

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่น บางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบาง ที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านภายใต้การสั่นสะเทือน แบบอิสระเมื่อมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของ วัสดุ*

จิรวัดห์ วรุมโรจน์¹⁾ และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต²⁾

¹⁾ นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 40002

²⁾ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 40002

Email: jirawat_@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาและวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางและคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน กำหนดให้แบบจำลองมีอัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 0.25 ถึง 20 มีขนาดความหนาของคาน 5 มิลลิเมตร ซึ่งแบบจำลองมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ โดยในการวิเคราะห์ใช้ระเบียบวิธี Finite Element จากโปรแกรม ANSYS เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด จากนั้นได้ทำการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต เพื่อหาสมการความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นด้วยวิธี Multivariate Ratio of Polynomials Fit โดยในการศึกษาพบว่ารูปร่างโหมดและเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานสามารถบอกถึงความแตกต่างของพฤติกรรมการสั่นสะเทือนระหว่างแผ่นบางและคานได้ จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต ทำให้ได้เส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานและสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติกับอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต ในส่วนของการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุนั้นจะมีผลโดยตรงต่อค่าความถี่ธรรมชาติ ซึ่งทำให้ได้สมการความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติ อัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต และค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

คำสำคัญ : การสั่นสะเทือนแบบอิสระ, แผ่นบาง, คาน, ความถี่ธรรมชาติ, รูปร่างโหมด, ค่าคุณสมบัติเชิงกล

* รั้งต้นฉบับเมื่อวันที่ 5 เมษายน 2550 และได้รับบทความฉบับแก้ไขเมื่อวันที่ 14 พฤษภาคม 2550

The Transition Curve from Plate-Like to Beam-Like Behaviors in the Free Vibration of a Beam with both ends fixed and Variable Varied Mechanical Properties^{*}

Jirawat Waroonrod¹⁾ and Kiatfa Tangchaichit²⁾

¹⁾ Graduate Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University 4002

²⁾ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University 40002

Email: jirawat_@hotmail.com

ABSTRACT

This research studied and analyzed free vibration of a thin-plate beam with both ends fixed. The aspect ratio of the beam were assigned values of 0.25 to 20 while the thickness of the beam was fixed at 5 millimeters. Analysis of the beam was performed by using the finite element method of the ANSYS program. In the analysis, mechanical properties of the beam were varied to determine the natural frequencies and mode shapes. Results of the analysis were then used to study the influence of mechanical properties on natural frequency and mode shape by using the Multivariate Ratio of Polynomial Fit. The results of this study several that mode shape and the transition curve may be used to differentiate between the plate-like and the beam-like behaviors of the beam. The relationship between the natural frequency and the aspect ratio gives the transition curve of plate-like behavior and beam-like behaviors. Since the mechanical properties of the beam material is directly related with the natural frequency, the relationship between the frequency, the geometric ratio and the mechanical properties were established.

Keywords : free vibration, plate, beam, natural frequency, mode shape, mechanical property

^{*} Original manuscript submitted: April 5, 2006 and Final manuscript received: May 14, 2007

บทนำ

ค่าความถี่ธรรมชาติกับรูปร่างโหมดของการสั่นสะเทือนในคานและแผ่นบางจะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตและค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุนั้นๆ ซึ่งในปัจจุบันนี้การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่นิยม เพราะสามารถทำการวิเคราะห์คำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติลำดับสูงๆ และรูปร่างโหมดซึ่งมีความซับซ้อนยากที่จะทำการวิเคราะห์ให้ได้ผลคำตอบอย่างรวดเร็วและแม่นยำ

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบาง โดยทำการศึกษาวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางสี่เหลี่ยมเพื่อที่จะหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด โดยใช้วิธีของ Rayleigh-Ritz ทำการวิเคราะห์แผ่นบางที่มีรูปร่างสี่เหลี่ยมที่ถูกยึดแน่นทั้ง 4 ด้าน มีการสั่นสะเทือนแบบอิสระ พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติจากวิธีของ Rayleigh-Ritz เป็นค่าที่มีความแม่นยำถูกต้อง และยังสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับได้ (C.Rajalingham, R.B.Bhat, G.D.Xistria, 1996) จากการศึกษาถึงผลของตัวแปรในการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจากวิธีของ Rayleigh-Ritz พบว่า ค่าอัตราส่วนมีผลต่อรูปร่างโหมดที่โหมดค่าความถี่ธรรมชาติเดียวกัน และเมื่อแผ่นบางมีอัตราส่วนที่สูงขึ้นสามารถที่จะนำไปใช้วิเคราะห์แทนแบบของคานได้ (Hyde, et al, 2001) การวิเคราะห์โดยใช้วิธีการแบบ Differential Quadrature Method (DQM) ที่วัสดุมีคุณสมบัติเป็นแบบ Isotropic และ Orthotropic ผลของการศึกษาทำให้รู้ว่าการศึกษาวิธีการ DQM นี้ สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติที่แผ่นบางเป็นแบบ Isotropic และ Orthotropic ได้อย่างแม่นยำ (Ming-Hung Hsu, 2003) การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ถูกยึดแน่นทั้ง 4 ด้าน โดยวิเคราะห์เป็นแบบโมดอล (modal) และไม่เชิงเส้นซึ่งใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ พบว่า เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนเอลิเมนต์จะมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ (Y.Kobayashi, 2005) การศึกษาหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่เกิดการสั่นแบบอิสระโดยใช้วิธี Rayleigh-Ritz ซึ่งได้สมมุติการวิเคราะห์เปรียบเสมือนว่าวิเคราะห์คานในช่วงคานสถิตย์ โดยได้กำหนดให้แผ่นบางมีคุณสมบัติของวัสดุเป็น Isotropic, Homogeneous และมีความหนาคงที่ กำหนดให้แผ่นบางถูกยึดติดด้วยสปริงทั้งสองข้าง ผลของคำตอบนั้นได้ถูกนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่นๆ ซึ่งปรากฏว่ามีความถูกต้อง (Zhou Ding, 1995)

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคาน ได้ทำการศึกษาการสั่นสะเทือนอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นเกี่ยวกับรูปทรงเรขาคณิตของคานที่มีการยึดปลายทั้งสองด้าน โดยในการศึกษานี้ได้จำลองให้มีการแตกร้าด้วยการทำให้เป็นร่องที่ด้านบน ใช้การวิเคราะห์แบบจำลองจากวิธีการ Rayleigh-Ritz ในการสั่นแบบไม่เป็นเชิงเส้น พบว่า การแตกร้ามีอิทธิพลมาจากค่าความถี่ธรรมชาติและผลจาก Mode shapes ส่วนค่า amplitude ของความถี่ขึ้นอยู่กับค่าการแปรผันความถี่ของรอยแตกร้า (K.Ei Bikri, R.Benamar, M.M.Bennouna, 2006) การศึกษาโหมดมาตรฐานของคานที่มีการยึดที่ปลายสองด้านแบบการสั่นที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยทำการทดสอบเปรียบเทียบกับผลการทดลองจากหลายๆงานวิจัย พบว่า ผลที่ได้

สอดคล้องกัน กราฟเส้นโค้งการเพิ่มของ amplitude พบที่บริเวณใกล้กับปลายที่จับยึด (W.C.Xie, H.P.Lee, S.P.Lim, 2002) และการศึกษาวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่นโดยใช้ทฤษฎี Rayleigh-Ritz ร่วมกับโปรแกรม Matlab, วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์, ค่าคำนวณทางทฤษฎี และจากผลการทดลอง พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทั้ง 4 วิธีมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ในส่วนของการใช้วิธี Finite Element (โปรแกรม ANSYS) จะเป็นการคำนวณหาค่าที่ให้ความแม่นยำสูงและสามารถทำนายผลได้ทั้ง torsional mode และ bending mode (เกียรติฟ้า, 2548)

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางและคานยื่น ได้ทำการศึกษาเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่นที่มีการสั่นสะเทือนเป็นแบบอิสระ วิเคราะห์ด้วยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมในการสั่นสะเทือน ทำให้ได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต (นิตินงค์, เกียรติฟ้า, 2549) การศึกษาเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้านโดยใช้วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์มาช่วยวิเคราะห์ เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด ทำให้ได้เส้นโค้ง (พาราโบลา) ของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคาน โดยได้แสดงความสัมพันธ์ในรูปสมการโพลีโนเมียลอันดับ 2 (ชิตพล, เกียรติฟ้า, 2550) และการศึกษาเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านโดยใช้การวิเคราะห์ด้วยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่ารูปร่างโหมดและเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานสามารถบอกถึงความแตกต่างของพฤติกรรมการสั่นสะเทือนได้ ซึ่งทำให้ได้กราฟและสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติกับอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต (จิรวุฒน์, เกียรติฟ้า, 2550)

ในส่วนของค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุนั้นเป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่มีความสำคัญต่อเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานซึ่งใช้ในการจำแนกลักษณะของพฤติกรรมการสั่นสะเทือนในแผ่นบางและคาน จึงเป็นที่มาของงานวิจัยนี้ ซึ่งว่าด้วยการศึกษาถึงความสัมพันธ์จากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตของแผ่นบางและคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน

ทฤษฎีในการวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

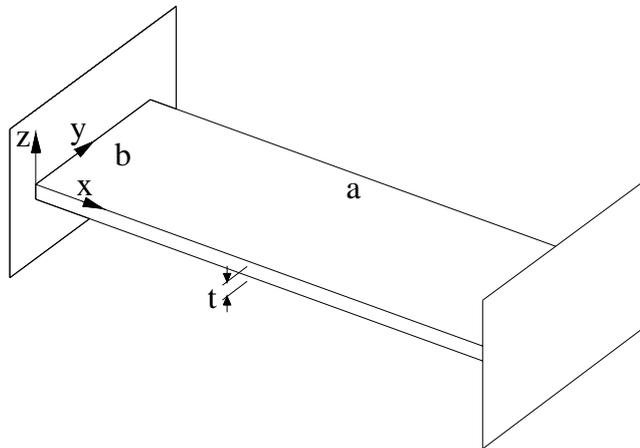
ในการแก้ปัญหาโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น จะต้องประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ค่าผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นจะประกอบด้วยค่าตัวแปรต่างๆตามตำแหน่งบนเอลิเมนต์และลักษณะของปัญหา โดยมีหลักการคือแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างๆกัน ผลเฉลยของแต่ละเอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการและเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาในแต่ละปัญหา ซึ่งในความหมายทางกายภาพคือการนำเอลิเมนต์เล็กๆมาประกอบเป็นขนาดใหญ่ จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงบนสมการชุดใหญ่แล้วทำการแก้สมการดังกล่าว ซึ่งจะได้ผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งต่างๆ ของปัญหา

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคาน และแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านภายใต้การสั่นสะเทือน แบบอิสระเมื่อมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

การสร้างแบบจำลองการศึกษา

รูปร่างของแบบจำลองการศึกษา

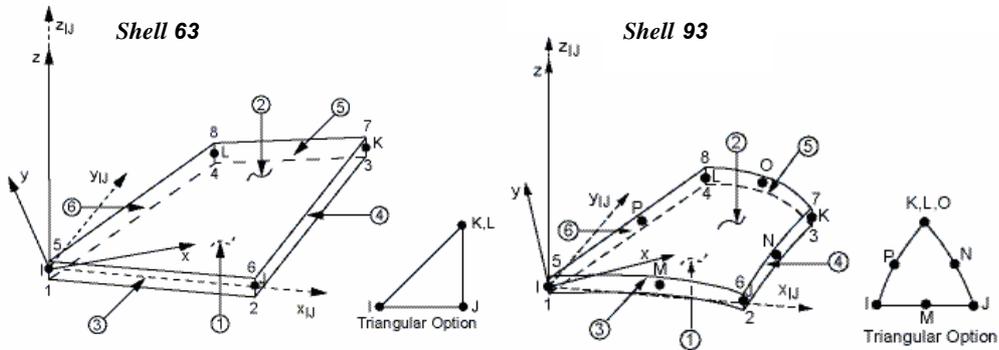
แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีลักษณะเป็นแผ่นบาง (Plate) หรือคาน (Beam) ถูกยึดแน่นที่ปลายทั้งสองด้าน ซึ่งมีขนาดความยาวคงที่ (a) 0.5 m. ความหนาคงที่ (t) 0.005 m. โดยที่ความกว้างของคาน (b) จะแปรผันตามอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต (Geometric Ratio; R) โดยที่ $R = a/b$ ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงรูปร่างแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์

การกำหนดชนิดของเอลิเมนต์ในแบบจำลองการศึกษา

ในการวิเคราะห์คำนวณหารูปร่างโหมด (mode shape) และค่าความถี่ธรรมชาติ จะใช้โปรแกรม ANSYS ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยกำหนดชนิดของเอลิเมนต์เป็นแบบ shell 93 ซึ่งเรียกว่า 8 node structural shell ซึ่งแต่ละ node มี 6 องศาความเป็นอิสระเปรียบเทียบกับชนิดของเอลิเมนต์ที่เป็นแบบ shell 63 ซึ่งเรียกว่า 4 node structural shell พบว่าเมื่อเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติของทั้งสองชนิดแล้วมีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย แต่แบบ shell 63 นั้น ค่าความถี่ธรรมชาติมีความแตกต่างกันในแต่ละจำนวนเอลิเมนต์ที่สูงกว่า ซึ่งเหตุผลนี้เองทำให้เลือกใช้ชนิดเอลิเมนต์เป็นแบบ shell 93 ซึ่งมีความเหมาะสมมากกว่า โดยรูปร่างของชนิดเอลิเมนต์ในแต่ละแบบแสดงไว้ในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงรูปร่างของชนิดเอลิเมนต์แบบ shell 63 (ซ้าย) และแบบ shell 93 (ขวา)

การแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ของแบบจำลองการศึกษา

ในการหาค่าจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีค่าเหมาะสมนั้น ได้ทำการแบ่งเอลิเมนต์เป็นสี่เหลี่ยมด้านเท่า กำหนดให้ด้านของความยาว (a) มีจำนวนเอลิเมนต์เป็น 40, 50, 60, 80, 100, 120 และ 150 ตามลำดับ และกำหนดให้ด้านของความกว้าง (b) มีจำนวนเอลิเมนต์แปรตามอัตราส่วนทางเรขาคณิต จากนั้นทำการทดสอบหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด เพื่อเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดจากแต่ละจำนวนเอลิเมนต์ ซึ่งพบว่าจำนวนเอลิเมนต์ที่มีค่าเหมาะสมในด้านความยาว (a) นั้นเท่ากับ 100 เอลิเมนต์ โดยมีเหตุผลคือเป็นจำนวนเอลิเมนต์ที่ให้ค่าความถี่ธรรมชาติใกล้เคียงกับกรณีจำนวนเอลิเมนต์ที่ 120 และ 150 อีกทั้งยังให้รูปร่างโหมดที่มีความละเอียด สามารถดูรูปร่างโหมดได้ดีทุกโหมด รวมไปถึงเวลาในการวิเคราะห์ที่ใช้้น้อยกว่ากรณี 120, 150 เอลิเมนต์ ส่วนในกรณีจำนวนเอลิเมนต์เป็น 40, 50, 60 และ 80 นั้น รูปร่างโหมดที่ได้จะมีความละเอียดไม่พอและไม่สามารถอ่านค่าได้ในบางโหมด

การกำหนดค่าคุณสมบัติเชิงกลของแบบจำลองการศึกษา

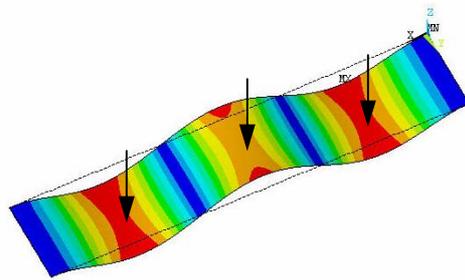
ในขั้นตอนแรกของการทดสอบนั้นได้กำหนดค่าตั้งต้นของแบบจำลองให้มีค่าคุณสมบัติเชิงกลเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน (Carbon Steel) และเป็นแบบ Linear Isotropic โดยค่าคุณสมบัติเป็นดังนี้ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) $E = 210 \text{ GN/m}^2$ ค่าความหนาแน่นของวัสดุ (Density) $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ และค่าอัตราส่วนพัวซอง (Poisson's Ratio) $\nu = 0.29$

การทดลองแบบจำลองการศึกษา

1. ทดสอบแบบจำลองที่มีจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 100 เอลิเมนต์ และแบบจำลองมีอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต (Geometric Ratio; R) จำนวน 26 ค่า ซึ่งมีอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเป็น 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 และ 20 เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่ 40 ค่าแรก

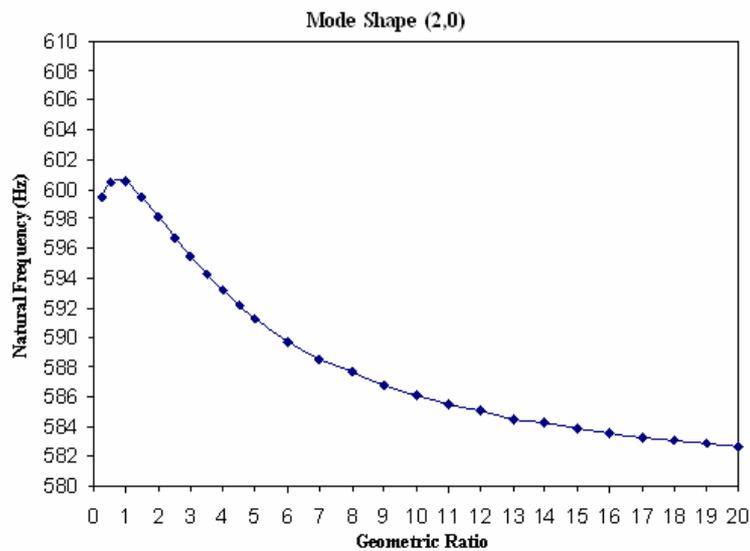
เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคาน 381
 และแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านภายใต้การสั่นสะเทือน
 แบบอิสระเมื่อมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

2. ทำการเลือกค่าความถี่ธรรมชาติจากรูปร่างโหมดที่แสดงถึงลักษณะของการสั่นสะเทือนในแผ่นบางหรือคาน กล่าวคือจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่รูปร่างโหมดของแบบจำลองเกิดการตัดตัวเท่านั้น ซึ่งในกรณีนี้แบบจำลองจะเกิดการสั่นขึ้น-ลงในแนวตั้งหรือเรียกว่า “โหมดตัดตัว (bending mode)” โดยจะเกิดการตัดตัวเป็นจุดตัดผ่านบนแกนความยาว (x) และไม่มีจุดตัดบนแกนความกว้าง (y) เมื่อเทียบกับสภาวะหยุดนิ่ง จำนวนจุดตัดบนแกนความยาว (x) และแกนความกว้าง (y) ของแบบจำลองให้เป็น (N_x, N_y) เช่น โหมด $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$, $(5,0)$ เป็นต้น ดังตัวอย่างแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงตัวอย่างรูปร่างโหมดของการตัดตัว $(2,0)$ ที่อัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเท่ากับ 5

3. นำค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้ในแต่ละโหมดจากทุกอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตมาพล็อตกราฟหาความสัมพันธ์กัน ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 4 ซึ่งจะพบว่าเมื่อค่าอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นค่าความถี่ธรรมชาติจะลดลงอย่างต่อเนื่อง



รูปที่ 4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตที่โหมด $(2,0)$

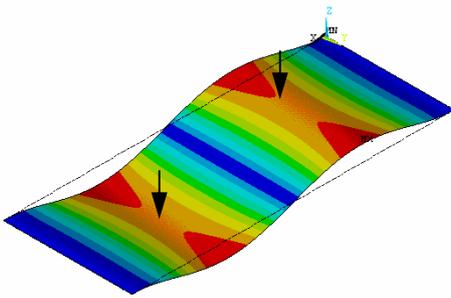
4. ทำการเลือกค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตที่โหนดต่างๆ เริ่มมีพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางเปลี่ยนเป็นพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนคล้ายคานจากรูปร่างโหนดของทุกอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตในข้อ 3 โดยพิจารณาดังนี้

พฤติกรรมของการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบาง คือ รูปร่างโหนดที่มีด้านความกว้าง (แนวแกน y) เกิดการตัดตัวไม่เป็นแนวเส้นตรง ซึ่งในอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตที่โหนดนี้จะเป็นพฤติกรรมการสั่นคล้ายแผ่นบาง (Plate)

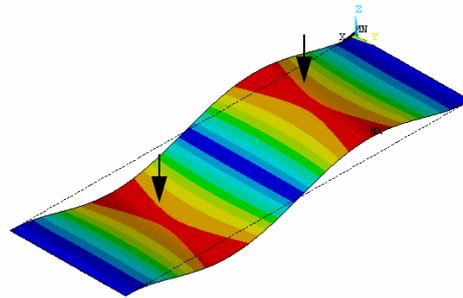
พฤติกรรมของการสั่นสะเทือนคล้ายคาน คือ รูปร่างโหนดที่มีด้านความกว้าง (แนวแกน y) เกิดการตัดตัวเป็นแนวเส้นตรง ซึ่งในอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตที่โหนดนี้จะเป็นพฤติกรรมการสั่นของคาน (Beam)

โดยจะยกตัวอย่างในกรณีของโหนด (1,0) ดังแสดงในรูปที่ 5 เป็นกรณีเปรียบเทียบรูปร่างโหนดเพื่อพิจารณาพฤติกรรมของการสั่นสะเทือน

พฤติกรรมการสั่นของแผ่นบาง



พฤติกรรมการสั่นของคาน



รูปที่ 5 แสดงการเปรียบเทียบพฤติกรรมการสั่นของแผ่นบางและคานโดยพิจารณาจากการสั่นที่บริเวณการตัดตัว หากมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง (รูปซ้าย) แสดงให้เห็นว่ามีพฤติกรรมการสั่นของแผ่นบาง แต่ถ้าการสั่นที่บริเวณการตัดตัวมีลักษณะเป็นเส้นตรง (รูปขวา) แสดงให้เห็นว่ามีพฤติกรรมการสั่นของคาน

5. นำคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุจากตารางที่ 1 มาทำการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลในแบบจำลอง โดยทำการแปรผันเฉพาะค่าความหนาแน่น (Density), ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity), ค่าอัตราส่วนพัวซอง (Poisson's Ratio) ตามตารางที่ 2 จากนั้นทำการทดลองซ้ำตามขั้นตอนที่ 1 ถึง 4 เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นจากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต โดยเปรียบเทียบกับกรณีที่ใช้ค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุตั้งต้นเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน (Carbon Steel)

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคาน
และแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านภายใต้การสั่นสะเทือน
แบบอิสระเมื่อมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

Materials	Density (kg/m^3)	Modulus of Elasticity GN/m^2	Poisson's Ratio
Carbon Steel	7850	210	0.29
Stainless Steel	8030	193	0.27
Aluminum Alloy	2700	70	0.33
Cast Iron	7370	175	0.25
Copper	8960	110	0.35
Titanium	4500	116	0.34

ตารางที่ 1 แสดงค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่นำมาใช้ในการทดสอบแบบจำลอง

กรณีการแปรผันค่า คุณสมบัติ เชิงกลของวัสดุ	ค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ		
	Density (kg/m^3)	Modulus of Elasticity GN/m^2	Poisson's Ratio
กรณีการแปรผันค่า ความหนาแน่น Density	7850	210	0.29
	8030	210	0.29
	2700	210	0.29
	7370	210	0.29
	8960	210	0.29
	4500	210	0.29
กรณีการแปรผันค่า โมดูลัสความยืดหยุ่น Modulus of Elasticity	7850	210	0.29
	7850	193	0.29
	7850	70	0.29
	7850	175	0.29
	7850	110	0.29
	7850	116	0.29
กรณีการแปรผันค่า อัตราส่วน พัวซอง Poisson's Ratio	7850	210	0.29
	7850	210	0.27
	7850	210	0.33
	7850	210	0.25
	7850	210	0.35
	7850	210	0.34

ตารางที่ 2 แสดงการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่ใช้ในการทดสอบแบบจำลอง

หมายเหตุ: การใช้ค่าความหนาแน่นเท่ากับ $7850 kg/m^3$, ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นเท่ากับ $210 GN/m^2$, ค่าอัตราส่วนพัวซองเท่ากับ 0.29 เป็นตัวคงที่ในแต่ละกรณี เนื่องจากต้องการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกล

ของวัสดุโดยมี 1 ค่าคุณสมบัติเชิงกลคงที่ ทั้งนี้เพื่อศึกษาถึงความสัมพันธ์ที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตของแผ่นบางและคาน

ผลการศึกษาและการวิเคราะห์ผล

กรณีไม่มีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

จากการทดลองพบว่าเมื่อทำการเลือกค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตที่ โหมดต่างๆเริ่มมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางเปลี่ยนเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน ในกรณีนี้ที่ค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุตั้งต้นเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน (Carbon Steel) โดยมีค่าตั้งนี้ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) $E = 210 \text{ GN} / \text{m}^2$ ค่าความหนาแน่นของวัสดุ (Density) $\rho = 7850 \text{ kg} / \text{m}^3$ และค่าอัตราส่วนพัวซอง (Poisson's Ratio) $\nu = 0.29$ จะได้ผลการทดลองเป็นไปดังตารางที่ 3

Mode Shape (x, y)	Geometric Ratio	Natural Frequency (Hz)
(0,0)	1.5	110.83
(1,0)	3.0	303.37
(2,0)	10.0	586.10
(3,0)	12.0	966.71
(4,0)	15.0	1440.00
(5,0)	18.0	2006.00

ตารางที่ 3 ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตที่โหมดต่างๆ เริ่มมีพฤติกรรมการสั่นคล้ายแผ่นบางเปลี่ยนเป็นพฤติกรรมการสั่นคล้ายคาน ในกรณีวัสดุเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน (Carbon steel)

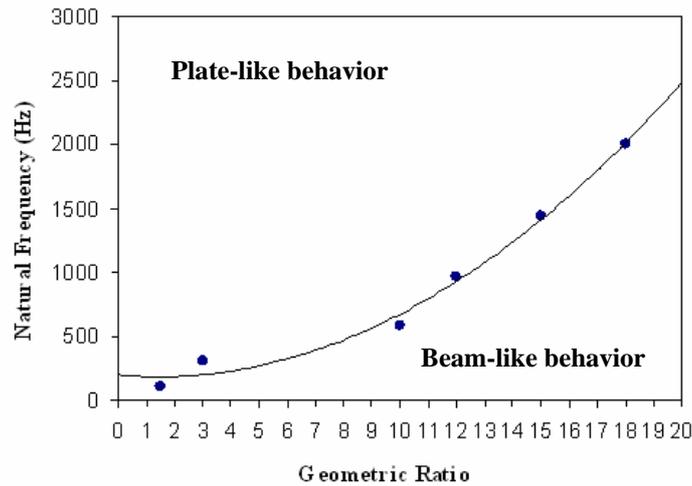
จากนั้นทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้ โดยนำค่าข้อมูลมาสร้างสมการพหุนามสี่เหลี่ยมด้วยวิธี Least Square Method ซึ่งสามารถหาความสัมพันธ์ของสมการค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตได้ ดังแสดงในสมการที่ 4

$$f = 6.7008R^2 - 19.46R + 196.97 \quad (1)$$

สมการที่ 1 นี้สามารถหาความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต เพื่อใช้ในการหาความแตกต่างระหว่างพฤติกรรมการสั่นแบบอิสระของแผ่นบางและคานได้ ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติที่มีอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเป็นค่าใดค่าหนึ่ง จะทำให้รู้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากสมการที่ 1 ซึ่งเป็นค่าความถี่ธรรมชาติที่สามารถจะแบ่งแยกพฤติกรรม

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคาน และแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านภายใต้การสั่นสะเทือนแบบอิสระเมื่อมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

สั่นสะเทือนทั้งสองแบบได้โดยความสัมพันธ์ของสมการความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตสามารถแสดงได้ในรูปที่ 6



รูปที่ 6 แสดงเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานในกรณีวัสดุเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน (Carbon steel)

จากรูปที่ 6 นี้จะแสดงถึงค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต และเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบาง (Plate-like behavior) เป็นพฤติกรรมคล้ายคาน (Beam-like behavior) ซึ่งจุดต่างๆ เหล่านี้เป็นจุดที่แสดงตำแหน่งของโหมดการตัด (0,0) ไปจนถึงโหมดการตัด (5,0) ที่มีค่าอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเป็น 1.5, 3, 10, 12, 15 และ 18 ตามลำดับ โดยค่าความถี่ธรรมชาติจะเพิ่มมากขึ้นไปในแต่ละโหมด จากกราฟความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต จะเห็นได้ว่ากราฟเป็นเส้นโค้งที่จะแยกพื้นที่ระหว่างส่วนด้านบนและด้านล่าง โดยส่วนของด้านบนจะเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระคล้ายแผ่นบาง และส่วนของด้านล่างจะเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระคล้ายคาน

กรณีแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าความหนาแน่น (Density)

กรณีแปรผันค่าความหนาแน่นของวัสดุ สามารถหาความสัมพันธ์ของสมการค่าความถี่ธรรมชาติกับอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเพื่อใช้ในการหาความแตกต่างระหว่างพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางและคานได้ ดังแสดงในสมการที่ 2, 3, 4, 5 และ 6 ที่ความหนาแน่นของวัสดุมีค่าเท่ากับ 8030, 2700, 4500, 7370 และ 8960 kg / m^3 ตามลำดับ

$$f = 6.6223R^2 - 19.219R + 194.73 \tag{2}$$

$$f = 11.415R^2 - 33.051R + 335.61 \quad (3)$$

$$f = 8.8362R^2 - 25.517R + 259.82 \quad (4)$$

$$f = 6.9129R^2 - 20.05R + 203.22 \quad (5)$$

$$f = 6.267R^2 - 18.165R + 184.3 \quad (6)$$

จากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุกรณีแปรผันเฉพาะค่าความหนาแน่นของวัสดุ เพื่อหาความสัมพันธ์จากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต โดยใช้วิธี Multivariate Ratio of Polynomials Fit จากโปรแกรม NCSS (Number Cruncher Statistical System) ทำการวิเคราะห์ สามารถแสดงผลของความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ 7

$$f = \frac{[176.3199 + 108.4441R - 13.3057R^2 - 6.191598 \times 10^{-2} \rho + 8.102464 \times 10^{-4} R\rho + 3.939351 \times 10^{-6} \rho^2]}{[1 - 0.1214978R + 2.775624 \times 10^{-3} R^2 - 4.548144 \times 10^{-5} \rho - 6.144487 \times 10^{-6} R\rho + 5.802192 \times 10^{-9} \rho^2]} \quad (7)$$

กรณีแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity)

กรณีแปรผันค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ สามารถหาความสัมพันธ์ของสมการค่าความถี่ธรรมชาติกับอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเพื่อใช้ในการหาความแตกต่างระหว่างพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางและคานาได้ ดังแสดงในสมการที่ 8, 9, 10, 11 และ 12 ที่โมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุมีค่าเท่ากับ 193, 70, 175, 110 และ 116 GN/m^2 ตามลำดับ

$$f = 6.4142R^2 - 18.529R + 188.6 \quad (8)$$

$$f = 3.8675R^2 - 11.225R + 113.71 \quad (9)$$

$$f = 6.1154R^2 - 17.757R + 179.81 \quad (10)$$

$$f = 4.8421R^2 - 13.979R + 142.35 \quad (11)$$

$$f = 4.9721R^2 - 14.353R + 146.18 \quad (12)$$

จากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุกรณีแปรผันเฉพาะค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ เพื่อหาความสัมพันธ์จากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต โดยใช้วิธี Multivariate Ratio of Polynomials Fit จากโปรแกรม NCSS ทำการวิเคราะห์ สามารถแสดงผลของความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ 13

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคาน 387
 และแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านภายใต้การสั้นสะท้อน
 แบบอิสระเมื่อมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

$$f = \frac{[-38.82515 + 64.04527R - 6.501905R^2 + 0.1821224E - 5.429229 \times 10^{-2} RE - 2.325544 \times 10^{-4} E^2]}{[1 - 0.1510492R + 1.962075 \times 10^{-3} R^2 - 1.126992 \times 10^{-3} E + 2.520485 \times 10^{-4} RE - 4.660397 \times 10^{-6} E^2]} \quad (13)$$

กรณีแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเฉพาะค่าอัตราส่วนพัชของ (Poisson's Ratio)

กรณีแปรผันค่าอัตราส่วนพัชของของวัสดุ สามารถหาความสัมพันธ์ของสมการค่าความถี่ธรรมชาติกับอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเพื่อใช้ในการหาความแตกต่างระหว่างพฤติกรรมการสั้นสะท้อนแบบอิสระของแผ่นบางและคานได้ ดังแสดงในสมการที่ 14, 15, 16, 17 และ 18 ที่อัตราส่วนพัชของของวัสดุมีค่าเท่ากับ 0.27, 0.33, 0.25, 0.35 และ 0.34 ตามลำดับ

$$f = 6.695R^2 - 19.437R + 196.27 \quad (14)$$

$$f = 6.6983R^2 - 19.414R + 197.91 \quad (15)$$

$$f = 6.6964R^2 - 19.413R + 195.75 \quad (16)$$

$$f = 6.7034R^2 - 19.431R + 198.69 \quad (17)$$

$$f = 6.7009R^2 - 19.424R + 198.29 \quad (18)$$

จากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุกรณีแปรผันเฉพาะค่าอัตราส่วนพัชของของวัสดุ เพื่อหาความสัมพันธ์จากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต โดยใช้วิธี Multivariate Ratio of Polynomials Fit จากโปรแกรม NCSS ทำการวิเคราะห์ สามารถแสดงผลของความสัมพันธ์ที่ได้ตั้งสมการที่ 19

$$f = \frac{[-14.73911 + 98.43509R - 11.23417R^2 - 183.558\omega - 5.069969R\omega + 333.776\omega^2]}{[1 - 0.152319R + 2.555046 \times 10^{-3} R^2 - 0.4012755\omega + 3.137296 \times 10^{-3} R\omega + 0.554692\omega^2]} \quad (19)$$

สรุปผลการศึกษา

การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดของการสั้นสะท้อนแบบอิสระในแผ่นบางและคาน โดยทั่วไปสามารถที่จะหาได้จากสมการอื่นๆ ซึ่งมีรูปแบบความสัมพันธ์ของสมการที่ชัดเจน แต่ลักษณะของพฤติกรรมการสั้นสะท้อนในแผ่นบางและคานนั้น ไม่สามารถที่จะระบุได้ว่าเป็นพฤติกรรมการสั้นสะท้อนของแผ่นบางหรือเป็นพฤติกรรมการสั้นสะท้อนของคาน ดังนั้นเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั้นสะท้อนคล้ายแผ่นบาง (Plate-like behavior) เป็นพฤติกรรมการ

สั่นสะเทือนคล้ายคาน (Beam-like behavior) จึงเป็นสิ่งที่ใช้ในการจำแนกพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางหรือคาน

โดยในงานวิจัยนี้ทำให้ทราบถึงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางหรือคานได้จากการหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติ รูปร่างโหมด และค่าอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต ทำให้ได้สมการความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตดังแสดงในสมการที่ 1 และกราฟเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบาง (Plate-like behavior) เป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน (Beam-like behavior) ดังแสดงในรูปที่ 5 จากการวิเคราะห์และศึกษาทำให้ทราบว่าที่โหมดของการตัดตัวใดๆ จะมีอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตและค่าความถี่ธรรมชาติค่าหนึ่งเป็นค่าที่สามารถบอกได้ว่า เป็นจุดที่จะเริ่มมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางเปลี่ยนเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน หรืออาจกล่าวได้ว่าถ้าเกิดการสั่นสะเทือนแบบอิสระที่โหมดการตัดตัวใดๆ จะมีอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตหรือค่าความถี่ธรรมชาติเป็นตัวที่จะบ่งบอกถึงลักษณะการสั่นสะเทือนนั้นจะมีพฤติกรรมการสั่นเป็นแบบไหน

ในส่วนของการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุกรณีการแปรผันค่าความหนาแน่น (Density) หรือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) จะมีผลโดยตรงต่อค่าความถี่ธรรมชาติ แต่ในกรณีที่แปรผันค่าอัตราส่วนพัชของ (Poisson's Ratio) นั้นจะมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติไม่มากนัก จึงทำให้ได้ความสัมพันธ์จากการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต เป็นไปดังสมการที่ 7, 13 และ 19 ซึ่งจากความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถสรุปเป็นแต่ละกรณีได้ดังนี้

กรณีแปรผันค่าความหนาแน่น (Density) พบว่าเมื่อค่าความหนาแน่นของวัสดุมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าลดลงที่อัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเดียวกัน

กรณีแปรผันค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) พบว่าเมื่อค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าเพิ่มขึ้นที่อัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเดียวกัน

กรณีแปรผันค่าอัตราส่วนพัชของ (Poisson's Ratio) พบว่าเมื่อค่าอัตราส่วนพัชของมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้นั้นมีค่าแตกต่างกันไม่มาก ที่อัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิตเดียวกัน

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคาน 389
และแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านภายใต้การสั่นสะเทือน
แบบอิสระเมื่อมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

สัญลักษณ์

a	ความยาวของแบบจำลอง (m)
b	ความกว้างของแบบจำลอง (m)
E	โมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ (GN/m^2)
f	ค่าความถี่ธรรมชาติ (Hz)
R	อัตราส่วนรูปร่างทางเรขาคณิต
t	ความหนาของแบบจำลอง (m)
ρ	ความหนาแน่นของวัสดุ (kg/m^3)
ν	ค่าอัตราส่วนพิวของของวัสดุ

เอกสารอ้างอิง

- เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2548. “การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่น.” *วิศวกรรมสาร มข.* ปีที่ 32, ฉบับที่ 6(พฤศจิกายน-ธันวาคม): 755-763
- จิรวุฒิ วรคุณโรจน์, เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2550. “เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน.” *วิศวกรรมสาร มข.* ปีที่ 34, ฉบับที่ 1 (มกราคม-กุมภาพันธ์): 105-117
- ชิตพล คงศิลา, เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2550. “เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้าน.” *วิศวกรรมสาร มข.* ปีที่ 34, ฉบับที่ 1 (มกราคม-กุมภาพันธ์): 119-132
- นิติพงศ์ โพธิ์ทอง, เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2549. “เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น.” *วิศวกรรมสาร มข.* ปีที่ 33, ฉบับที่ 2(มีนาคม-เมษายน): 155-167
- ปราโมทย์ เตชะอำไพ. 2537. *ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม.* กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- Bikri, K.El., Benamar, R., Bennouna, M.M. 2006. “Geometrically Non-Linear Free Vibration of Clamped-Clamped Beam with an Edge Crack.” *Computer and Structures.* 84: 485-502
- Hyde, K., Chang, J.Y., Bacca, C., Wickert, J.A. 2001. “Parameter Studies for Plane Stress in Plane Vibration of Rectangular Plates.” *Journal of Sound and Vibration.* 247, 3: 471-487

- Kobayashi, Y. 2005. **Reduced-Order Nonlinear Modal Equations of Plates Based on the Finite Element Method.** May 15,2006. <http://mech-me.eng.hokudai.ac.jp/~rd/labo/PDF/Reduce.pdf>
- Ming-Hung Hsu. 2003. "Vibration Analysis of Isotropic and Orthotropic Plates with Mixed Boundary Conditions." **Tamkang Journal of Science and Engineering.** 6, 4: 217-226
- Rajalingham, C., Bhat, R.B., Xistria, G.D. 1996. "Vibration of Rectangular Plates using Plate Characteristic Functions as Shape Functions in the Reyleigh-Ritz Method." **Journal of Sound and Vibration.** 193, 2: 497-509
- Singiresu, S.Rao. 2545. การสั่นทางกล. (กนต์ธร ชำนิประศาสน์, ผู้แปล). กรุงเทพฯ: เพียร์สันเอดิต ดูเคชั่นอินโดไชน่า.
- Xie, W.C., Lee, H.P., Lim, S.P. 2002. "Normal Modes of a Non-Linear Clamped-Clamped Beam." **Journal of Sound and Vibration.** 250, 2: 339-349
- Zhou Ding. 1995. "Natural Frequencies of Elastically Restrained Rectangular Plates using a set of Static Beam Functions in the Rayleigh - Ritz Method." **Elsevier Science.** 57, 4: 731-735.