

ความสำคัญของวิชา คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกร

□ ศาสตราจารย์ ชลิต เวชชาชีวะ

วิชาคณิตศาสตร์นับว่าเป็นวิชาที่สำคัญมากวิชาหนึ่ง เพราะใช้เป็นพื้นฐานในสาขาต่าง ๆ หลายสาขา เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ ฯลฯ วิชาคณิตศาสตร์ที่สำคัญและนำไปใช้ในทางวิศวกรรมศาสตร์มากที่สุดวิชาหนึ่ง คือ วิชาสมการดิฟเฟอเรนเชียล วิชานี้เป็นวิชาที่สำคัญมาก เพราะในวิชาวิศวกรรมศาสตร์สาขาต่าง ๆ จะมีสมการเป็นรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียล แบบธรรมดา (Ordinary) หรือสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาเชียล (Partial) ปรากฏอยู่มาก และโดยมากจะบอกว่าสมการนั้น ๆ มีคำตอบ (solution) เป็นรูปอย่างไร แต่ไม่ได้บอกวิธีแก้สมการเพราะผู้ที่เรียนวิชาวิศวกรรมศาสตร์สาขาต่าง ๆ นั้น ต้องเรียนวิธีแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลมาก่อน เพื่อให้ท่านผู้อ่านได้ทราบว่าสมการดิฟเฟอเรนเชียลคืออะไรและมีที่ใช้ในที่ใดบ้าง จะขอกล่าวโดยย่อว่า สมการดิฟเฟอเรนเชียลคือสมการที่มีอนุพันธ์ (derivative) ของตัวแปรตาม (dependent variable) ที่เทียบกับตัวแปรอิสระ (independent variable) เกี่ยวข้องอย่างน้อยหนึ่งอนุพันธ์ และถ้ามีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวก็เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา แต่ถ้ามีมากกว่าหนึ่งตัวก็เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาเชียล นอกจากนี้ยังได้นำตารางที่ใช้สมการดิฟเฟอเรนเชียลมาแสดงไว้ด้วย ซึ่งมีทั้งหมดรวม 10 สมการ

ต่อไปจะแสดงวิธีแก้สมการที่ปรากฏในตารางเพียง 3 สมการดังต่อไปนี้

สมการที่ (3) เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา แสดงอัตราการไหลของกระแสไฟฟ้าต่อเวลา โดยมีแรงเคลื่อนไฟฟ้าสูงสุดเท่ากับ 100 โวลต์ และเป็นกระแสสลับที่มีความเร็วเชิงมุม $\omega = 2\pi f$ เมื่อ f คือความถี่ของกระแสไฟฟ้า มีหน่วยเป็น cycles/second สมการนี้จะหาคำตอบได้ดังต่อไปนี้

ก่อนอื่นสมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้อันดับสอง (Nonhomogeneous linear equation of order two) ขั้นแรกต้องหาสมการประกอบ (complementary

equation) ของสมการนี้ ซึ่งจะมีรูปสมการทางซ้ายมือเช่นเดียวกับสมการเดิม แต่ทางขวามือมีค่าเท่ากับศูนย์ คำตอบที่ได้ออกมาคือคำตอบประกอบ (complementary solution) ให้เท่ากับ I_c

สมการช่วยของสมการประกอบคือ

$$m^2 + 4m + 5 = 0$$

$$\text{หาค่าของ } m \text{ จะได้ } m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(5)}}{2}$$

$$= -2 \pm i$$

i เป็นค่าจินตภาพ (imaginary) มีค่าเท่ากับ $\sqrt{-1}$; m เป็นราก (roots) ของสมการช่วย คำตอบประกอบของสมการนี้ คือ

$$I_c = e^{-2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ (arbitrary constants)

ต่อไปหาคำตอบเฉพาะ (particular solution) เรียกว่า I_p วิธีหามีหลายวิธี สำหรับสมการนี้วิธีง่ายคือหาโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (Undetermined Coefficients)

สมการที่จะหาคำตอบเฉพาะจะมีรูปดังต่อไปนี้

$$\frac{d^2 I_p}{dt^2} + 4 \frac{d I_p}{dt} + 5 I_p = 100 \sin 20 t$$

จากทางขวามือของสมการเราทราบว่า

m' ซึ่งเป็นรากของสมการมี 2 ค่าคือ

$$m'_1 = 20 i \text{ และ } m'_2 = -20 i$$

$$\text{สมมติให้ } I_p = A \cos 20 t + B \sin 20 t$$

เมื่อ A และ B เป็นสัมประสิทธิ์ 2 ตัวที่ต้องการทราบค่า

$$\frac{d I_p}{dt} = -20 A \sin 20 t + 20 B \cos 20 t$$

$$\frac{d^2 I_p}{dt^2} = -400 A \cos 20 t - 400 B \sin 20 t$$

ดังนั้นเราจะได้ $-400 A \cos 20 t - 400 B \sin 20 t - 80 A \sin 20$

$$t + 80 B \cos 20 t + 5 A \cos 20 t + 5 B \sin 20 t = 100 \sin 20 t$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$- 395 A + 80 B = 0$$

$$- 395 B - 80 A = 100$$

แก้สมการทั้งสอง จะได้ $A = 0.053$ และ $B = 0.264$

$$\text{ดังนั้น } I_p = 0.053 \cos 20 t + 0.264 \sin 20 t$$

$$\begin{aligned} \text{คำตอบ } I &= I_c + I_p \\ &= e^{-2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ &\quad + 0.053 \cos 20 t + 0.264 \sin 20 t \end{aligned}$$

คำตอบที่ได้นี้เป็นคำตอบทั่วไป (general solution) ถ้าต้องการคำตอบเฉพาะเงื่อนไขบางประการก็ต้องกำหนดมาสองข้อเพื่อหาค่า c_1 และ c_2

สำหรับสมการ (4) เป็นสมการกึ่งเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาและสมการที่สำคัญในวิชาวิศวกรรมโยธาเป็นทฤษฎีของระยะโก่ง (deflections) ของคานแต่หาคำตอบได้ง่ายมากโดยการอินทิเกรตสมการสี่ครั้ง เพราะรูปสมการเป็นสมการเชิงเส้นอันดับที่สี่ $w(x)$ เป็นน้ำหนักของคานต่อหน่วยความยาว ส่วน E และ I เป็นตัวคงที่สมบูรณ์ (absolute constants) คือตัวคงที่ที่กำหนดค่าให้ค่าเดียว

คำตอบที่ได้คือ

$$E I y = \int \int \int \int w(x) dx + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

f คือ การอินทิเกรต $w(x) dx$ แต่ละครั้ง

สำหรับสมการสุดท้ายคือสมการ (10) เป็นสมการแบบพาเซิลและเป็นทฤษฎีของการวิเคราะห์แรง (theory of stress analysis)

ให้ตัวสัญลักษณ์ (operators) สองตัวคือ D และ D^*

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x} \text{ และ } D^* \equiv \frac{\partial}{\partial y}$$

จะเขียนสมการ (10) ในรูปของสัญลักษณ์ทั้งสองดังนี้

$$(D^4 + 2D^2 D^{*2} + D^{*4}) \phi = F(x, y)$$

ก่อนอื่นต้องหาคำตอบประกอบให้เท่ากับ ϕ_c

เราจะได้สมการ

$$(D^4 + 2D^2 D^{*2} + D^{*4}) \phi_c = 0$$

สมการข้างบนจะมีรูปเป็น $m^4 + 2m^2 + 1 = 0$

$$\text{หรือ } (m^2 + 1)^2 = 0$$

$$m^2 = -1 = i^2$$

$$m = \pm i$$

คือมีรากสี่ราก สองรากมีค่า i และอีกสองรากมีค่า $-i$

$$\begin{aligned} \phi_c = & f_1(y+ix) + f_1(y-ix) + x f_2(y+ix) + x f_2(y-ix) + i g_1(y+ix) \\ & - g_1(y-ix) + x g_2(y+ix) - x g_2(y-ix) \end{aligned}$$

คำตอบประกอบในสมการดิฟเฟอเรนเชียล ฟังก์ชัน $(y+ix)$ และ $(y-ix)$ จะเป็นรูปฟังก์ชัน (elementary function) ใดก็ได้ แต่ต้องคล้อยตาม (satisfy) สมการนั้นๆ ซึ่งผิดกับสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา ที่มีรูปคำตอบเป็นฟังก์ชันเชิงพลังก์ (exponential function) เท่านั้น

สำหรับคำตอบเฉพาะให้เท่ากับ ϕ_p นั้นก็แล้วแต่ $F(x,y)$ ถ้า $F(x,y)$ เป็นรูปฟังก์ชันเชิงพลังก์ (exponential function) เท่ากับ $5 e^{2x+y}$ ให้สมมุติว่า $\phi_p = A e^{2x+y}$ แล้วใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{array}{l|l} D\phi_p = 2 A e^{2x+y} & D^* \phi_p = D^{*2} \phi_p = D^{*3} \phi_p \\ D^2 \phi_p = 4 A e^{2x+y} & = D^{*4} \phi_p = A e^{2x+y} \\ D^3 \phi_p = 8 A e^{2x+y} & D^2 D^{*2} \phi_p = 4 A e^{2x+y} \\ D^4 \phi_p = 16 A e^{2x+y} & \end{array}$$

จากสมการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$16 A e^{2x+y} + 8 A e^{2x+y} + A e^{2x+y} = 5 e^{2x+y}$$

$$25 A = 5$$

$$A = \frac{1}{5} \quad \phi_p = \frac{1}{5} e^{2x+y}$$

คำตอบทั่วไป $\phi = \phi_c + \phi_p$

ผมขอจบบทความลงเพียงนี้ ก่อนจบไปร่อยรำลึ่มว่าวิศวกรที่ดีต้องเป็นนักคณิต

ศาสตร์ที่คล่อง.

Differential Equations	Applications
(1) $xy'' + y' + xy = 0$	(1) arises in mechanics, heat, electricity, aerodynamics, stress analysis, and many other fields.
(2) $\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$	(2) is famous in the field of mechanics, in connection with simple harmonic motion, as in small oscillations of a simple pendulum. It could, however arise in many other connections
(3) $\frac{d^2 I}{dt^2} + 4 \frac{dI}{dt} + 5I = 100 \sin 20t$	(3) might arise in the determination of the current I as a function of time t in an alternating current electric circuit.
(4) $EIy^{(IV)} = w(x)$	(4) is an important equation in civil engineering in the theory of beam deflections, or bending
(5) $y'' = \frac{w}{H} \sqrt{1 + (y')^2}$	(5) arises in connection with a problem relating to suspended cables.
(6) $v + m \frac{dv}{dm} = v^2$	(6) arose in a problem on rocket flight.

Differential Equations	Applications
$(7) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$	(7) could arise in heat, electricity aerodynamics, potential theory and many other fields.
$(8) \frac{\partial U}{\partial t} = k \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\}$	(8) arises in the theory of heat conduction as well as in the diffusion of neutrons in an atomic pile for the production of nuclear energy. It also arises in the theory of Brownian motion.
$(9) \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$	(9) arises in connection with the vibration of strings, as well as in the propagation of electric signals.
$(10) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = F(x,y)$	(10) is famous in the theory of stress analysis,