

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่น บางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบาง ที่มีปลายอิสระทุกด้าน*

ชิตพล คงศิลา¹⁾ และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต²⁾

¹⁾ นักศึกษาระดับปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น 40002

²⁾ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น 40002

Email : chittapol_pol@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้เกี่ยวข้องกับเรื่องเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทั้งสี่ด้านมีหน้าตัดสม่ำเสมอ ได้ใช้การวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีของไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรม ANSYS มาช่วยวิเคราะห์เพื่อหาค่าของความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด (Mode Shape) ซึ่งจะได้เส้นโค้ง (รูปพาราโบลา) ของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทั้งสี่ด้าน โดยได้แสดงในรูปของสมการโพลิโนเมียลอันดับ 2

คำสำคัญ : พฤติกรรมคล้ายแผ่นบาง, พฤติกรรมคล้ายคาน, คานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทั้งสี่ด้าน, ความถี่ธรรมชาติ, รูปร่างโหมด

* รับต้นฉบับเมื่อวันที่ 13 ธันวาคม 2549 และได้รับบทความฉบับแก้ไขเมื่อวันที่ 15 มกราคม 2550

Transition curve from Plate-Like to Beam-Like Behavior of Free-Free Beams and Plates^{*}

Chittapol Kongsila¹⁾ and Kiatfa Tangchaichit²⁾

¹⁾ Graduate Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University 40002

²⁾ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University 40002

Email : chittapol_pol@hotmail.com

ABSTRACT

This paper deals about Transition curve from Plate-Like to Beam-Like Behavior of Free-Free Beams and Plates. The uniform cross section area of free-free beams and plates were used in this work. The finite element program (ANSYS) was used to analyze the free vibration of free-free beams and plates to set the natural frequencies and mode shapes. The transition curve from plate-like to beam-like behavior was obtained and was presented in the polynomial 2nd order equation.

Keywords : Plate-Like Behavior, Beam-Like Behavior, Free-Free Beams and Plates, Natural Frequency, Free Vibration, Mode Shape

^{*} Original manuscript submitted: December 13, 2006 and Final manuscript received: January 15, 2007

บทนำ

การศึกษาการสั่นสะเทือนของคานอิสระทั้ง 4 ด้านจะศึกษาเฉพาะการสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free Vibration) ซึ่งหมายความว่า การสั่นของระบบในลักษณะที่หลังจากมีการรบกวนระบบที่หยุดนิ่งอยู่ที่จุดสมดุลครั้งแรกเพื่อให้เกิดการสั่นขึ้นแล้ว การสั่นนั้นดำเนินต่อไปโดยไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำกับระบบอีกเลย การรบกวนระบบอาจจะเป็นการทำให้เกิดการขจัดเบี่ยงเบนหรือทำให้เกิดความเร็วเริ่มต้นหรือทั้งสองแบบ

การสั่นสะเทือนอย่างอิสระโดยทั่วไปแล้วจะมีอยู่ทั้งหมด 3 ประเภทคือการสั่นสะเทือนตามขวาง (Transverse Vibration), การสั่นสะเทือนตามแนวยาว (Longitudinal Vibration) และการสั่นสะเทือนโดยการบิด (Torsional Vibration) แต่ในการศึกษาในขั้นนี้จะพิจารณาเฉพาะการสั่นสะเทือนตามขวาง (Transverse vibration) อย่างเดียวเท่านั้น โดยจะพิจารณาการสั่นสะเทือนที่เป็นการสั่นสะเทือนแบบไม่มีความหน่วง (Undamped Vibration) หมายถึงการสั่นที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานให้กับสิ่งแวดล้อมของระบบ ไม่ว่าจะอยู่ในรูปแรงเสียดทานหรือแรงต้านอื่นใด ซึ่งเมื่อระบบเคลื่อนที่แบบไม่มีความหน่วงจะทำให้พลังงานรวมของระบบในระหว่างการเคลื่อนที่นี้มีค่าคงที่ การสั่นที่ไม่มีความหน่วงของระบบในความเป็นจริงจะเกิดขึ้นได้ในโอกาสเท่านั้น เพราะวัตถุที่เกิดการเคลื่อนที่โดยทั่วไปแล้วจะเกิดการสูญเสียพลังงานบ้างอย่างน้อยที่สุดก็จะสูญเสียพลังงานเนื่องจากแรงเสียดทานกับอากาศรอบข้าง สำหรับระบบที่เกิดการสั่นแบบไม่มีความหน่วงและเป็นการสั่นแบบอิสระความถี่ของการสั่นของระบบจะเรียกว่า ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ซึ่งความถี่ธรรมชาตินี้ถือว่าเป็นปริมาณที่มีความสำคัญมากในการออกแบบ ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด (Mode Shape) ของการสั่นสะเทือนนั้นสามารถหาได้ด้วยวิธีต่างๆ เช่น การคำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method), Raleigh-Ritz Method เป็นต้น

ในปัจจุบันนี้การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและ รูปร่างโหมด โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีที่นิยมโดยทำการวิเคราะห์หาค่านวนหาค่าความถี่ธรรมชาติลำดับสูงๆ และรูปร่างโหมด ซึ่งมีความซับซ้อนและยากที่จะทำการวิเคราะห์ ให้ผลคำตอบได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำ ทั้งนี้สมการของความถี่ธรรมชาติและสมการของรูปร่างโหมด ที่หามาได้ทางทฤษฎีจะไม่สามารถแยกแยะพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนแบบอิสระได้เลยว่า ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่ได้มานั้นมีพฤติกรรมการสั่นแบบแผ่นบางหรือมีพฤติกรรมการสั่นแบบคานได้ ด้วยเหตุนี้จึงได้ใช้การวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีของไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรม ANSYS มาช่วยวิเคราะห์เพื่อหาความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด เพื่อช่วยแยกแยะพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระให้เห็นลักษณะทางกายภาพได้อย่างชัดเจน เช่น ทำการศึกษาการสั่นสะเทือนอย่างอิสระของแผ่นบางโดยการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากแผ่นบางรูปสามเหลี่ยมกับรูปทรงตัวแอล (L) (A. Houmat, 2005), หาค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดจากการสั่นอย่างอิสระของแผ่นบางที่วางซ้อนทับกัน (N. S. Bardell, J. M. Dunsdon & R. S. Langley, 1995), หาค่าความถี่ธรรมชาติจากแผ่นบางยื่นและคานยื่นซึ่งจะได้เส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมคล้าย

แผ่นบางยื่นไปเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น (นิตยพจน์, 2549) การวิเคราะห์จากทฤษฎี Rayleigh-Ritz Method มาประยุกต์ใช้หาค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดจากการสั่นสะเทือนของคานยื่น (เกียรติฟ้า, 2548)

การวิเคราะห์ทางทฤษฎี

สมการของการเคลื่อนที่ (Equation of motion)

สมการของการเคลื่อนที่สำหรับการสั่นสะเทือนของคานดังแสดงในสมการที่ (1) โดยพิจารณา คานที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอใช้ทฤษฎีของ Euler-Bernoulli Beam (M. Boltezar, B. Strancar and A. Kuhelj, 1998), (G. C. Nihous, 1997), (X. Q. Liu and R. C. Ertekin and H. R. Riggs, 1996), (C. L. Kirk and S. M. Wiedemann, 2002), (S.P. Timoshenko, 1990) และไม่คิดการเสียรูปเฉือน (Shear deformation) รูปของคานได้แสดงไว้ในรูปที่ 1(ก) (X. Q. Liu and R. C. Ertekin and H. R. Riggs, 1996) ด้านซ้ายของคานได้กำหนดให้ $X = 0$ ด้านขวากำหนดให้ $X = L$ เอลิเมนต์เล็กๆขนาด dX ได้แสดงไว้ในรูปที่ 1(ข) เมื่อใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน (Newton's second law) กับเอลิเมนต์เล็กๆจะได้ สมการของการเคลื่อนที่ที่ครอบคลุมการสั่นสะเทือนตามขวางของคาน สมการที่ (1) เป็นสมการสำหรับการสั่นสะเทือนของคาน

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} - T \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

เมื่อ

EI = ความแข็งแกร่งของการโก่งตัว (Flexural rigidity)

E = Young's modulus (N/m^2)

I = Area moment of inertia (m^4)

ρ = ความหนาแน่น (kg/m^3)

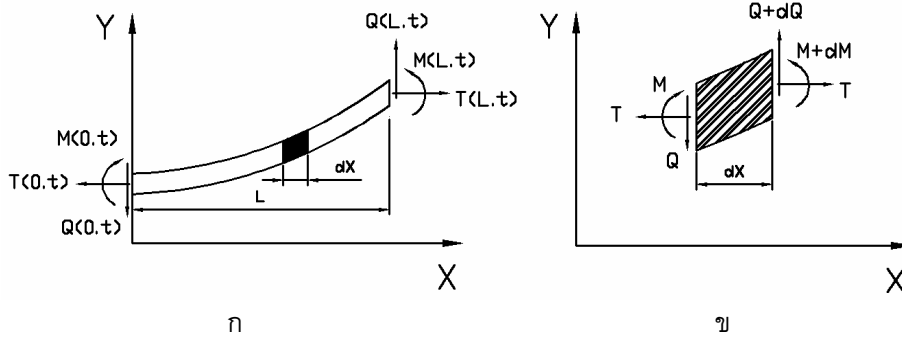
A = พื้นที่หน้าตัด (m^2)

M = โมเมนต์ดัด (N.m)

T = ภาระในแนวแกนที่ขนานกับแกน X (N)

Q = แรงเฉือน (Shear force) ในหน้าตัดแนวดิ่ง (N)

t = เวลา (Second)



รูปที่ 1 (ก) คานอยู่ภายใต้ภาระแรงดิ่งในแนวแกนและ (ข) แรงบนเอลิเมนต์เล็ก ๆ

สมดุลโมเมนต์การดัด(Bending moment equilibrium)

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของคานอิสระทั้งสองด้าน (Free-free beam) โมเมนต์การดัดเป็นศูนย์

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \right|_{X=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \right|_{X=L} = 0$$
(2)

สมดุลแรงเฉือน(Shear force equilibrium)

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของคานอิสระทั้งสองด้าน (Free-free beam) แรงเฉือนเป็นศูนย์

$$Q(0,t) = - \left\{ EI \frac{\partial^3 Y}{\partial X^3} - T \frac{\partial Y}{\partial X} \right\} \bigg|_{X=0} = 0$$

$$Q(L,t) = - \left\{ EI \frac{\partial^3 Y}{\partial X^3} - T \frac{\partial Y}{\partial X} \right\} \bigg|_{X=L} = 0$$
(3)

สมการของการเคลื่อนที่และเงื่อนไขขอบเขตได้ถูกทำให้ไร้มิติโดยใช้พารามิเตอร์ไร้มิติ (Non-dimensional parameters) ดังนี้

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad k^2 = \frac{TL^2}{EI}$$

$$\beta_i^4 = \rho A \omega_i^2 L^4 / EI \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \infty)$$
(4)

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นของคาน A คือพื้นที่หน้าตัดของคาน และ ω คือความถี่ของการสั่นสะเทือน L คือความยาวของคาน กำหนดให้มีการสั่นแบบฮาร์โมนิก (Harmonic Vibration) สมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตกลายเป็น

$$y^{(iv)} - k^2 y'' - \beta^4 y = 0 \quad (5)$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad - \left\{ \frac{d^3 y}{dx^3} - k^2 \frac{dy}{dx} \right\} \bigg|_{x=0} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0, \quad - \left\{ \frac{d^3 y}{dx^3} - k^2 \frac{dy}{dx} \right\} \bigg|_{x=l} = 0$$

ผลเฉลยของสมการที่ (5) คือ

$$y(x) = A \cosh(\alpha_1 x) + B \sinh(\alpha_1 x) + C \cos(\alpha_2 x) + E \sin(\alpha_2 x) \quad (7)$$

เมื่อ α_1 และ α_2 คือ

$$\alpha_1 = \left(\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \beta^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 = \left(-\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \beta^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

ค่าคงที่ A, B, C, D และ E หาจากเงื่อนไขขอบเขต สำหรับ α_1, α_2 และ k มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha_1^4 - k^2 \alpha_1^2 &= \beta^4 \\ \alpha_2^4 + k^2 \alpha_2^2 &= \beta^4 \\ \alpha_1^2 \alpha_2^2 &= \beta^4 \\ \alpha_1 \alpha_2 &= \beta^2 \\ \alpha_1^2 - k^2 &= \alpha_2^2 \\ \alpha_2^2 + k^2 &= \alpha_1^2 \end{aligned} \quad (9)$$

สมการลักษณะจำเพาะ(Characteristic equation)

$$2\beta^6[1 - \cosh(\alpha_1)\cos(\alpha_2)] + (\alpha_2^6 - \alpha_1^6)\sinh(\alpha_1)\sin(\alpha_2) = 0 \quad (10)$$

สมการที่ (10) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ Stiffness parameter k และความถี่ไร้มิติ β โดยกำหนดให้

$$\alpha_2^6 - \alpha_1^6 = -(k^6 + 3\beta^4 k^2) \quad (11)$$

สมการลักษณะจำเพาะ (10) จึงกลายเป็น

$$2\beta^6[1 - \cosh(\alpha_1)\cos(\alpha_2)] - k^2(k^4 + 3\beta^4)\sinh(\alpha_1)\sin(\alpha_2) = 0 \quad (12)$$

แต่เนื่องจากวิเคราะห์คานอิสระที่ไม่มีภาระในแนวแกน (Free-free beam without axial load) สมการลักษณะจำเพาะ (12) กลายเป็น

$$1 - \cosh(\beta_i)\cos(\beta_i) = 0 \quad (13)$$

การพิจารณารูปร่างโหมดสำหรับคานที่มีแรงในแนวแกนใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ (6) จะได้สมการที่ (7) ใหม่คือ

$$y(x) = A[\cosh(\alpha_1 x) + (\alpha_1^2 / \alpha_2^2)\cos(\alpha_2 x)] + B[\sinh(\alpha_1 x) + (\alpha_2 / \alpha_1)\sin(\alpha_2 x)] \quad (14)$$

หรือ

$$y(x) = B[c_1 \sinh(\alpha_1 x) + c_2 \cosh(\alpha_1 x) + c_3 \sin(\alpha_2 x) + c_4 \cos(\alpha_2 x)] \quad (15)$$

แต่เนื่องจากวิเคราะห์กรณีคานอิสระที่ไม่มีภาระในแนวแกน (Free-free beam without axial load) ใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ (13) สมการของ Mode shape (15) จึงกลายเป็น

$$y_i(x) = \frac{1}{2} \{ \cosh(\beta_i x) + \cos(\beta_i x) + B(\sinh(\beta_i x) + \sin(\beta_i x)) \} \quad (16)$$

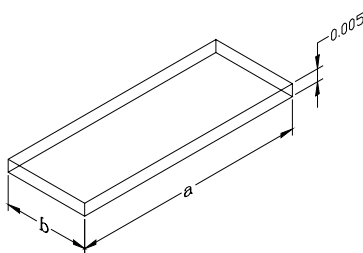
เมื่อสัมประสิทธิ์ B คือ

$$B = - \frac{\{ \cosh(\beta_i) - \cos(\beta_i) \}}{2 \{ \sinh(\beta_i) - \sin(\beta_i) \}} \quad (17)$$

สำหรับสมการของความถี่ธรรมชาติ $\omega_i (i = 1, 2, 3, \dots, \infty)$ ซึ่งมี $\beta_i (i = 1, 2, 3, \dots, \infty)$ หาได้จากสมการที่ (4)

การทดลอง

สร้างแบบจำลองการสั่นสะเทือนของคานอิสระทั้งสี่ด้านโดยใช้โปรแกรม ANSYS แบบจำลองที่สร้างขึ้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 2 การวิเคราะห์คานอิสระทั้งสี่ด้านจะกำหนดอัตราส่วนเรขาคณิตต่าง ๆ กัน ซึ่งค่าอัตราส่วนเรขาคณิต $r = a/b$ เมื่อ a คือ ความยาวของคานซึ่งกำหนดให้มีค่าคงที่เป็น 0.5 m. และ b คือความกว้างของคานซึ่งจะเปลี่ยนแปลงไปตามค่าอัตราส่วนเรขาคณิต โดยใช้อัตราส่วนเรขาคณิต (r) จำนวน 18 ค่าได้แก่ 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20 และได้กำหนดค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุสำหรับเหล็กกล้า (Carbon steel) ซึ่งมีความหนาแน่นเป็น 7850 kg/m^3 ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นเป็น 210 GN/m^2 และค่าอัตราส่วนพัวซองเป็น 0.29 จากนั้นคำนวณหาค่า Mode Shape จำนวน 40 ค่าแรกโดยใช้โปรแกรม ANSYS



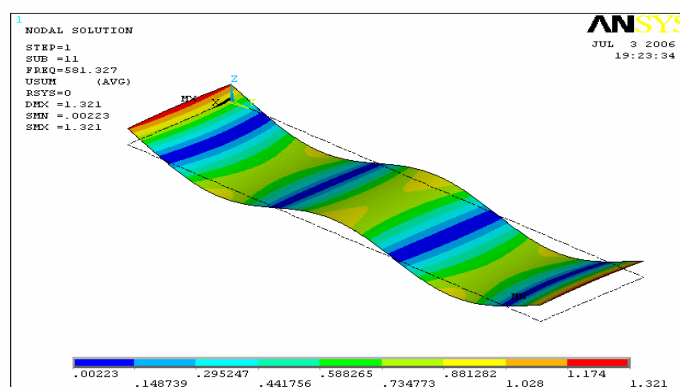
รูปที่ 2 แบบจำลองของคานอิสระทั้งสี่ด้าน

ลำดับขั้นตอนการทดลอง

1. เริ่มโดยใช้โปรแกรม ANSYS ในการสร้างแบบจำลอง เลือกประเภทของการวิเคราะห์เป็นแบบ Modal เพราะว่าการวิเคราะห์แบบ Modal เหมาะสมกับการวิเคราะห์หาความถี่ธรรมชาติและ Mode Shape กำหนดคุณสมบัติของวัสดุให้เป็นโครงสร้างแบบ Elastic หมายความว่าวัสดุที่ศึกษาจะอยู่ในช่วง Proportional Limit ซึ่งความเค้นแปรผันโดยตรงกับความเครียดเมื่อมีการสั่นสะเทือนจะเสียรูปชั่วคราว และ Isotropic ซึ่งคุณสมบัติ Isotropic จะแสดงถึงคุณสมบัติของโลหะเหนียวซึ่งมีผลึกที่เหมือนกันทุกทิศทาง และเลือกใช้เอลิเมนต์ประเภทเชลล์แบบ 8 จุดข้อ (8 node structural shell) ซึ่งเรียกว่า SHELL 93 โดย 1 เอลิเมนต์จะมีทั้งหมด 8 node ซึ่งแต่ละ node จะมี 6 ลำดับขั้นความเป็นอิสระ (degrees of freedom ;DOF) นั่นก็คือมีการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น (Translations) ในทิศทางของแกน X, Y และ Z และมีการเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotations) รอบแกน X, Y และ Z ซึ่งจะให้ผลเฉลยที่มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าเอลิเมนต์ประเภท SHELL 63 ซึ่งมีเพียง 4 node เท่านั้นต่อ 1 เอลิเมนต์ (Saeed

Moaveni, 1999) สร้างแบบจำลองโดยกำหนด Mesh เป็นแบบสี่เหลี่ยม (Quadrilateral Mesh) โดย Mesh สี่เหลี่ยมจะให้ผลเฉลยที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า Mesh แบบสามเหลี่ยม (Triangular Mesh) ระบุคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุซึ่งมีความหนาแน่นเป็น 7850 kg/m^3 ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นเป็น 210 GN/m^2 และค่าอัตราส่วนพัวซองเป็น 0.29 กำหนดจำนวนของเอลิเมนต์ในด้านความยาวของคานตั้งแต่ 40, 50, 60, 80, 100, 120, 150 หลังจากที่ได้เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่จำนวนเอลิเมนต์ด้านความยาวของคานต่างๆ สามารถเลือกจำนวนเอลิเมนต์ด้านความยาวของคานที่เหมาะสมที่สุดเป็น 100 เอลิเมนต์ หรือมีความยาวเอลิเมนต์เท่ากับ 0.005 m. ส่วนจำนวนเอลิเมนต์ด้านความกว้างจะแปรผันตามค่าอัตราส่วนเรขาคณิต เหตุผลที่เลือกจำนวนเอลิเมนต์ด้านความยาวเป็น 100 เพราะจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ใกล้เคียงกับจำนวนเอลิเมนต์ที่ด้านความยาวเป็น 120, 150 ซึ่งจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า และได้ Mode Shape ที่มีความละเอียดมากกว่าจำนวนเอลิเมนต์ด้านความยาวที่เป็น 40, 60, 80 (นิติงศ์, 2549)

2. ทำการทดสอบแบบจำลองโดยเริ่มอัตราส่วนเรขาคณิต (r) ที่ $r=0.25, 0.5, 1$, ถึง 20 ที่คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ ซึ่งมีค่าความหนาแน่น, ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นและค่าอัตราส่วนพัวซองเหมือนกันในแต่ละอัตราส่วนเรขาคณิตจะพิจารณารูปร่างโหมด (Mode Shape) เฉพาะการสั่นสะเทือนตามขวาง (Transverse Vibration) กรณีเดียวกันนั้น พิจารณารูปที่ 3 แสดง Mode Shape ที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานสำหรับ Mode 4 ที่อัตราส่วนเรขาคณิต $r=4$ การพิจารณาลำดับโหมดจะเริ่มพิจารณาตั้งแต่ลำดับ Mode 1 ถึง Mode 10 การนับลำดับโหมดจะนับจำนวนที่ตัดกันของเส้นที่ไม่เสียรูป (Undeform) และเส้นที่เสียรูป (Deform) ในด้านความยาวของคาน

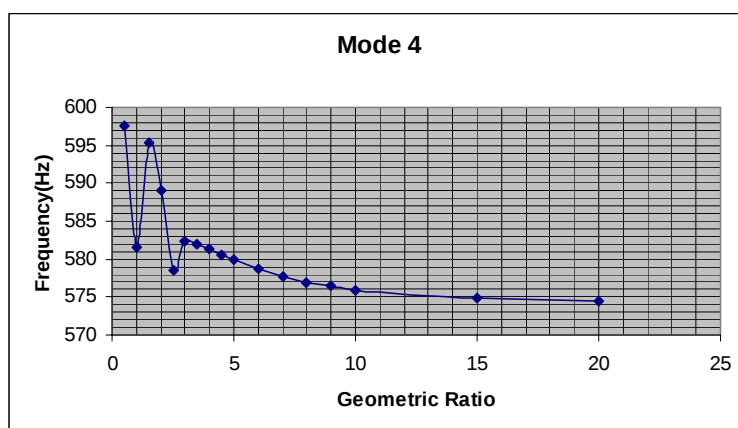


รูปที่ 3 Mode Shape ที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานสำหรับ Mode 4 ที่ Geometric Ratio $r=4$

3. ในแต่ละอัตราส่วนทางเรขาคณิตเมื่อพิจารณารูปร่างโหมด (Mode Shape) ครบลำดับโหมดที่สนใจแล้วตั้งแต่ Mode 1 ถึง Mode 10 นำความถี่ธรรมชาติที่ได้มาหาความสัมพันธ์กับอัตราส่วนทาง

เรขาคณิตดังแสดงไว้ในรูปที่ 4 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของอัตราส่วนเรขาคณิตและค่าความถี่ธรรมชาติที่ Mode 4 จุดที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานของ Mode 4 จะเกิดขึ้นที่อัตราส่วนเรขาคณิต $r=4$ จะเห็นว่าก่อนจุดที่ $r=4$ ค่าความถี่จะมีการเปลี่ยนแปลงขึ้นลงซึ่งถือว่ามีความถี่พฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบแผ่นบาง พิจารณารูปที่ 5 แสดง Mode Shape ที่มีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางสำหรับ Mode 4 ที่อัตราส่วนเรขาคณิต $r=3$ สังเกตปลายด้านกว้างทั้งสองข้างของคานจะมีการโก่งตัวสูงสุดเกิดขึ้นที่บริเวณนี้ซึ่งการโก่งตัวสูงสุดจะเกิดขึ้นไม่ตลอดแนวความกว้างของคานและมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง และหลังจากจุด $r=4$ นี้ไป ค่าความถี่ธรรมชาติจะมีขนาดที่ลดลงอย่างต่อเนื่องซึ่งแสดงว่ามีความถี่พฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบคาน พิจารณารูปที่ 6 แสดง Mode Shape ที่เริ่มมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานสำหรับ Mode 4 ที่อัตราส่วนเรขาคณิต $r=5$ สังเกตปลายด้านกว้างทั้งสองข้างของคานจะมีการโก่งตัวสูงสุดเกิดขึ้นที่บริเวณนี้ซึ่งการโก่งตัวสูงสุดจะเกิดขึ้นตลอดแนวความกว้างของคานและมีลักษณะเป็นเส้นตรง

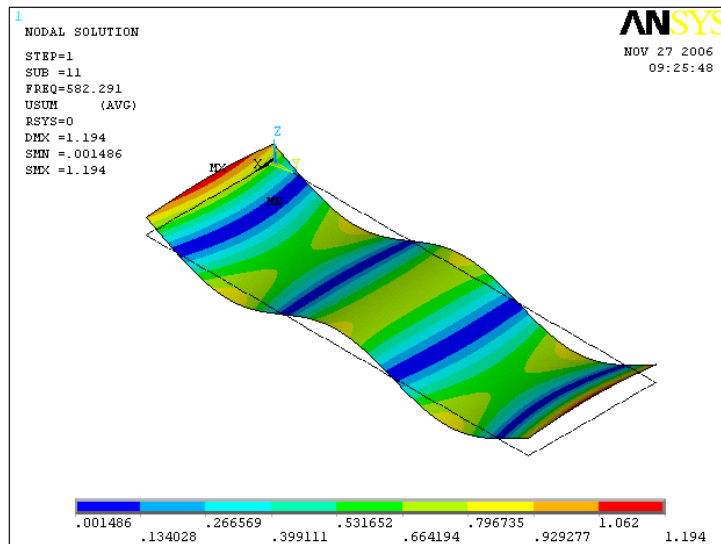
การที่จะระบุว่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตใดเป็นจุดที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานนั้น จากรูปที่ 3 แสดง Mode Shape ที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานสำหรับ Mode 4 ที่อัตราส่วนเรขาคณิต $r=4$ โดยจะพิจารณา Mode Shape ของลำดับโหมดที่สนใจแล้วสังเกตปลายด้านกว้างทั้งสองข้างของคานจะมีการโก่งตัวสูงสุดเกิดขึ้นที่บริเวณนี้ซึ่งการโก่งตัวสูงสุดจะเกิดขึ้นตลอดแนวความกว้างของคานและมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง



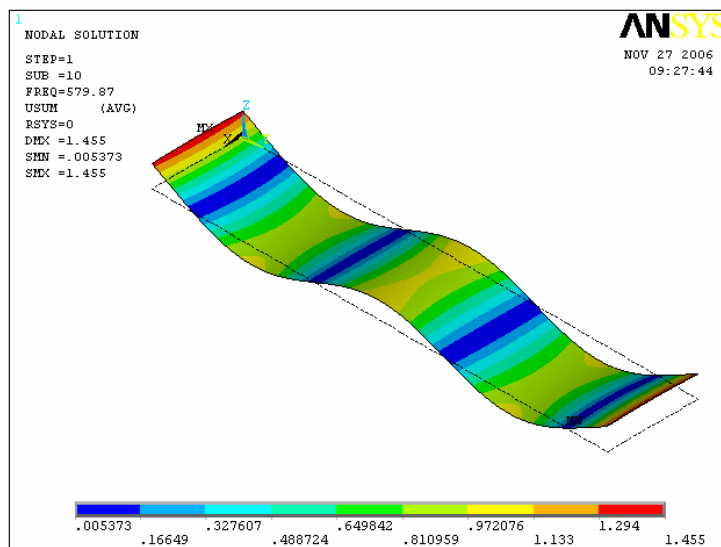
รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนเรขาคณิตและค่าความถี่ธรรมชาติที่ Mode 4

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคาน
และแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้าน

129



รูปที่ 5 Mode Shape ที่มีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางสำหรับ Mode 4 ที่ Geometric Ratio $r = 3$



รูปที่ 6 Mode Shape ที่เริ่มมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานสำหรับ Mode 4 ที่ Geometric Ratio $r = 5$

ผลการทดลอง

ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนเรขาคณิตของแผ่นบางที่โหมดต่างๆ ที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานในกรณีค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุสำหรับเหล็กกล้า (Carbon steel) ซึ่งมีความหนาแน่นเป็น

7850 kg/m³ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นเป็น 210 GN/m² และค่าอัตราส่วนพัวซองเป็น 0.29 แสดงไว้ในตารางที่ 1

Mode	Natural Frequency (f)	Geometric Ratio (r)
2	106.82	2.5
3	296.13	3
4	581.33	4
5	961.21	5
6	1435.2	6
7	2002.4	7
8	2662	8
9	3412.9	9
10	4254.1	10

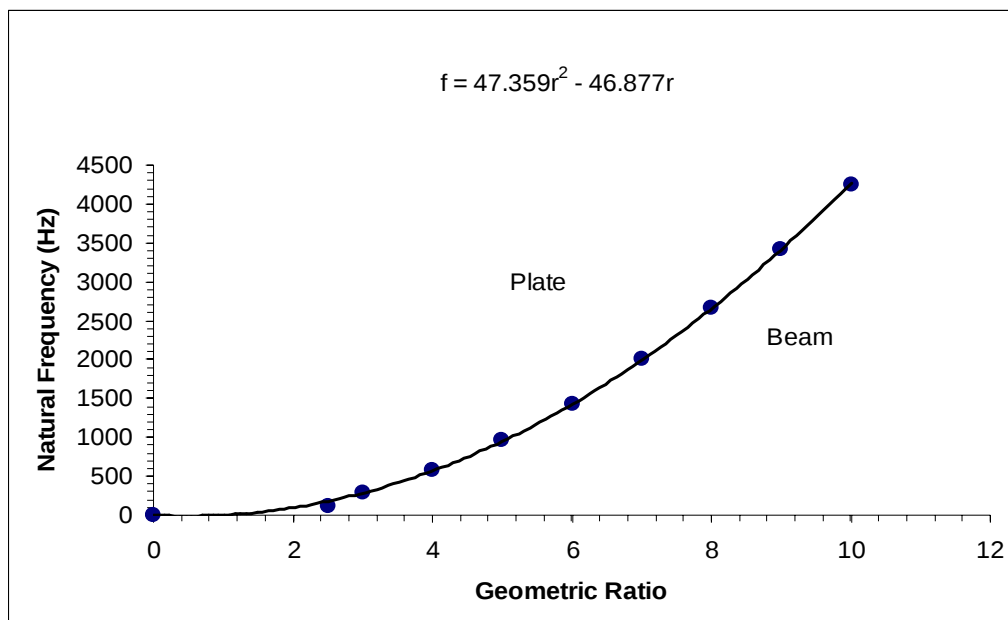
ตารางที่ 1 ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติ (f) และอัตราส่วนเรขาคณิต (r) ของแผ่นบางที่โหนดต่างๆ

นำความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนเรขาคณิตของแผ่นบางที่โหนดต่างๆ ที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคานมาหาสมการเส้นโค้ง Polynomial 2nd order โดยการประมาณค่าแบบ Curve fitting ด้วยระเบียบวิธีของ Least-Square Method จะได้ความสัมพันธ์ของสมการเป็นดังนี้

$$f = 47.359r^2 - 46.877r \quad (18)$$

เมื่อ f = ค่าความถี่ธรรมชาติ (Hz)

r = อัตราส่วนเรขาคณิต



รูปที่ 7 กราฟจากสมการความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติ (f) ที่ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนเรขาคณิต (r)

สรุปผลการทดลอง

จากผลการทดลองการสั่นสะเทือนแบบอิสระของคานอิสระทั้งสี่ด้านที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอโดยไม่มีการในแนวแกนมากระทำกับคาน จะพบว่าเมื่ออัตราส่วนเรขาคณิต (r) ของคานเพิ่มขึ้นค่าโมเมนต์พื้นที่ของความเฉื่อย (Area moment of inertia) ของคานจะลดลงและความหนาแน่นของคานจะลดลงตามไปด้วย จะทำให้ความถี่ธรรมชาติมีค่าที่ลดลงด้วย ซึ่งจะสอดคล้องกับสมการที่ (4) ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4 โดยความถี่ธรรมชาติหาจากสมการที่ (4) สำหรับ Mode Shape สามารถหาได้จากสมการที่ (16) สมการของความถี่ธรรมชาติและสมการของ Mode Shape ที่หามาได้ทั้งสองจะไม่สามารถแยกแยะพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนแบบอิสระได้เลยว่า ความถี่ธรรมชาติและ Mode Shape ที่ได้มานั้นมีพฤติกรรมการสั่นแบบแผ่นบางหรือมีพฤติกรรมการสั่นแบบคานได้ ด้วยเหตุนี้จึงได้ใช้การวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีของไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรม ANSYS มาช่วยวิเคราะห์เพื่อหาความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติ อัตราส่วนเรขาคณิตและ Mode Shape เพื่อช่วยแยกแยะพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระให้เห็นลักษณะทางกายภาพได้อย่างชัดเจนว่าพฤติกรรมการสั่นแบบไหนจะเป็นพฤติกรรมการสั่นแบบแผ่นบางหรือพฤติกรรมแบบคาน สำหรับการทดลองการสั่นสะเทือนของคานที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกส์มีเงื่อนไขขอบเขตต่างๆกัน อัตราส่วนเรขาคณิตเดียวกัน (C. L. Kirk and S. M. Wiedemann, 2002) ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากกรณีของคานอิสระทุกด้าน (Free-Free Beam) ,คานยื่น (Clamped-Free Beam) และคานที่ยึดติดที่ปลายทั้งสองด้าน (Clamped-Clamped Beam) เมื่อพิจารณาที่รอบของการเคลื่อนที่ (Cycle) ที่รอบเหมือนกันจะพบว่ามีค่าความถี่ธรรมชาติเหมือนกันแต่ลำดับโหมดจะ

แตกต่างกัน และจากการทดลองหาค่าความถี่ธรรมชาติของคานย่น (เกียรติฟ้า, 2548) มีการทดลองหาค่าความถี่ธรรมชาติของคานย่นที่อัตราส่วนเรขาคณิตต่างกัน ได้สรุปไว้ว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดลองกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ (ANSYS) มีค่าที่ใกล้เคียงกัน จากความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติกับอัตราส่วนเรขาคณิตที่ Mode ต่างๆในตารางที่ 1 โดยพิจารณาช่วงที่เริ่มมีพฤติกรรมการสั่นสะท้อนแบบแผ่นบางไปเป็นพฤติกรรมการสั่นสะท้อนแบบคาน Mode ที่เริ่มมีการสั่น Mode แรกคือ Mode 2 สำหรับ Mode 0 และ Mode 1 จะไม่นำมาพิจารณาเนื่องจากคานอิสระทั้งสองด้านจะไม่มี Mode 0 ส่วน Mode 1 เนื่องจากความถี่ธรรมชาติที่ได้มามีค่าเข้าใกล้ศูนย์จึงตัดทิ้งไป จากความสัมพันธ์ที่กล่าวมาข้างต้นจะได้สมการ Polynomial 2nd order (18) จากรูปที่ 7 สามารถระบุพฤติกรรมของคานหรือแผ่นบางได้ว่า พื้นที่ด้านบนของสมการ (18) จะแสดงถึงพฤติกรรมการสั่นสะท้อนแบบแผ่นบาง ส่วนพื้นที่ด้านล่างของสมการที่ (18) จะแสดงถึงพฤติกรรมการสั่นสะท้อนแบบคาน

เอกสารอ้างอิง

- เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2548. การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานย่น. วิศวกรรมสาร ม.ช. ปีที่ 32, ฉบับที่ 6 พฤศจิกายน-ธันวาคม 2548: 755-763.
- นิติงศ์ โพธิ์ทอง, เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2549. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางย่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานย่น. วิศวกรรมสาร ม.ช. ปีที่ 33, ฉบับที่ 2 มีนาคม-เมษายน 2549: 155-167.
- A. Houmat. 2005. **Free vibration analysis of membranes using the h-p version of the finite element method.** Journal of Sound and Vibration: 282(2005): 401–410.
- M. Boltezar, B. Strancar and A. Kuhelj. 1998. **Identification of transverse crack location in flexural vibrations of free-free beams.** Journal of Sound and Vibration: 211(5):729-734.
- C. L. Kirk and S. M. Wiedemann. 2002. **Natural frequencies and mode shapes of a free-free beam with large and masses.** Journal of Sound and Vibration: 254(5): 939-949.
- X. Q. Liu and R. C. Ertekin and H. R. Riggs. 1996. **Vibration of a free-free beam under tensile axial loads.** Journal of Sound and Vibration: 190(2): 273-285.
- N. S. Bardell, J. M. Dunsdon & R. S. Langley. 1995. **Free vibration analysis of thin rectangular laminated plate assemblies using the h-p version of the finite element method.** Composite Structures: 32(1995): 237-246.
- G. C. Nihous. 1997. **On the continuity of the boundary value problem for vibrating free-free Straight beams under axial loads.** Journal of Sound and Vibration: 200(1): 110-119.
- W. Weaver, JR., S. P. Timoshenko, D. H. Young. **Vibration Problems in Engineering.** Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc; 1990.
- Saeed Moaveni. **Finite Element Analysis Theory and Application with ANSYS.** Upper Saddle River, New Jersey. Prentice-Hall, Inc; 1999.