

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่น บางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานที่มีปลายยึดแน่น ทั้งสองด้าน^{*}

จิรวัดน์ วรณโรจน์¹⁾ และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต²⁾

¹⁾ นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 40002

²⁾ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 40002

Email: jirawat_@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาและวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางและคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน กำหนดให้แบบจำลองมีคุณสมบัติทางกลเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 0.25 ถึง 20 มีขนาดความหนาคงที่ 5 มิลลิเมตร โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด จากการศึกษาพบว่ารูปร่างโหมดสามารถบอกถึงความแตกต่างของพฤติกรรมการสั่นสะเทือนระหว่างแผ่นบางและคานได้ จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ทำให้ได้เส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคาน และสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต

คำสำคัญ : การสั่นสะเทือนแบบอิสระ, แผ่นบาง, คาน, ความถี่ธรรมชาติ, รูปร่างโหมด

^{*} รับต้นฉบับเมื่อวันที่ 7 ธันวาคม 2549 และได้รับบทความฉบับแก้ไขเมื่อวันที่ 15 มกราคม 2550

The Transition Curve from Plate-Like to Beam-Like Behavior in the Free Vibration of Clamped-Clamped Beams and Plates^{*}

Jirawat Waroonrod¹⁾ and Kiatfa Tangchaichit²⁾

¹⁾ Graduate Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University 40002

²⁾ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University 40002

Email: jirawat_@hotmail.com

ABSTRACT

This research is a study and analysis the free vibration of clamped-clamped beams and plates. Material property of the model was a carbon steel. A geometric ratio was varied from 0.25 to 20 and thickness 5 mm. The finite element method used for analysis and compute the natural frequency and mode shape. The mode shape was used to identify the vibration behavior of beam-like or plate-like. From graph of natural frequency versus geometric ratio will get the transition curve from plate-like to beam-like behavior and the relative equation of natural frequency versus geometric ratio.

Keywords : free vibration, plate, beam, natural frequency, mode shape

^{*} Original manuscript submitted: December 7, 2006 and Final manuscript received: January 15, 2007

บทนำ

การสั่นของวัตถุต่างๆ ที่เกิดขึ้นมีทั้งสิ่งที่ก่อให้เกิดประโยชน์ เช่น การสั่นของเส้นเสียงในการออกเสียงของมนุษย์ หรือการสั่นของเครื่องดนตรีบางประเภท ในขณะเดียวกันจะมีการสั่นบางอย่างที่ทำให้เกิดโทษซึ่งไม่เป็นที่ต้องการ เช่น การสั่นที่เกิดขึ้นกับชิ้นส่วนเครื่องจักรหรือโครงสร้างใดๆ เป็นเหตุให้เกิดความเสียหายได้ ความเสียหายที่เกิดขึ้นมีหลายรูปแบบไม่ว่าจะเป็นปัญหาของการสั่นในอุปกรณ์ที่มีขนาดเล็ก เช่น การสั่นของหัวอ่านฮาร์ดดิสก์ (Hard Drive) ในเครื่องคอมพิวเตอร์ หรือจะเป็นความเสียหายที่เกิดขึ้นในวัตถุโครงสร้างขนาดใหญ่ เช่น การพังทลายของสะพาน Tacoma Narrows Bridge เมื่อวันที่ 7 พฤศจิกายน ค.ศ. 1940 เนื่องจากการกระโชกของลม ซึ่งทำให้เกิดการสั่นอย่างรุนแรงของตัวสะพาน เหตุการณ์นี้นับว่าเป็นความเสียหายเนื่องจากการสั่นที่ชัดเจนมากตัวอย่างหนึ่งในงานวิศวกรรมยุคใหม่

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบาง โดยทำการศึกษาวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางสี่เหลี่ยมเพื่อที่จะหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด โดยใช้วิธีของ Rayleigh–Ritz ทำการวิเคราะห์แผ่นบางที่มีรูปร่างสี่เหลี่ยมที่ถูกยึดแน่นทั้ง 4 ด้าน มีการสั่นสะเทือนแบบอิสระ โดยจะทำการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่ 30 ค่าแรก พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติจากวิธีของ Rayleigh–Ritz เป็นค่าที่มีความแม่นยำถูกต้อง สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติจากการเปลี่ยนรูปร่างของตัวรองรับได้ที่ขอบเขตต่างๆ และยังสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับได้ (C.Rajalingham, R.B.Bhat, G.D.Xistria, 1996) จากการศึกษาถึงผลของตัวแปรในการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจากวิธีของ Rayleigh–Ritz พบว่า ค่าอัตราส่วนมีผลต่อรูปร่างโหมดที่โหมดค่าความถี่ธรรมชาติเดียวกัน และเมื่อแผ่นบางมีอัตราส่วนที่สูงขึ้น สามารถที่จะนำไปใช้วิเคราะห์แทนแบบของคานได้ ซึ่งให้ผลมีความแตกต่างกันไม่มากนัก (Hyde, et al, 2001) การวิเคราะห์โดยใช้วิธีการแบบ Differential Quadrature Method (DQM) ที่มีเงื่อนไขขอบเขตของวัสดุเป็นคุณสมบัติแบบ Isotropic และ Orthotropic ผลของการศึกษาทำให้รู้ว่าการศึกษาวิธีการ DQM นี้ สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติที่แผ่นบางเป็นแบบ Isotropic และ Orthotropic ได้อย่างแม่นยำ (Ming-Hung Hsu, 2003) การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ถูกยึดแน่นทั้ง 4 ด้าน โดยวิเคราะห์เป็นแบบโมดอล (modal) และไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ พบว่าเมื่อมีการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ขึ้น จะมีผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติค่าแรกๆ มีค่าเพิ่มขึ้น สรุปได้ว่าเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนเอลิเมนต์จะมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ (Y.Kobayashi, 2005) การศึกษาหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่เกิดการสั่นแบบอิสระโดยใช้วิธี Rayleigh–Ritz ซึ่งได้สมมุติการวิเคราะห์เปรียบเสมือนว่าวิเคราะห์คานในช่วงคานสถิต โดยได้กำหนดให้แผ่นบางมีคุณสมบัติของวัสดุเป็น Isotropic, Homogeneous และมีความหนาคงที่ เงื่อนไขขอบเขตกำหนดให้แผ่นบางถูกยึดติดด้วยสปริงทั้งสองมุม เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ 9 ค่าแรก ผลของคำตอบนั้นได้ถูกนำไปเปรียบเทียบกับ

งานวิจัยอื่นๆ ซึ่งปรากฏว่ามีความถูกต้องและยังได้กล่าวไว้ว่า วิธีของ Rayleigh-Ritz นั้นสามารถนำไปใช้กับสภาวะขอบเขตอื่นได้ (Zhou Ding, 1995)

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคาน โดยได้ทำการศึกษาการสั่นสะเทือนอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นเกี่ยวกับรูปทรงเรขาคณิตของคานที่มีการยึดปลายทั้งสองด้าน ซึ่งมีการแตกร้าวที่บริเวณด้านบน โดยในการศึกษานี้ได้จำลองให้มีการแตกร้าวด้วยการทำให้เป็นร่องที่ด้านบน ใช้การวิเคราะห์แบบจำลองจากวิธีการ Rayleigh-Ritz ในการสั่นแบบไม่เป็นเชิงเส้น พบว่า การแตกร้าวมีอิทธิพลมาจากค่าความถี่ธรรมชาติและผลจาก Mode shapes ส่วนค่า amplitude ของความถี่ขึ้นอยู่กับค่าการแปรผันความลึกของรอยแตกร้าว (K.Ei Bikri, R.Benamar, M.M.Bennouna, 2006) การศึกษาโหมดมาตรฐานของคานที่มีการยึดที่ปลายสองด้านแบบการสั่นที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยทำการทดสอบเปรียบเทียบกับผลการทดลองและหลักการที่มีการยอมรับแพร่หลายจากหลายๆงานวิจัย พบว่า ผลที่ได้สอดคล้องกัน กราฟเส้นโค้งการเพิ่มของ amplitude พบที่บริเวณใกล้กับปลายที่จับยึด (W.C.Xie, H.P.Lee, S.P.Lim, 2002) และ การศึกษาวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่นโดยใช้ทฤษฎี Rayleigh-Ritz ร่วมกับโปรแกรม Matlab, วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์, ค่าคำนวณทางทฤษฎี และจากผลการทดลอง พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทั้ง 4 วิธีมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ในส่วนของการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป FE (ANSYS) จะเป็นการคำนวณหาค่าที่ให้ค่าความแม่นยำสูงและสามารถทำนายผลได้ทั้ง torsional mode และ bending mode (เกียรติฟ้า, 2548)

ในส่วนของการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางและคานนั้น ได้ทำการศึกษาเส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่นที่มีการสั่นสะเทือนเป็นแบบอิสระ วิเคราะห์ด้วยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมในการสั่นสะเทือน ทำให้ได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต (นิติงศ์, เกียรติฟ้า, 2549)

จึงสามารถสรุปได้ว่าค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดของการสั่นสะเทือนเป็นสิ่งสำคัญที่วิศวกรผู้ออกแบบต้องคำนึงถึง ในปัจจุบันนี้การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่นิยม เพราะสามารถทำการวิเคราะห์คำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติลำดับสูงๆ และรูปร่างโหมดซึ่งมีความซับซ้อนยากที่จะทำการวิเคราะห์ให้ได้ผลคำตอบอย่างรวดเร็วและแม่นยำ โดยในงานวิจัยนี้จะเน้นไปที่การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางและคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านโดยใช้ระเบียบวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (โปรแกรม ANSYS)

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

พื้นฐานของการสั่นสะเทือน

การสั่นสะเทือน (Vibration) คือ การเคลื่อนที่ของวัตถุรอบ ๆ จุดสมดุลในห้วงเวลาหนึ่งของการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลนั้น ไม่ว่าจะเกิดขึ้นในแบบซ้ำตัวเองหรือไม่ก็ตาม โดยผลของการสั่นสะเทือนแบบอิสระนั้น ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ไป-มา ซึ่งเรียกว่า “ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency)” ซึ่งอาจเป็น

ความถี่เดียวหรือหลายความถี่ก็ได้ และรูปแบบการเคลื่อนที่หรือตำแหน่งการเคลื่อนที่ เรียกว่า “รูปร่างโหมด (Mode Shape)” ของการสั่นสะเทือน

โดยทั่วไปสามารถแบ่งประเภทของการสั่นสะเทือนที่สำคัญได้เป็น 2 ประเภท ดังนี้

การสั่นแบบอิสระ (Free Vibration) คือ การสั่นของระบบในลักษณะที่หลังจากมีการรบกวนระบบที่หยุดนิ่งอยู่ที่จุดสมดุลครั้งแรกเพื่อให้เกิดการสั่นขึ้นแล้ว การสั่นนั้นจะดำเนินต่อไปโดยไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำกับระบบอีกเลย การสั่นสะเทือนจะสั่นด้วยความถี่ที่เรียกว่า “ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency)” ซึ่งเป็นคุณลักษณะทางพลวัตของระบบนั้นๆ

การสั่นแบบบังคับ (Forced Vibration) คือ การสั่นของระบบภายใต้แรงกระทำจากภายนอก ซึ่งแรงกระทำจากภายนอกนี้อาจจะเป็นแรงในลักษณะซ้ำตัวเองหรือไม่ซ้ำตัวเองก็ได้ หากว่าความถี่ของแรงที่กระทำกับระบบนั้นไปพ้องกับความถี่ธรรมชาติของระบบพอดี การสั่นที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะที่มีช่วงกว้างของการสั่นที่สูงมาก เรียกการสั่นในลักษณะนี้ว่า “การสั่นพ้อง (Resonance)” ซึ่งมีผลทำให้เกิดความเสียหายกับโครงสร้างที่กำลังเกิดการสั่นอยู่

นอกจากประเภทของการสั่นที่ได้กล่าวมาข้างต้นยังมีการแบ่งประเภทได้เป็นอีกหลายประเภท คือ การสั่นแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง การสั่นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น

ทฤษฎีในการวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในการแก้ปัญหาโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น จะต้องประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ค่าผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นจะประกอบด้วยค่าตัวแปรต่างๆตามตำแหน่งบนเอลิเมนต์และลักษณะของปัญหา โดยมีหลักการคือทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่เป็นอนันต์ มาเป็นค่าโดยประมาณที่นับได้ ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างๆกัน วิธีการดังกล่าวบอกเป็นนัยว่าผลเฉลยแต่ละเอลิเมนต์นั้น จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการและเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาในแต่ละปัญหา ซึ่งหมายความว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มพิจารณาทีละเอลิเมนต์ โดยทำการสร้างสมการแต่ละเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่บนรากฐานว่า สมการที่สร้างนั้นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ทำอยู่ เพื่อนำสมการเหล่านั้นมาประกอบเป็นระบบสมการใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพคือการนำเอลิเมนต์เล็กๆมาประกอบเป็นขนาดใหญ่ จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงบนสมการชุดใหญ่แล้วทำการแก้สมการดังกล่าว ซึ่งจะได้ผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งต่างๆ ของปัญหา

การสั่นตามแนวขวางของคาน

ในการศึกษาการสั่นของระบบต่อเนื่องของคานที่มีหน้าตัดคงที่นั้น จะสามารถหาสมการในการหาค่าความถี่ธรรมชาติของคานได้ คือ

$$\omega_n = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (1)$$

การสั่นของแผ่นบาง

เป็นการพิจารณาการสั่นของระบบที่มีมิติความยาวสองมิติหรือก็คือ พิจารณาการสั่นของแผ่นบางนั่นเอง แผ่นบางที่จะกล่าวถึงในที่นี้ หมายถึง วัสดุที่มีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับมิติด้านอื่นๆ ทำให้แผ่นบางไม่สามารถที่จะรับภาระโมเมนต์บิดได้ ซึ่งจะคล้ายกับกรณีเส้นเชือกไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดได้นั่นเองโดยสมการหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง คือ

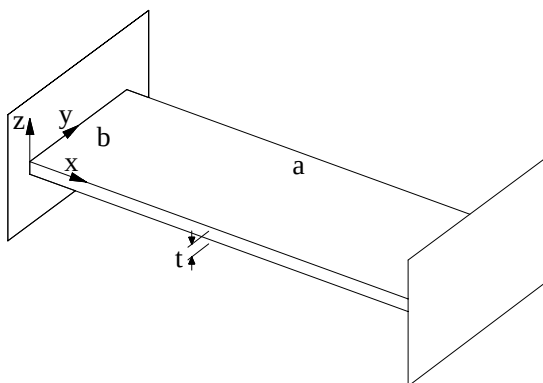
$$\omega = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

การศึกษาและทดลอง

การกำหนดรายละเอียดในแบบจำลอง

แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีลักษณะเป็นแผ่นบาง (Plate) หรือคาน (Beam) ถูกยึดแน่นที่ปลายทั้งสองด้าน ซึ่งมีขนาดความยาวคงที่ (a) 0.5 m. ความหนาคงที่ (t) 0.005 m. โดยที่ความกว้างของคาน (b) จะแปรผันตามอัตราส่วนทางเรขาคณิต (Geometric Ratio; r) โดยที่ $r = a/b$ ซึ่งในขั้นตอนแรกของการทดสอบนั้นได้กำหนดค่าคุณสมบัติทางกลของแบบจำลองเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน (Carbon Steel) มีคุณสมบัติทางกลเป็นแบบ Linear Isotropic โดยค่าคุณสมบัติเป็นดังนี้ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Young's modulus) $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ค่าความหนาแน่นของวัสดุ (Density) $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ และค่าอัตราส่วนพัวซอง (Poisson's ratio) $\nu = 0.29$ ดังแสดงในรูปที่ 1



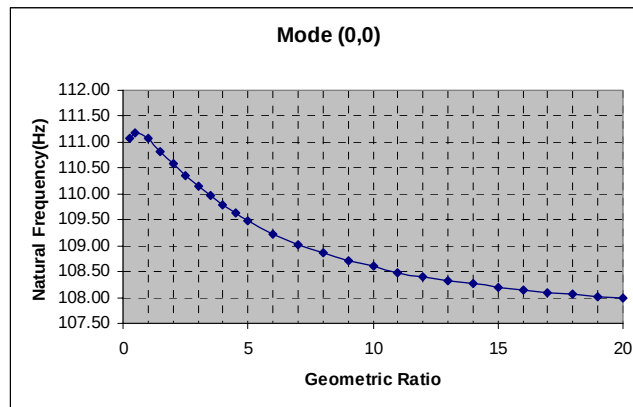
รูปที่ 1 แสดงรูปร่างแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์

ในการวิเคราะห์ค่านวณหารูปปร่างโหมด (mode shape) และค่าความถี่ธรรมชาติ จะใช้โปรแกรม ANSYS (โปรแกรมคำนวณทาง Finite Element) กำหนดชนิดของเอลิเมนต์เป็นแบบ shell 93 โดยเรียกว่า 8 node structural shell ซึ่งแต่ละ node มี 6 องศาความเป็นอิสระ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์ที่เป็นแบบ shell 63 โดยมี 4 node structural shell พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติมีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย แต่ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จาก shell 63 นั้นมีความแตกต่างของค่าความถี่ธรรมชาติในแต่ละจำนวนเอลิเมนต์มีค่ามากกว่า ซึ่งเหตุผลนี้เองทำให้เลือกใช้ชนิดเอลิเมนต์เป็นแบบ shell 93 ซึ่งมีความเหมาะสมมากกว่า โดยในการหาค่าจำนวนเอลิเมนต์ที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีค่าเหมาะสมนั้น ได้ทำการแบ่งเอลิเมนต์เป็นสี่เหลี่ยมด้านเท่า กำหนดให้ด้านของความยาว (a) มีจำนวนเอลิเมนต์เป็น 40, 50, 60, 80, 100, 120 และ 150 กำหนดให้ด้านของความกว้าง (b) มีจำนวนเอลิเมนต์แปรตามอัตราส่วนทางเรขาคณิต แล้วทำการทดสอบหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด เพื่อเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดจากแต่ละจำนวนเอลิเมนต์ ซึ่งพบว่าจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสมนั้นมีค่าเท่ากับ 100 โดยเหตุผลที่เลือกจำนวนเอลิเมนต์เป็น 100 คือ เป็นจำนวนเอลิเมนต์ที่ให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าใกล้เคียงกับกรณีจำนวนเอลิเมนต์ที่ 120, 150 และมีรูปร่างโหมดที่มีความละเอียดสามารถดูรูปร่างโหมดได้ดีทุกโหมด รวมไปถึงเวลาในการวิเคราะห์ที่น้อยกว่ากรณี 120, 150 เอลิเมนต์ ส่วนในกรณี 40, 50, 60, 80 เอลิเมนต์ รูปร่างโหมดที่ได้จะมีความละเอียดไม่พอและไม่สามารถอ่านค่าได้ในบางโหมด

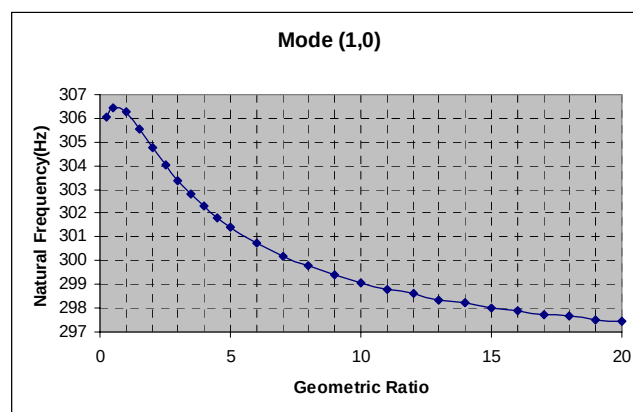
ขั้นตอนการศึกษาและการทดลอง

1. ทดสอบแบบจำลองที่มีจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 100 เอลิเมนต์ และแบบจำลองมีอัตราส่วนทางเรขาคณิต (Geometric Ratio; r) จำนวน 26 ค่าซึ่งมีอัตราส่วนเป็น 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 และ 20 เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่ 40 ค่าแรก ซึ่งจะทำให้การเลือกค่าความถี่ธรรมชาติจากรูปร่างโหมดที่มีจำนวนจุดตัดบนแกนความยาว (x) และแกนความกว้าง (y) เมื่อเทียบกับสถานะหยุดนิ่งของแผ่นบางและคานให้เป็นจุดตัด (x, y) คือ โหมด (0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0), (6,0), (7,0), (8,0), (9,0), (10,0) เป็นต้น รูปร่างโหมดที่แสดงลักษณะของแผ่นบางหรือคาน ที่จะเกิดการสั่นขึ้น-ลงในแนวดิ่งหรือเรียกว่า “โหมดดัดตัว (bending mode)” โดยจะเกิดการดัดตัวผ่านบนแกนความยาว (x) เมื่อเทียบกับสถานะหยุดนิ่ง เหตุผลที่ทำการเลือกโหมดเฉพาะโหมดที่มีจุดตัดบนแกนความกว้าง (y) เป็นศูนย์ คือ จะพิจารณาเฉพาะกรณีเกิดการดัดตัว ซึ่งในด้านความกว้าง (แนวแกน y) เป็นแนวเส้นตรงจะเป็นพฤติกรรมการสั่นของคาน (Beam) แต่ถ้าด้านดัดตัวโค้งตัวแสดงว่าที่โหมดนั้นเป็นพฤติกรรมการสั่นของแผ่นบาง (Plates)

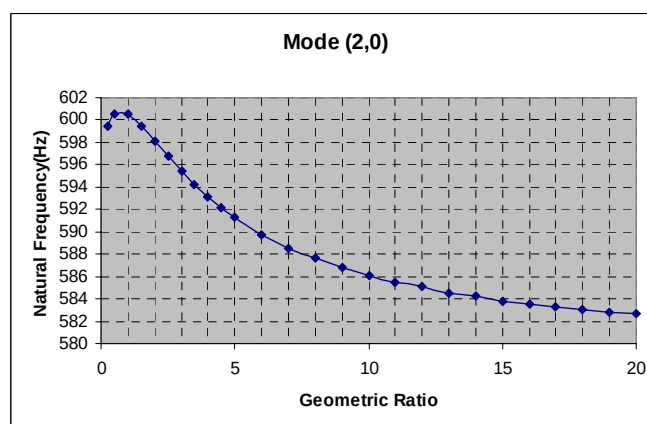
2. นำค่าความถี่ธรรมชาติในแต่ละโหมดทุกอัตราส่วนทางเรขาคณิตมาพล็อตกราฟหาความสัมพันธ์กัน จะพบว่า เมื่อค่าอัตราส่วนเพิ่มขึ้นค่าความถี่ธรรมชาติจะลดลงอย่างต่อเนื่อง ดังตัวอย่างซึ่งแสดงในรูปที่ 2, 3 และ 4



รูปที่ 2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่โหมด (0,0)



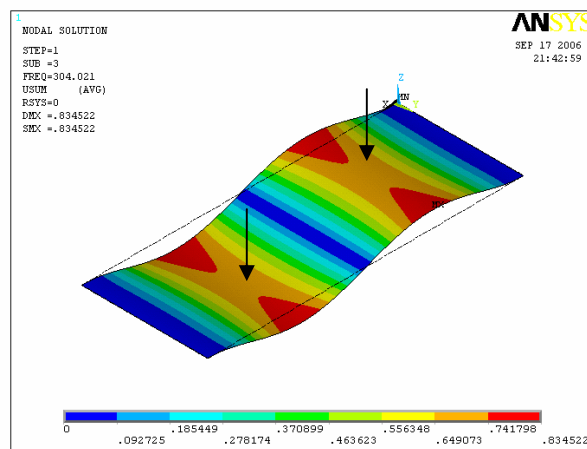
รูปที่ 3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่โหมด (1,0)



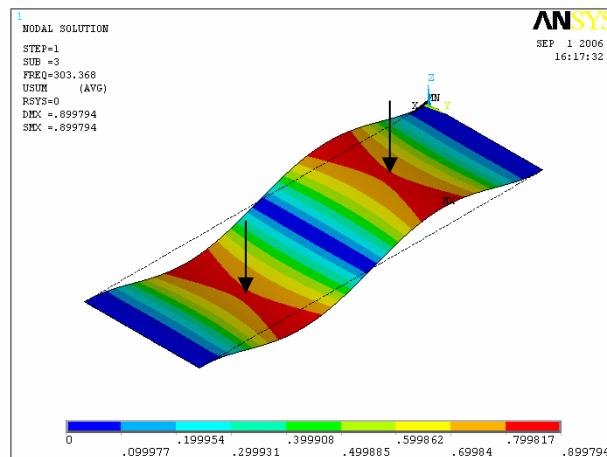
รูปที่ 4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่โหมด (2,0)

เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน 113

3. พิจารณารูปร่างโหมดของทุกอัตราส่วนจากข้อ 2 ซึ่งทำการเลือกรูปร่างโหมดที่ส่วนทางด้านความกว้าง (แนวแกน y) ตัดตัวไม่เป็นแนวเส้นตรง พิจารณาว่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่โหมดนั้นมีพฤติกรรมเป็นการสั่นแบบแผ่นบาง (Plate) จากนั้นทำการเปรียบเทียบกับรูปร่างโหมดที่ด้านความกว้าง (แนวแกน y) ที่เกิดการตัดตัวเป็นแนวเส้นตรง ซึ่งในอัตราส่วนทางเรขาคณิตนี้จะเป็นพฤติกรรมการสั่นของคาน (Beam) โดยจะยกตัวอย่างในกรณีของโหมด (1,0) เป็นกรณีเปรียบเทียบกับรูปร่างโหมดเพื่อพิจารณาพฤติกรรมการสั่น ซึ่งจะแสดงได้จากรูปที่ 5 และ 6



รูปที่ 5 แสดงการสั่นของคานที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 2.5 ที่โหมด (1,0) จะพบว่า บริเวณที่ตัดตัวเมื่อมีการสั่นจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง แสดงให้เห็นว่ามีพฤติกรรมการสั่นของแผ่นบาง



รูปที่ 6 แสดงการสั่นของคานที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากับ 3.0 ที่โหมด (1,0) จะพบว่า บริเวณที่ตัดตัวเมื่อมีการสั่นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง แสดงให้เห็นว่ามีพฤติกรรมการสั่นของคาน

ผลการศึกษาและการวิเคราะห์ผล

จากการทดลองพบว่าเมื่อทำการเลือกค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่โหมดต่างๆ เริ่มมีพฤติกรรมของการสั่นสะท้อนคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมของการสั่นสะท้อนคล้ายคานจะทำให้ได้ผลการทดลองเป็นไปตามตารางที่ 1

Mode (x, y)	Geometric Ratio	Natural Frequency (Hz)
0,0	1.5	110.83
1,0	3.0	303.37
2,0	10.0	586.10
3,0	12.0	966.71
4,0	15.0	1440.00
5,0	19.0	2004.00

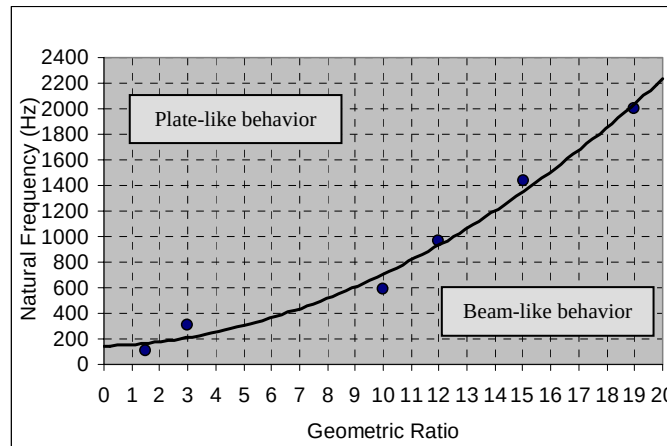
ตารางที่ 1 ผลของการเลือกค่าของความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่โหมดต่างๆ โดยเริ่มมีพฤติกรรมของการสั่นคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมของการสั่นคล้ายคาน

จากนั้นทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้ โดยนำค่าข้อมูลมาสร้างสมการโพลิโนเมียลด้วยวิธี Least Square Method ซึ่งสามารถหาความสัมพันธ์ของสมการค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตได้ ดังแสดงในสมการที่ 4

$$f = 4.8204r^2 + 8.2785r + 142.5 \quad (4)$$

สมการที่ 4 นี้สามารถหาความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตเพื่อใช้ในการหาความแตกต่างระหว่างพฤติกรรมการสั่นสะท้อนแบบอิสระของแผ่นบางและคานได้ โดยในการหาค่าความถี่ธรรมชาติที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตเป็นค่าใดค่าหนึ่ง จะทำให้รู้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากสมการที่ 4 ซึ่งเป็นค่าความถี่ธรรมชาติที่สามารถจะแบ่งแยกพฤติกรรมการสั่นสะท้อนทั้งสองแบบได้

โดยความสัมพันธ์ของสมการความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตสามารถแสดงได้ในรูปที่ 7



รูปที่ 7 แสดงพฤติกรรมความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นบางและคาน

จากรูปที่ 7 นี้จะแสดงถึงค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต และเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบาง (Plate-like behavior) เป็นพฤติกรรมคล้ายคาน (Beam-like behavior) ซึ่งจุดต่างๆ เหล่านี้เป็นจุดที่แสดงตำแหน่งของโหมดการดัด (0,0) ไปจนถึงโหมดการดัด (5,0) ที่มีค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตเป็น 1.5, 3, 10, 12, 15 และ 19 ตามลำดับ โดยค่าความถี่ธรรมชาติจะเพิ่มมากขึ้นไปในแต่ละโหมด จากกราฟความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต จะเห็นได้ว่ากราฟเป็นเส้นโค้งที่จะแยกพื้นที่ระหว่างส่วนด้านบนและด้านล่าง โดยส่วนของด้านบนจะเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระคล้ายแผ่นบาง และส่วนของด้านล่างจะเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระคล้ายคาน

สรุปผลการศึกษา

โดยในงานวิจัยนี้สามารถแยกพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางและคานได้ จากการหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติ รูปร่างโหมด และค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิต ทำให้ได้สมการความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตดังแสดงในสมการที่ 4 และกราฟเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบาง (Plate-like behavior) เป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน (Beam-like behavior) ดังแสดงในรูปที่ 7 จากการวิเคราะห์และศึกษาทำให้ทราบว่าโหมดของการดัดตัวใดๆ จะมีอัตราส่วนทางเรขาคณิตและค่าความถี่ธรรมชาติค่าหนึ่งเป็นค่าที่สามารถบอกได้ว่า เป็นจุดที่จะเริ่มมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายแผ่นบางเปลี่ยนเป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนคล้ายคาน หรืออาจกล่าวได้ว่าถ้าเกิดการสั่นสะเทือนแบบอิสระที่โหมดการดัดตัวใดๆ จะมีค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตหรือค่าความถี่ธรรมชาติเป็นตัวที่จะบ่งบอกถึงลักษณะการสั่นสะเทือนนั้นว่ามีพฤติกรรมการสั่นเป็นแบบไหน

สัญลักษณ์

English Letters

A	= พื้นที่หน้าตัดของคาน (m^2)
a	= ความยาวของแผ่นบางและคาน (m)
b	= ความกว้างของแผ่นบางและคาน (m)
D	= flexural rigidity of the plate
E	= โมดูลัสความยืดหยุ่น (N / m^2)
f	= ค่าความถี่ธรรมชาติ (Hz)
h	= ความหนาของแผ่นบางและคาน (m)
I	= moment of inertia of a plane area (m^4)
r	= อัตราส่วนทางเรขาคณิต
t	= ความหนาของแผ่นบางและคาน (m)

Greeks

ω_n	= ค่าความถี่ธรรมชาติ (rad / sec)
β^2	= ค่าจำเพาะ (rad)
ρ	= ความหนาแน่น (kg / m^3)
α	= a constant depending on the mode
ν	= ค่าอัตราส่วนพัวซอง

เอกสารอ้างอิง

- กนต์ธร ชำนิประศาสน์. 2545. การสั่นสะเทือนทางกล. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ. สำนักพิมพ์ เพียร์สันเอดดูเคชั่น อินโดไชน่า.
- เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2548. “การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่น.” วิศวกรรมสาร มข. ปีที่ 32, ฉบับที่ 6(พฤศจิกายน-ธันวาคม): 755-763
- นิติพงษ์ โพธิ์ทอง, เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2549. “เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น.” วิศวกรรมสาร มข. ปีที่ 33, ฉบับที่ 2(มีนาคม-เมษายน): 155-167
- El Bikri, K., Benamar, R., Bennouna, M.M. 2006. “Geometrically Non-Linear Free Vibration of Clamped-Clamped Beam with an Edge Crack.” **Computer and Structures**. 84: 485-502
- Hyde, K., Chang J.Y., Bacca, C., Wickert, J.A. 2001. “Parameter Studies for Plane Stress in Plane Vibration of Rectangular Plates.” **Journal of Sound and Vibration**. 247, 3: 471-487

- Kobayashi, Y. 2005. **Reduced-Order Nonlinear Modal Equations of Plates Based on the Finite Element Method**. May 15,2005. <http://mech-me.eng.hokudai.ac.jp/~rd/labo/PDF/Reduce.pdf>
- Ming-Hung Hsu. 2003. "Vibration Analysis of Isotropic and Orthotropic Plates with Mixed Boundary Conditions." **Tamkang Journal of Science and Engineering**. 6, 4: 217-226
- Rajalingham, C., Bhat, R.B., Xistria, G.D. 1996. "Vibration of Rectangular Plates using Plate Characteristic Functions as Shape Functions in the Reyleigh-Ritz Method." **Journal of Sound and Vibration**. 193, 2: 497-509
- Xie, W.C., Lee, H.P., Lim, S.P. 2002. "Normal Modes of a Non-Linear Clamped-Clamped Beam." **Journal of Sound and Vibration**. 250, 2: 339-349
- Zhou Ding. 1995. "Natural Frequencies of Elastically Restrained Rectangular Plates using a set of Static Beam Functions in the Rayleigh - Ritz Method." **Elsevier Science**. 57, 4: 731-735.