัติดังนี้ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Young's modulus) $E=210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ค่าความหนาแน่นของวัสดุ (Density) $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ และค่าอัตราส่วนพัวซอง (Poisson's ratio) $\nu=0.29$ รูปที่ 1 ในการวิเคราะห์และคำนวณหาค่า mode shape และค่าความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) จะใช้โปรแกรม ANSYS (โปรแกรมคำนวณทาง finite element)

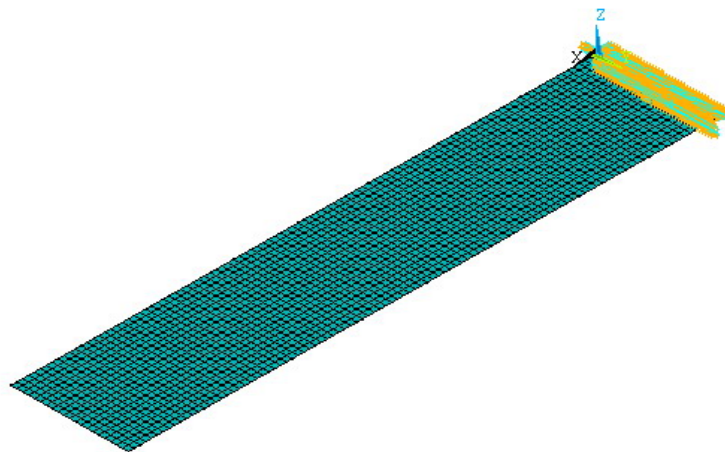


รูปที่ 1 แสดงรูปร่างแบบจำลอง

ขั้นตอนการศึกษา

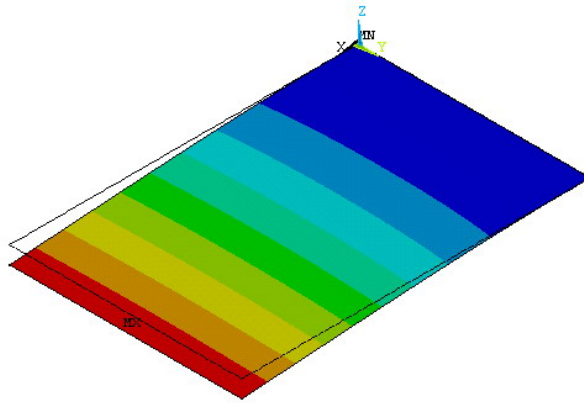
1. สร้างและวิเคราะห์แบบจำลองจากโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด เพื่อที่จะหาจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในด้านความยาว (a) และความกว้าง (b) โดยแบบจำลองจะทำการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) ในด้านความยาวให้มีจำนวนเอลิเมนต์เป็น (N_a) 40, 50, 60, 80, 100, 120, 150 element และให้จำนวน element ด้านความกว้างเป็น N_b โดยที่จะแปรตามค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตของคาน (Geometric Ratio;r) ซึ่ง $r=a/b=N_a/N_b$ มีค่าเป็น 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, โดยผลของการวิเคราะห์จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ทำให้ทราบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด เมื่อทำการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่จำนวนเอลิเมนต์ต่างๆจะสามารถเลือกจำนวน element (N_a) เท่ากับ 100 element เป็นจำนวนเอลิเมนต์ที่มีค่าเหมาะสมที่สุด ดังรูปที่ 2 โดยเหตุผลที่เลือกจำนวนเอลิเมนต์ 100 คือ เป็นจำนวนเอลิเมนต์ที่ให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่มีค่าใกล้เคียงกับกรณีจำนวนเอลิเมนต์ที่

120, 150 element และมีรูปร่างโหมดที่มีความละเอียด สามารถดูรูปร่างโหมดได้ดีทุกโหมด และเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์น้อยกว่ากรณี 120, 150 element ส่วนในกรณี 40, 50, 60, 80 element รูปร่างโหมดที่ได้นั้นไม่สามารถอ่านค่าได้ในบางโหมดที่สูงๆ และมีรูปร่างโหมดที่ไม่มีความละเอียดพอในด้านที่มีจำนวนเอลิเมนต์ต่ำๆ

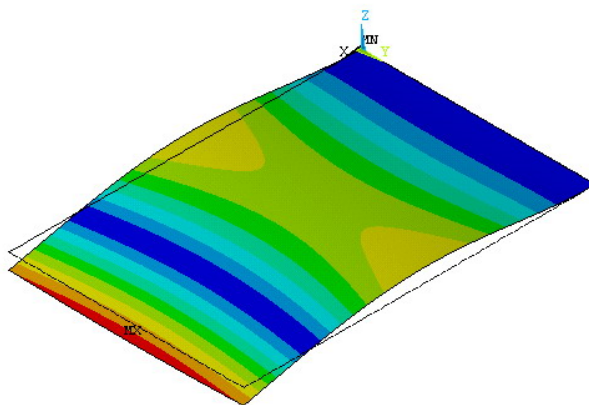


รูปที่ 2 แสดงการแบ่งจำนวนที่ 100 element ที่อัตราส่วนเท่ากับ 5

2. ทดสอบแบบจำลองจากโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีจำนวน element เท่ากับ 100 element โดยทำการทดสอบแบบจำลองที่มีอัตราส่วน (r) เป็น 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, และ 20 เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ที่ 40 ค่าแรก ซึ่งจะทำให้การเลือกค่าความถี่ธรรมชาติที่มีรูปร่างโหมดที่มีจำนวนจุดตัดบนแกนความยาว (x) และแกนความกว้าง (y) เมื่อเทียบกับสภาวะหยุดนิ่งของแผ่นบางยี่นและคานยี่นให้เป็นจุดตัด (x, y) คือ โหมด (0,0) , (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0), (6,0), (7,0), (8,0), (9,0), (10,0) เป็นต้น ดังรูปที่ 3 และรูปที่ 4 ซึ่งรูปดังกล่าวนี้คือรูปร่างโหมดที่แสดงลักษณะของแผ่นบางยี่นหรือคานยี่น ที่ จะเกิดการสั่นขึ้น-ลงในแนวดิ่งหรือเรียกว่า โหมดดัดตัว (bending mode) โดยจะเกิดการดัดตัวผ่านบนแกนความยาว (x) ศูนย์และหนึ่งครึ่งตามลำดับ เมื่อเทียบกับสภาวะหยุดนิ่ง เหตุผลที่ทำให้การเลือกโหมดเฉพาะโหมดที่มีจุดตัดบนแกนความกว้าง (y) เป็นศูนย์คือ จะพิจารณาเฉพาะกรณีเกิดการดัดตัว ซึ่งในด้านอิสระของคาน (แนวแกน y) โดยที่หากด้านดังกล่าวเป็นแนวตรงจะเป็นพฤติกรรมการสั่นของคานยี่น (Cantilevered Beam) แต่ถ้าด้านดังกล่าวเกิดการดัดตัว แสดงว่าที่โหมดนั้นเป็นพฤติกรรมการสั่นของแผ่นบางยี่น (Cantilevered Plate)

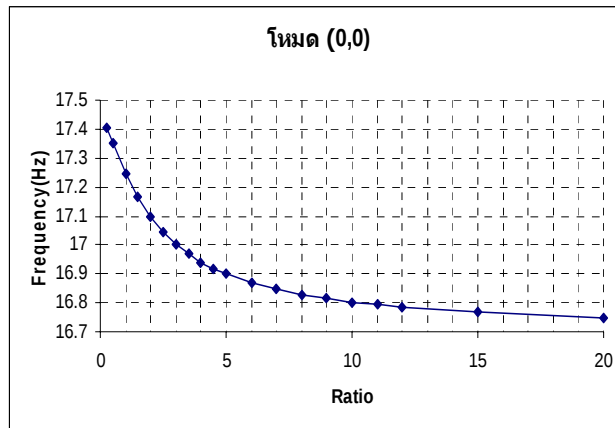


รูปที่ 3 แสดงรูปร่างโหมด (0,0) ที่อัตราส่วน 1.5



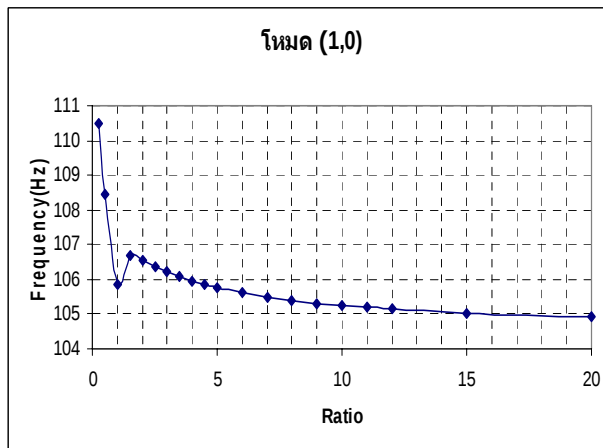
รูปที่ 4 แสดงโหมด (1,0) ที่อัตราส่วน 1.5

3. เมื่อทำการเลือกค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ในแต่ละโหมดจากข้อที่ 2 จะนำค่าทั้งสองค่าไปหาความสัมพันธ์กัน ดังแสดงในรูปที่ 5, 6 และ รูปที่ 7 ซึ่งในแต่ละโหมดจะมีความสัมพันธ์ที่ต่างกันไป โดยในรูปที่ 5 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (0,0) เห็นว่ารูปดังกล่าวนี้ เมื่อค่าอัตราส่วนเพิ่มขึ้น ค่าความถี่ธรรมชาติจะลดลงอย่างต่อเนื่อง ซึ่งเมื่อทำการเปรียบเทียบรูปร่างโหมดทุกอัตราส่วนแล้ว จะเห็นว่าในด้านอิสระของคาน (แนวแกน y) เป็นแนวเส้นตรงทุกอัตราส่วนซึ่งจะเป็นลักษณะการสั่นของคานยื่น (Cantilevered Beam)

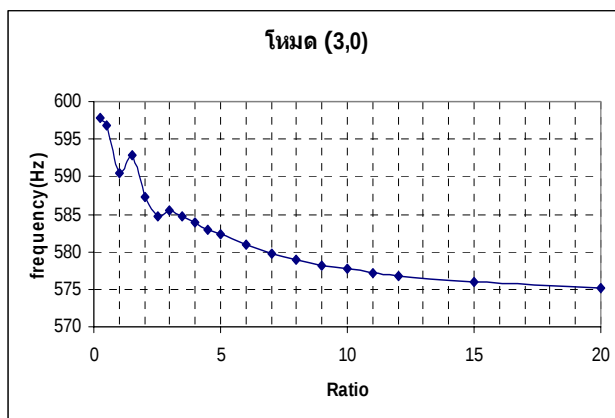


รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (0,0)

ส่วนรูปที่ 6 และ 7 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (1,0) (3,0) ตามลำดับ จะเห็นว่าเมื่ออัตราส่วนเพิ่มขึ้น ค่าความถี่ธรรมชาติจะลดลง แต่จะมีบางอัตราส่วนที่ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าเพิ่มขึ้น แล้วก็จะลดลงอย่างต่อเนื่อง ซึ่งเมื่อทำการเปรียบเทียบรูปร่างโหมดในช่วงที่ค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้นนั้นเห็นว่าในด้านอิสระของคาน (แนวแกน y) จะไม่เป็นแนวเส้นตรงที่อัตราส่วนดังกล่าวซึ่งแสดงว่าที่อัตราส่วนนั้นมีพฤติกรรมการสั่นเป็นแบบของแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plates)

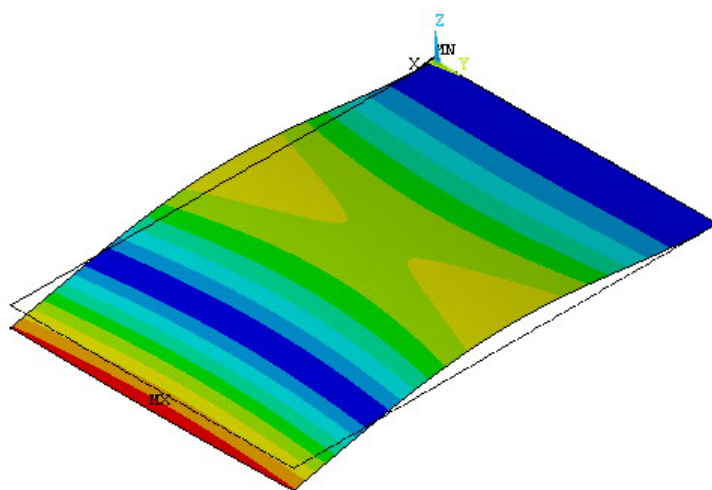


รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (1,0)



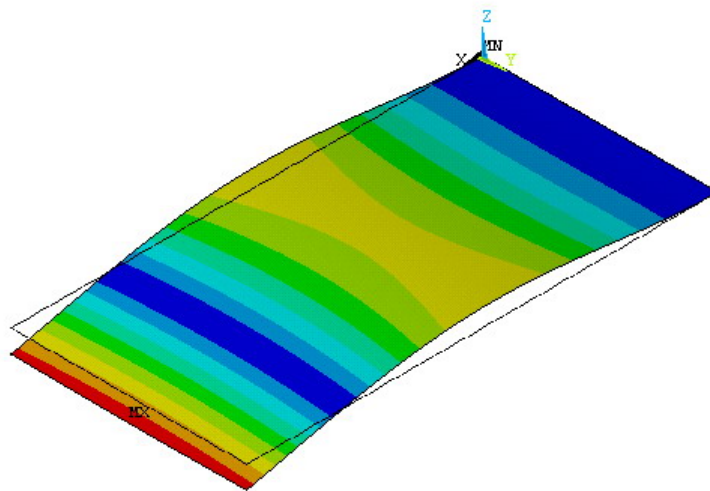
รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนที่โหมด (3,0)

4. ในแต่ละโหมดจะพิจารณา mode shape ของทุกอัตราส่วน โดยทำการเลือก mode shape ที่ ส่วนของด้านความกว้างที่ปล่อยอิสระของคาน (แนวแกน y) ที่เริ่มตัดตัวไม่เป็นแนวเส้นตรง โดยพิจารณาว่าเป็นอัตราส่วนของคานที่โหมดนั้นที่เริ่มมีพฤติกรรมเป็นการสั่นแบบแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate) ทำการเปรียบเทียบกับอัตราส่วนของด้านความกว้างที่ปล่อยอิสระของคาน (แนวแกน y) ที่เกิดการตัดตัวที่เป็นแนวเส้นตรงซึ่งอัตราส่วนนี้จะเป็นพฤติกรรมการสั่นของคานยื่น (Cantilevered Beam)



รูปที่ 8 รูปร่างโหมด (1,0) ในแนวแกนความกว้างของอัตราส่วน 1.5

รูปที่ 8 แสดงการสั่นของคานที่อัตราส่วน 1.5 ที่โหมด (1,0) ซึ่งจะพบว่าด้านอิสระในแนวแกน y เมื่อมีการสั่นจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง แสดงให้เห็นว่ามีพฤติกรรมสั่นของแผ่นบางยื่น ส่วนรูปที่ 9 แสดงการสั่นของคานที่อัตราส่วน 2.0 ที่โหมด (1,0) ซึ่งด้านอิสระในแนวแกน y เมื่อมีการสั่นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง แสดงให้เห็นว่ามีพฤติกรรมสั่นของคานยื่น



รูปที่ 9 รูปร่างโหมด (1,0) ในแนวแกนความกว้างของอัตราส่วน 2.0

ผลการศึกษา

ค่าของความถี่ธรรมชาติ และอัตราส่วน ที่โหมดต่างๆที่เริ่มมีพฤติกรรมของการสั่นแบบแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate) ดังแสดงไว้ในตารางที่ 1

mode	frequency (Hz)	Geometric ratio
(1,0)	106.56	2
(2,0)	298.14	3
(3,0)	584.8	3.5
(4,0)	966.81	4
(5,0)	1441.9	5
(6,0)	2010	6
(7,0)	2670	7
(8,0)	3421.2	8
(9,0)	4262	9
(10,0)	5191.3	10
(11,0)	6207.6	11

ตารางที่ 1 ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติ และอัตราส่วน ที่โหมดต่างๆที่เริ่มมีพฤติกรรมของการสั่นแบบแผ่นบางยื่น (Cantilevered Plate)

จากนั้นทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้ในตารางที่ 1 โดยใช้ Least – Square Method จะสามารถหาความสัมพันธ์ เป็นสมการของความถี่และอัตราส่วนทางเรขาคณิตของคานได้ ดังแสดงในสมการที่ 4

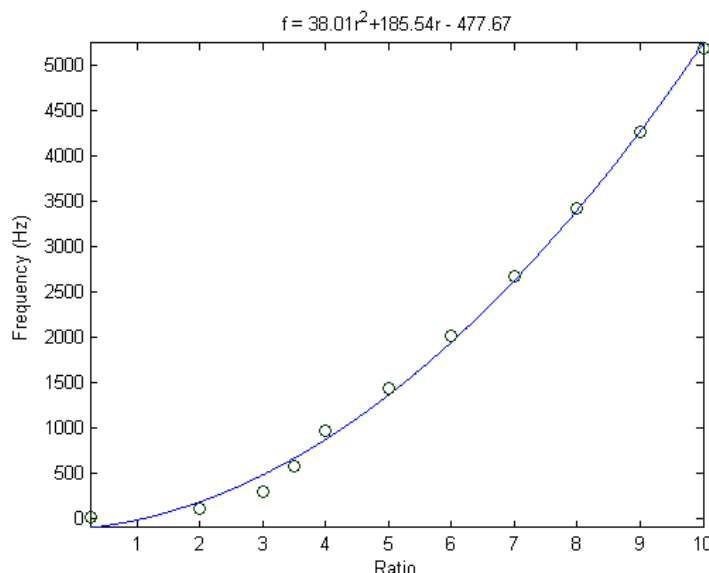
$$f = 38.01r^2 + 185.54r - 477.67 \quad (4)$$

เมื่อ

f = ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency; Hz)

r = อัตราส่วนทางเรขาคณิต (Geometric Ratio)

โดยความสัมพันธ์สมการของความถี่และอัตราส่วนทางเรขาคณิตสามารถแสดงได้ในรูปที่ 10



รูปที่ 10 แสดงพฤติกรรมความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ของแผ่นยี่นและคานยี่น

รูปที่ 10 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนของคานของจุดที่เริ่มมีพฤติกรรมการสั่นแบบแผ่นบางยี่น (Cantilevered Plate) และเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมคล้ายคาน (Beam-like behaviour) เป็นพฤติกรรมคล้ายแผ่น (Plate-like behaviour) ซึ่งจะได้จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของคาน ซึ่งหาได้โดยใช้วิธี Least – Square Method จะเห็นว่ากราฟเป็นเส้นโค้งที่จะแยกพื้นที่เป็นส่วนด้านบนและด้านล่าง โดยส่วนด้านบนจะเป็นส่วนของพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยี่น และส่วนด้านล่างจะเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยี่น

สรุป

การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางยี่น (Cantilevered Plates) และคานยี่น (Cantilevered Beam) จะสามารถแยกพฤติกรรมการสั่นสะเทือนทั้งสองชนิดได้ โดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติ รูปร่างโหมด และค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิต (Geometric ratio, r) ซึ่งค่าทั้งสามนี้จะนำมาวิเคราะห์โดยอาศัยวิธี Least – Square Method ซึ่งผลสรุปที่ได้นั้นจะแสดงได้ดังรูปที่ 10 มีสมการเป็น $f = 38.01r^2 + 185.54r - 477.67$ สมการนี้ทำให้สามารถแบ่งแยกพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นบางยี่นและคานยี่น โดยส่วนด้านบนจะเป็นพฤติกรรมส่วนของแผ่นบางยี่น และส่วนด้านล่างจะเป็นพฤติกรรมส่วนของคานยี่น ซึ่งในการคำนวณหาความถี่ธรรมชาติในส่วนที่มีพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยี่น จำเป็นต้องใช้การวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่ในการหาความถี่ธรรมชาติในส่วนที่มีพฤติกรรมคล้ายคานยี่น สามารถวิเคราะห์ได้จากสมการการสั่นของคานยี่น (เกียรติฟ้า, 2005)

เอกสารอ้างอิง

- กนต์ธร ชำนิประศาสน์. 2545. การสั่นสะเทือนทางกล. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า.
- เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2005. การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่น. วิศวกรรมสาร ม.ข. ปีที่ 32, ฉบับที่ 6(พฤศจิกายน-ธันวาคม 2548).
- Chiba, M., I. Yoshida. 1996. **Free Vibration of a Rectangular Plate-Beam Coupled System**. Journal of Sound and Vibration: 194(1): 49-65
- Hyde, K., J.Y.Chang, C.Bacca, J.A.Wickert. 2001. **Parameter Studies for Plane Stress in-Plane Vibration of Rectangular Plates**. Journal of Sound and Vibration: 247(3): 471-487
- Kobayashi.Y. 2005. **Reduced - Order Nonlinear Modal Equations of Plates Based on the Finite Element Method**. Retrieved may 15,2005. <http://mech-me.eng.hokudai.ac.jp/~rd/labo/PDF/Reduce.pdf>
- Ming-Hung Hsu. 2003. **Vibration Analysis of Isotropic and Orthotropic Plates with Mixed Boundary Conditions**. Tamkang Journal of Science and Engineering: 6(4): 217-226
- Rajalingham, C., R.B. Bhat, G.D. Xistria. 1996. **Vibration of Rectangular Plates using Plate Characteristic Functions as Shape Functions in the Rayleigh-Ritz Method**. Journal of Sound and Vibration; 1996;193(2): 497-509
- Weaver, W.JR., Timoshenko, S.P, D.H.Young. 1990. **Vibration Problems in Engineering**. Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc
- Zhou Ding. 1995. **Natural Frequencies of Elastically Restrained Rectangular Plates using a set of Static Beam Functions in the Rayleigh - Ritz Method**. Elsevier Science: 57(4): 731-735