

การประยุกต์ใช้เอลิเมนต์ผิวโค้ง สิบสองระดับชั้นความเสรีเพื่อเพิ่มความแม่นยำ ในการคำนวณสนามไฟฟ้า*

นิติพงศ์ ปานกลาง¹⁾

¹⁾ อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
จังหวัดปทุมธานี 12110

Email : p_nitipong@rmut.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอวิธีการเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว โดยประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี ปัญหาทางวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูงที่ใช้เป็นตัวอย่างศึกษาในบทความนี้ได้แก่ การคำนวณสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ จากการคำนวณสนามไฟฟ้าในแนวแกน z พบว่า การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิวนั้น ทำให้ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าลดลง เมื่อเทียบกับการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นในการคำนวณ กรณีที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ 1.61% การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี ทำให้ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้าลดลงเหลือ 0.72%

คำสำคัญ : วิธีประจุพื้นผิว วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี

* รับต้นฉบับเมื่อวันที่ 21 กันยายน 2548 และได้รับบทความฉบับแก้ไขเมื่อวันที่ 14 พฤศจิกายน 2548

The Application of 12-DOF Element for Increasing the Accuracy in Electric-Field Calculation *

Nitipong Pan-klang¹⁾

¹⁾ Lecture, Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Pathumthani, 12110

Email : p_nitipong@rmut.ac.th

ABSTRACT

This paper presents the accuracy enhancement for electric field calculation by applying 12-DOF elements to the surface charge method. The electric field calculation on a dielectric spherical under the uniform field is selected as the case study in this paper. By calculating the electric field on z-axis, the results show that using 12-DOF elements with the surface charge method can reduce electric field error when compared to linear rectangular elements. With linear rectangular elements, the average error of electric field is approximately 1.61%, while 12-DOF elements case can reduce the average error in electric field calculation down to 0.72%.

Keywords : Surface Charge Method, Biconjugate Gradient Stabilized Method, 12-DOF Element

* Original manuscript submitted: September 21, 2005 and Final manuscript received: November 14, 2005

บทนำ

ปัจจุบัน การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัวเลขเป็นประโยชน์อย่างมากต่องานในสาขาวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูง เนื่องจากช่วยวิเคราะห์ลักษณะของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นกับอุปกรณ์ เช่น การวิเคราะห์การกระจายตัวของสนามไฟฟ้ารอบ ๆ บุขซึ่งของหม้อแปลงไฟฟ้าภายใต้สภาวะเบรอะเบื่อน ฯลฯ การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าดังกล่าวยังช่วยให้การออกแบบอุปกรณ์ทางด้านไฟฟ้าแรงสูงมีความปลอดภัย รวมถึงสามารถหาข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น ณ จุดต่าง ๆ บนอุปกรณ์ได้อีกด้วย

วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้คำนวณสนามไฟฟ้ามีด้วยกันหลายวิธี ตัวอย่างเช่น วิธีชั้นประกอบขอบเขต (Boundary Element Method, BEM) และวิธีประจุพื้นผิว (Surface Charge Method, SCM) ปัจจุบันอย่างหนึ่งที่ส่งผลต่อความแม่นยำของผลการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัวเลขได้แก่ ลักษณะพื้นผิวของแบบจำลองที่สร้างขึ้น โดยทั่วไป การคำนวณนิยมใช้เอลิเมนต์ที่มีลักษณะเชิงเส้น เนื่องจากการสร้างแบบจำลองทำได้ง่าย ข้อเสียของการใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นคือ ความแม่นยำของผลการคำนวณค่อนข้างต่ำ โดยเฉพาะบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าสูง ๆ การแก้ปัญหาดังกล่าวทำได้หลายวิธี วิธีหนึ่งที่ยอมรับคือ การเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณ แต่ปัญหาที่ตามมาของการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ก็คือ ทำให้เวลาการคำนวณและปริมาณหน่วยความจำที่ใช้เพิ่มขึ้น ปัจจุบันจึงได้มีการนำเอลิเมนต์รูปทรงต่าง ๆ มาใช้ในการคำนวณเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องของการใช้เอลิเมนต์เชิงเส้น เช่น การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งสี่ระดับชั้นความเสรี (นิตินพงศ์ ปานกลาง, 2548) เป็นต้น

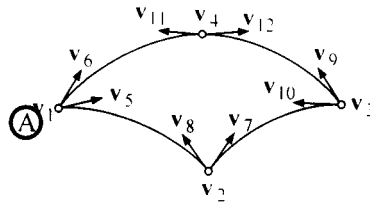
บทความนี้ นำเสนอการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว (นิตินพงศ์ ปานกลาง และ บุญชัย เตชะอำนาจ, 2546) การคำนวณกระทำกับแบบจำลองทรงกลมฉนวนที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ โดยผู้เขียนได้เปรียบเทียบสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้กับคำตอบเชิงวิเคราะห์ (Z. Haznadar and Z. Stih, 2000) ผลการคำนวณจะแสดงให้เห็นว่าการใช้เอลิเมนต์ผิวโค้งช่วยปรับปรุงความแม่นยำในการคำนวณสนามไฟฟ้า ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าบทความนี้จะเป็ประโยชน์ต่อบุคคลที่สนใจ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานในสาขาอื่น ๆ โดยเฉพาะกับสาขาวิศวกรรมไฟฟ้าเท่านั้น

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีลักษณะพื้นผิวที่โค้งมน ดังรูปที่ 1 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีสามารถสร้างจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น โดยอาศัยพิกัด เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปมทั้งสี่ของเอลิเมนต์ (B Techumnat, 2003) สมการที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์ผิวโค้งแสดงดังสมการที่ (1)

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{12} N_i \mathbf{v}_i \quad (1)$$

เมื่อ $\mathbf{P}$ คือเวกเตอร์พิกัดบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม, N_i คือฟังก์ชันรูปร่าง และ $\mathbf{v}_i$ คือเวกเตอร์พิกัดและเวกเตอร์สัมผัสที่ปมทั้งสี่ของเอลิเมนต์



รูปที่ 1 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสองระดับชั้นความเร็ว

ฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสองระดับชั้นความเร็วมีทั้งหมด 12 สมการ ตัวอย่างสมการฟังก์ชันรูปร่าง N_1 , N_5 และ N_6 ณ ปมที่ A ของเอลิเมนต์แสดงดังสมการที่ (2) ถึง (4) ส่วนฟังก์ชันรูปร่าง ณ ปมอื่น ๆ ของเอลิเมนต์ สมการมีลักษณะในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} N_1 = & (1-L_1)(1-L_1) + (1-L_1)^2 L_1(1-L_2) \\ & - (1-L_1)L_1^2(1-L_2) + (1-L_2)^2 L_2(1-L_1) \\ & - (1-L_2)L_2^2(1-L_1) \end{aligned} \quad (1)$$

$$N_5 = (1-L_1)^2 L_1(1-L_2) \quad (3)$$

$$N_6 = (1-L_2)^2 L_2(1-L_1) \quad (4)$$

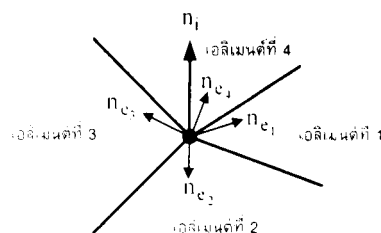
เมื่อ L_1 และ L_2 เป็นฟังก์ชันเฉพาะที่ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม โดยที่ $(0 \leq L_1 \leq 1)$ และ $(0 \leq L_2 \leq 1)$

การคำนวณเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปมทั้งสองของเอลิเมนต์ใด ๆ ทำโดยรวมเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ณ ปมของเอลิเมนต์ที่มีฟังก์ชันเดียวกัน จากนั้นหารผลรวมของเวกเตอร์ดังกล่าวด้วยจำนวนเอลิเมนต์ที่ต้องรวมอยู่กับปมดังกล่าว สมการที่ใช้คำนวณเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ณ ปมที่ i คือ

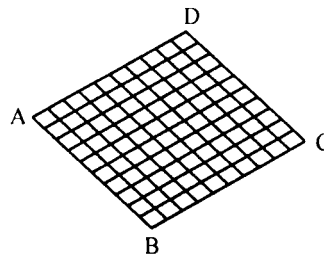
$$n_i = \frac{\sum_{j=1}^m n_{c_j}}{m} \quad (5)$$

เมื่อ n_{c_j} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเอลิเมนต์ที่ j ใด ๆ ที่ต้องรวมอยู่กับปมที่ i และ m คือจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ต้องรวมอยู่กับปมที่ i แสดงดังรูปที่ 2

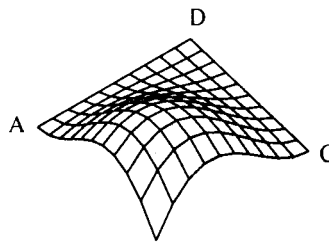
รูปที่ 3(ก) แสดงตัวอย่างของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น ฟังก์ชันที่ปม A, B, C และ D มีค่าเท่ากับ (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0) และ (0,1,0) ตามลำดับ เมื่อเรากำหนดเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปม B เท่ากับ $\bar{a}_1 - \bar{a}_3 + 0.1\bar{a}_4$ และคำนวณฟังก์ชันบนเอลิเมนต์โดยใช้สมการที่ (1) ร่วมกับสมการฟังก์ชันรูปร่าง ณ ปมต่าง ๆ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะมีลักษณะโค้งมนบริเวณปม B ดังรูปที่ 3(ข)



รูปที่ 2 การคำนวณเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ณ ปมที่ i ใด ๆ



(ก) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น เมื่อเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปมต่าง ๆ เท่ากับ $\vec{a}_z$



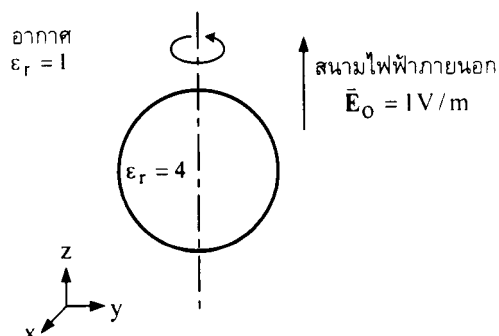
(ข) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น เมื่อเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปม B เท่ากับ $\vec{a}_x - \vec{a}_y + 0.1\vec{a}_z$

รูปที่ 3 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม เมื่อประยุกต์ใช้กับสมการที่ (1) ถึงสมการ (4)

ปัญหาการคำนวณสนามไฟฟ้า

บทความนี้ ผู้เขียนได้ประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีกับปัญหาการคำนวณสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ แบบจำลองมีลักษณะดังรูปที่ 4 ทรงกลมฉนวนมีรัศมีเท่ากับ 1 เมตรและมีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ (Relative Permittivity, ϵ_r) ภายในทรงกลมเท่ากับ 4 จุดศูนย์กลางของทรงกลมอยู่ที่พิกัด (0,0,0) บริเวณภายนอกทรงกลมเป็นอากาศค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 1 และมีสนามไฟฟ้าภายนอก, $\vec{E}_0$ เท่ากับ 1 V/m ในทิศทาง +z

การคำนวณสนามไฟฟ้า กระทำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระบบปฏิบัติการลินุกซ์ ซีพียู Pentium 4 ความเร็ว 3.0GHz และมีหน่วยความจำเท่ากับ 1.5GB

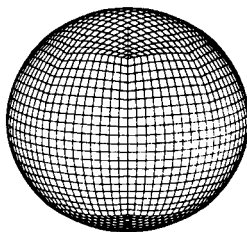


รูปที่ 4 แบบจำลองทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

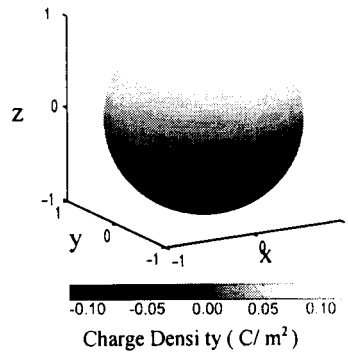
ผลการคำนวณและวิเคราะห์ผลการคำนวณ

การคำนวณสนามไฟฟ้า พื้นผิวของทรงกลมฉนวนถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม จำนวน 1,512 เอลิ-เมนต์. ทรงกลมฉนวนที่สร้างจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความถี่ แสดงดังรูปที่ 5 ส่วนกรณีที่คำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม พื้นผิวของทรงกลมฉนวนจะถูกแบ่งเป็น เอลิเมนต์ย่อย ๆ จำนวน 1,520 เอลิเมนต์ เมื่อคำนวณโดยวิธีประจุพื้นผิว หลังจากแก้ระบบสมการ $A\sigma = b$ จะได้ค่าความหนาแน่นประจุเชิงผิวเพื่อนำไปคำนวณสนามไฟฟ้า ณ จุดต่าง ๆ ต่อไป ความหนาแน่นประจุเชิงผิวแสดงดังรูปที่ 6 ความหนาแน่นประจุเชิงผิวจะสัมพันธ์กับทิศทางของสนามไฟฟ้า ภายนอกที่พุ่งผ่านทรงกลมฉนวน บริเวณที่สนามไฟฟ้าพุ่งเข้าทรงกลมฉนวน ความหนาแน่นประจุเชิงผิว มีค่าเป็นลบ ส่วนบริเวณที่สนามไฟฟ้าพุ่งออกจากทรงกลมฉนวน ความหนาแน่นประจุเชิงผิวมีค่าเป็น บวก จุดที่คำนวณสนามไฟฟ้า, z_m เริ่มจากจุด (0,0,0) จนถึง (0,0,2) สนามไฟฟ้าที่คำนวณได้ภายใน ทรงกลมมีค่าคงที่เท่ากับ 0.5 V/m สนามไฟฟ้าภายนอกมีค่าสูงสุดบริเวณผิวของทรงกลม เท่ากับ 2 V/m และมีค่าลดลงเรื่อยตามระยะ z_m ที่เพิ่มขึ้น จนมีค่าเท่ากับสนามไฟฟ้าภายนอกคือ 1 V/m รูปที่ 7 แสดงทิศทางสนามไฟฟ้าบริเวณภายในและภายนอกทรงกลมฉนวนที่ระนาบ $y = 0$ เมื่อ $(-2 \leq x \leq 2)$ และ $(-2 \leq z \leq 2)$ และมีรูปวงกลมแสดงขอบเขตของทรงกลมฉนวน

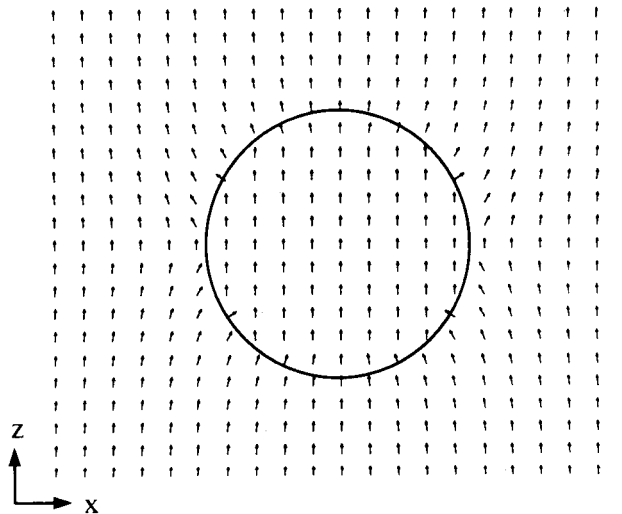
ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่จุด z_m ตามแนวแกน z เมื่อเปรียบเทียบกับ กรณีที่ใช้เอลิเมนต์แบบอื่น ๆ แสดงดังรูปที่ 8 โดยมีเส้นประแสดงขอบเขตของทรงกลมฉนวน เมื่อใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นในการคำนวณ ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ 1.61% เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบเชิงวิเคราะห์ การประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความถี่ ทำให้ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าลดลง ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้ามีค่าลดลง เหลือ 0.72% ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยที่ลดลงคิดเป็น 55.3% ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าเมื่อ ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความถี่มีค่าใกล้เคียงกับกรณีที่ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิว โค้งแก้ระดับชั้นความถี่ ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์มีระดับความโค้งและความต่อเนื่องของเอลิเมนต์ เท่ากัน รวมถึงในการคำนวณการกำหนดลักษณะการกระจายตัวของประจุไฟฟ้าต่อพื้นที่เอลิเมนต์เป็น แบบเชิงเส้น ทำให้ผลการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนที่ไม่แตกต่างกันมากนัก แต่ทั้งนี้ความคลาดเคลื่อน ดังกล่าวยังคงมีค่าต่ำกว่ากรณีที่ใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นทั้งสองแบบ



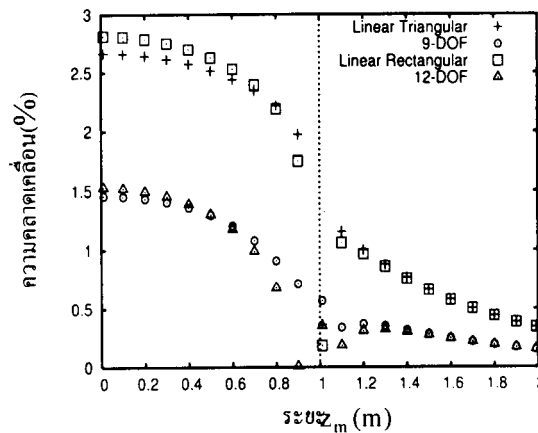
รูปที่ 5 ทรงกลมฉนวนที่สร้างจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความถี่



รูปที่ 6 ความหนาแน่นประจุเชิงผิวที่คำนวณได้



รูปที่ 7 เวกเตอร์สนามไฟฟ้าบนระนาบ $y=0$ เมื่อ $(-2 \leq x \leq 2)$ และ $(-2 \leq z \leq 2)$ เมตร



รูปที่ 8 ความผิดพลาดของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z เมื่อ $(0 < z_m < 2)$ เมตร

สรุป

บทความนี้ นำเสนอผลของการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าโค้งสิบสองระดับชั้น ความเร็วกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว ปัญหาทางวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูงที่ใช้เป็นตัวอย่างในการศึกษา ได้แก่ การคำนวณสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ ภายใต้การศึกษานี้ ผู้เขียนได้เปรียบเทียบผลการคำนวณกับกรณีที่ใช้เอลิเมนต์แบบอื่น ๆ ซึ่งได้แก่ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้น และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผืนผ้าโค้งเก้าระดับชั้นความเร็ว จากการคำนวณ พบว่า การประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าโค้งสิบสองระดับชั้นความเร็วกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว สามารถลดความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าลงได้ เมื่อเทียบกับกรณีที่ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมเชิงเส้น เมื่อใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ 1.61% เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าโค้งสิบสองระดับชั้นความเร็ว ทำให้ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้าลดลงเหลือ 0.72% หรือลดลงคิดเป็น 55.3%

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำวิจัยและเขียนบทความฉบับนี้ รวมถึงอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าทุกท่าน ที่กรุณาให้คำแนะนำ และความคิดเห็นต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง

เอกสารอ้างอิง

- นิติพงศ์ ปานกลาง. 2548. การใช้เอลิเมนต์ผืนผ้าโค้งเก้าระดับชั้นความเร็วกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว. วารสารวิศวกรรมศาสตร์ ราชชมงคล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยี ราชชมงคลธัญบุรี. 3, 5(มกราคม - มิถุนายน): 1-5.
- นิติพงศ์ ปานกลาง และ บุญชัย เตชะอำนาจ. 2546. การประยุกต์ใช้วิธีทำซ้ำในการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคด้วยวิธีประจุพื้นผิว. การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 26: 6-7 พฤศจิกายน; โรงแรมโกลเด้นแลนด์ จ.เพชรบุรี.
- Haznadar, Z. and Stih, Z. 2000. **Electromagnetic Fields, Wave and Numerical Methods**. Netherlands: IOS Press. pp. 120-122.
- Techaumnat, B. 2003. **12-DOF Element for Electric Field Calculation by the Boundary Element Method**. 13th International Symposium on High Voltage Engineering: Netherlands.