

## Overview of Photoelasticity and Digital Photoelasticity

Pichet Pinit<sup>\*</sup>

### Abstract

Stress analysis is a very important process in design of machine elements which can be classified into three fields: analytical stress analysis, numerical stress analysis, and experimental stress analysis. Although the numerical stress analysis, especially the finite element analysis (FEA), is nowadays the dominant method, there is another experimental method being widely used in stress analysis. This method is well known as photoelasticity. The photoelasticity provides information in the whole-field sense which easily enables the stress analysis; however, it has several limitations such as the analyst has to deeply know about the theory of photoelasticity and the operation of analysis is very tedious. As a consequence, photoelasticity had been ignored from the use as the stress analysis method for several years. With the advent of a computer and associated technology, a new field called digital photoelasticity is invented based on the combination of the conventional photoelasticity and such computer technology. The digital photoelasticity is superior to the conventional photoelasticity in the sense of the analysis efficiency. Furthermore, with a new technology called a rapid prototyping, the production of photoelastic models can be very simple even though the complex models need to be made. With this new technology, the power of digital photoelasticity is enhanced enormously in near future.

**Keywords:** Stress analysis, Photoelasticity, Digital photoelasticity

---

<sup>\*</sup> Lecturer, Department of Mechanical Technology Education, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok 10140, Email: pichet.pin@kmutt.ac.th

## 1. บทนำ

การออกแบบทางด้านวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับกลศาสตร์ ซึ่งรู้จักกันในชื่อ กลศาสตร์ประยุกต์ (applied mechanics) นั้นเป็นสิ่งที่มีความสำคัญอย่างยิ่ง ปัจจุบันการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลและโครงสร้างต่างๆ ทั้งขนาดเล็กและใหญ่มักจะขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายประการ อาทิเช่น รูปร่าง น้ำหนัก ความแข็งแรง ความปลอดภัย และความสวยงาม เป็นต้น นอกจากนี้ เครื่องจักรกลและโครงสร้างดังกล่าวจะต้องสอดคล้องกับมาตรฐานในเรื่องต่างๆ เช่น ไม่ก่อให้เกิดผลกระทบต่อสภาพแวดล้อม และประหยัดพลังงาน ดังนั้น เพื่อให้ได้ตามสิ่งที่ต้องการ การออกแบบทางด้านวิศวกรรมจึงต้องอาศัยวิธีการแก้ปัญหาที่มีความเที่ยงตรงและให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้อง

## 2. วิธีแก้ปัญหาในกลศาสตร์ประยุกต์

การแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ประยุกต์จะเกี่ยวข้องโดยตรงกับปริมาณทางกายภาพที่สำคัญ คือ ความเค้น และความเครียด ปริมาณทั้งสองนี้จะมีอิทธิพลโดยตรงต่อรูปร่างและความแข็งแรงของชิ้นงานที่ถูกออกแบบ การแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ประยุกต์เพื่อวิเคราะห์หาปริมาณดังกล่าวนี้ รู้จักกันในชื่อของการวิเคราะห์ความเค้น (stress analysis) ซึ่งสามารถจำแนกออกเป็น 3 ด้าน คือ

- การวิเคราะห์ความเค้นเชิงวิเคราะห์ (analytical stress analysis)
- การวิเคราะห์ความเค้นเชิงตัวเลข (numerical stress analysis) และ
- การวิเคราะห์ความเค้นเชิงทดลอง (experimental stress analysis)

การวิเคราะห์ความเค้นเชิงวิเคราะห์จะอาศัยทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น (theory of elasticity) เป็นฐาน ทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นสามารถให้คำตอบหรือผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solutions) ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นจะให้ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับปัญหาบางลักษณะเท่านั้น สาเหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องด้วยในการวิเคราะห์ความเค้นนั้น ผู้ที่หาผลเฉลยแม่นยำตรงจะต้องใช้หลักการทางด้านคณิตศาสตร์ขั้นสูงเข้ามาช่วย

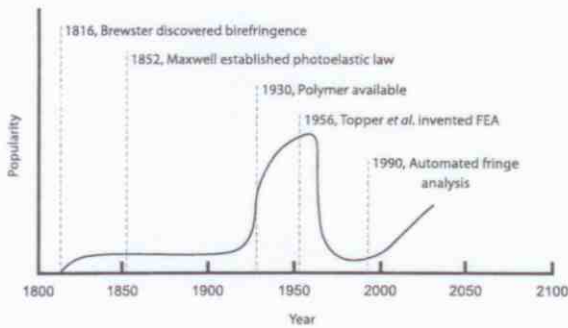
ดังนั้น การที่จะทำให้ครอบคลุมทุก ๆ ปัญหาที่พบในทางปฏิบัตินั้นจึงเป็นเรื่องที่เป็นไปได้ยาก

ด้วยความพยายามของผู้ที่สนใจในการแก้ปัญหา จึงได้มีการประดิษฐ์วิธีวิเคราะห์ความเค้นขึ้นอีก เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite different method) และระเบียบวิธีส่วนย่อยจำกัดหรือไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) วิธีการเหล่านี้ถูกจัดให้อยู่ภายใต้การวิเคราะห์ความเค้นเชิงตัวเลขและเป็นวิธีที่ทรงประสิทธิภาพมากเนื่องด้วยทำงานอยู่บนเครื่องคอมพิวเตอร์ จึงทำให้การแก้ปัญหาสามารถกระทำได้โดยสะดวกและรวดเร็ว อย่างไรก็ตาม แม้ว่าการวิเคราะห์ความเค้นเชิงตัวเลขจะให้ผลลัพธ์ที่ได้โดยง่าย ผลลัพธ์เหล่านี้ก็เป็นเพียงค่าโดยประมาณ (approximated values) เท่านั้นเมื่อเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ความเค้นเชิงวิเคราะห์

ผลจากการแก้ปัญหาด้วยการวิเคราะห์ความเค้นทั้งสองด้านดังที่กล่าวแล้วนั้น ทำให้เกิดข้อคำถามขึ้นมาข้อหนึ่ง กล่าวคือ เราจะมั่นใจได้อย่างไรว่าผลลัพธ์ที่ได้มา มีความถูกต้องและสามารถนำไปใช้แปลความหมายเชิงกายภาพของปริมาณความเค้นได้จริง การที่จะตอบปัญหาข้อนี้จำเป็นต้องอาศัยวิธีอื่นซึ่งก็คือ การวิเคราะห์ความเค้นเชิงทดลอง และวิธีหนึ่งที่น่าสนใจเช่นกันก็คือ โฟโตอีลาสติซิตี วิธีนี้มีประสิทธิภาพมากในการวิเคราะห์หาค่าความเค้น เนื่องจากโฟโตอีลาสติซิตีสามารถแสดงภาพของสนามความเค้น (stress field) ได้ ด้วยสมบัติเด่นข้อนี้จึงทำให้โฟโตอีลาสติซิตีได้รับความนิยมมาจนถึงปัจจุบัน

## 3. โฟโตอีลาสติซิตีคืออะไร

โฟโตอีลาสติซิตีเป็นวิธีการวิเคราะห์ความเค้นที่ นับได้ว่าเก่าแก่ นับจากปัจจุบันย้อนไปประมาณสองร้อยปี (ประมาณปี ค.ศ. 1800) หลักการของโฟโตอีลาสติซิตีได้ถือกำเนิดขึ้นโดย Sir David Brewster (Jessop and Harris, 1950) (รูปที่ 1) Brewster ได้ค้นพบว่าแผ่นกระจกที่ได้รับความเค้นดึงหรืออัดอย่างง่ายและอยู่ภายใต้สนามของแสงทั่วไป จะทำให้แสงที่เคลื่อนที่ผ่านตัวกระจกนั้น กลายเป็นแสงโพลาไรซ์ตามแนวเส้นความเค้นและแสงที่



รูปที่ 1 ระดับความนิยมในการใช้งานโฟโตอีลาสติกซิตี ตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน (Patterson, 2000)

เคลื่อนที่ออกมานี้จะมีทิศทางที่ตั้งฉากกับแนวเส้นความเค้นดังกล่าว

หลังจากนั้นอีกหลายปี มีผู้สังเกตการณ์อีกหลายท่าน เช่น Kerr และ Pockels ได้สังเกตพฤติกรรมของลำแสงโพลาไรซ์ของลำแสงที่เกิดจากการแยกลำแสงโพลาไรซ์ลำแสงเดียวด้วยแท่งแยกลำแสง (beam splitter) ลำแสงที่แยกได้ทั้งสองนี้จะเคลื่อนที่ผ่านกระจกสองแผ่นโดยที่แผ่นหนึ่งได้รับความเค้นในขณะที่อีกแผ่นหนึ่งไม่ได้รับความเค้น หลังจากลำแสงทั้งสองเคลื่อนที่ออกจากแผ่นกระจกก็จะถูกนำมารวมกันอีกครั้งเพื่อทำให้เกิดการสอดแทรกระหว่างลำแสงทั้งสอง

ผู้สังเกตการณ์พบว่าองค์ประกอบของลำแสงรวมที่เคลื่อนผ่านกระจกที่ได้รับความเค้นจะสั่นในแนวขนานกับแนวความเค้น ในขณะที่องค์ประกอบหนึ่งจะสั่นตั้งฉากกับองค์ประกอบแรกองค์ประกอบแสงทั้งสองถูกหน่วงให้เคลื่อนที่ช้าลง (retardation) ด้วยปริมาณหนึ่ง ๆ ตามค่าความเค้น การเปลี่ยนแปลงค่าความเร็วที่สัมพันธ์กับความเค้นนี้เป็นรากฐานอันสำคัญของโฟโตอีลาสติกซิตี

ในปี ค.ศ. 1852 Clerk Maxwell ได้ทำการทดลองอีกครั้ง และค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างผลที่ได้กับความเค้น ผลจากการทดลองนี้ทำให้ได้กฎอันหนึ่งที่เรียกว่า กฎแห่งแสงและความเค้น (stress-optic law) และสามารถแสดงเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda} C(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1)$$

โดยที่  $\delta$  คือ ความหน่วงสัมพัทธ์ (relative retardation),  $h$  คือ ความหนาของแผ่นโปร่งแสง,  $\lambda$  คือ ความยาวของ

คลื่นแสงที่ใช้,  $C$  คือ สัมประสิทธิ์สัมพัทธ์ของแสงและความเค้น และ  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  คือ ผลต่างของความเค้นหลักสมการ (1) ถือเป็นหัวใจสำคัญของโฟโตอีลาสติกซิตีที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับแสง

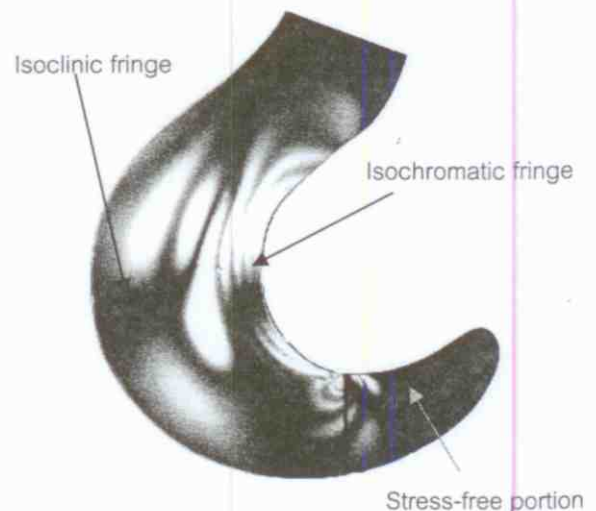
หากทำการหารสมการ (1) ตลอดด้วย  $2\pi$  และกำหนดให้  $f_\sigma (= \lambda/C)$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์ริ้วแสงและความเค้นของวัสดุ (material stress fringe value) แล้วจะได้ว่า

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{f_\sigma N}{h} \quad (2)$$

โดยที่  $N (= \delta/2\pi)$  คือ อันดับริ้ว (fringe order) หรือจำนวนรอบของการหน่วงสัมพัทธ์ ซึ่งมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง  $\infty$  สำหรับค่าของ  $f_\sigma$  นั้นสามารถหาได้จากการสอบเทียบโดยใช้ตัวแบบมาตรฐาน เช่น แผ่นจานกลมรับแรงเข้มนกในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง และคานสี่เหลี่ยมมีจุดรองรับอย่างง่ายภายใต้ความเค้นดัดล้วน (Ramesh, 2000)

#### 4. ตัวแปรที่สำคัญในโฟโตอีลาสติกซิตี

โฟโตอีลาสติกซิตีจะให้ภาพสนามความเค้นซึ่งเรียกว่า ริ้วโฟโตอีลาสติก (photoelastic fringe) และภาพของริ้วนี้จะประกอบไปด้วยริ้วไอโซคลินิก (isoclinic fringe) และริ้วไอโซโครมาติก (isochromatic fringe) (รูปที่ 2) ภาพริ้วโฟโตอีลาสติกเพียงภาพเดียวสามารถใช้วิเคราะห์หาค่าความเค้นได้



รูปที่ 2 ริ้วโฟโตอีลาสติกของตะขอ (Legay, 2003)



รั้วไอโซคลินิกถูกควบคุมด้วยตัวแปรไอโซคลินิก (isoclinic parameter) ซึ่งจะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับทิศทางความเค้นหลัก เนื่องจากว่า ตัวแปรนี้เพิ่มขึ้นอยู่กับค่าความยาวคลื่นของแหล่งกำเนิดแสงและขนาดของแรงที่กระทำต่อตัวแบบ ภาพรั้วไอโซคลินิกจึงมีสีเดียวตลอด และจะมีรูปร่างเหมือนเดิมสำหรับระบบแรงหนึ่ง ๆ ไม่ว่าจะใช้แหล่งกำเนิดแสงเอกรงค์ (monochromatic light) แสงพหุรงค์ (polychromatic light) หรือแสงสีขาว (white light)

ตัวแปรไอโซโครมาติก (isochromatic parameter) ควบคุมรั้วไอโซโครมาติกและสัมพันธ์โดยตรงกับผลต่างของความเค้นหลัก ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) ตัวแปรไอโซโครมาติกจะมีค่าขึ้นอยู่กับความยาวคลื่นและขนาดของแรง ดังนั้นภาพรั้วไอโซโครมาติกจึงเป็นภาพที่มีสีเข้มต่างกันตามค่าความยาวคลื่นและจะมีความถี่ของรั้วเป็นปฏิภาคตรงกับขนาดของแรง กล่าวคือ หากแรงมีค่ามาก รั้วก็จะมีค่าถี่หรือมีจำนวนมากตามไปด้วย

## 5. การใช้งานได้จริงของโฟโตออสติคซิตี

การวิเคราะห์ความเค้นด้วยโฟโตออสติคซิตี จำเป็นต้องใช้ตัวแบบที่ทำมาจากวัสดุโปร่งใส จึงทำให้เกิดคำถามขึ้นมาข้อหนึ่งว่า เราจะทราบได้อย่างไรว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับชิ้นส่วนจริงได้ คำถามนี้สามารถตอบได้โดยการพิจารณาทั้งทางด้านทฤษฎีและทางปฏิบัติ

### 5.1 การใช้งานได้จริงเชิงทฤษฎี

ในส่วนนี้จะอธิบายการใช้งานได้จริงของโฟโตออสติคซิตีโดยเริ่มจากสมการสมดุลความเค้น สำหรับปัญหาความเค้นระนาบนั้น สมการสมดุลความเค้นสามารถเขียนได้ดังนี้ (Ramesh, 2000)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + B_y &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

โดยที่  $B_x$  และ  $B_y$  คือ องค์ประกอบของแรงในเนื้อวัตถุ (body force) ตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ

พิจารณาสมการ(3) เราจะเห็นได้ว่าไม่มีสัมประสิทธิ์ใด ๆ ที่แสดงสมบัติทางกลของวัสดุ เช่น ค่ามอดูลัสยืดหยุ่น

หรือค่ามอดูลัสยืดหยุ่นเฉือนปรากฏอยู่ ดังนั้นจึงพอจะสรุปได้ว่า ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นในวัตถุหนึ่ง ๆ ที่อยู่ภายใต้การกระทำของภาระภายนอกจะไม่ขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์ที่กล่าวข้างต้น หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า การกระจายตัวของความเค้นจะมีลักษณะเหมือนกันในทุก ๆ วัสดุสมลักษณะ (isotropic materials) ที่อยู่ภายใต้ระบบของแรงภายนอกเดียวกัน เนื่องด้วยความเค้นมีความสัมพันธ์โดยตรงกับความเครียด และความเครียดที่ตำแหน่งใด ๆ จะต้องเป็นไปตามสมการความสอดคล้อง (compatibility equation) ดังนั้นความเค้นก็จะต้องเป็นไปตามสมการนี้ด้วยเช่นกัน

สำหรับปัญหาความเค้นระนาบและความเครียดระนาบ สมการความสอดคล้องในพจน์ขององค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน สามารถเขียนได้ตามลำดับดังนี้ (Frocht, 1948)

$$\begin{aligned} \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= -(1 + \nu) \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \\ \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= -\frac{1}{(1 - \nu)} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

โดยที่  $\nu$  คือ ค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง

พิจารณาสมการ (4) พบว่า หากแรงในเนื้อวัตถุมีค่าคงที่แล้ว (วัตถุอยู่ภายใต้สนามความโน้มถ่วง)  $\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$  และสมการ (4) ก็จะลดรูปไปเป็นสมการของลาปลาซ ( $\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$ ) การลดรูปนี้ชี้ให้เห็นว่า ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นยังคงเหมือนกันสำหรับทุก ๆ วัสดุสมลักษณะที่อยู่ภายใต้ระบบของแรงเดียวกัน อย่างไรก็ตาม ข้อสรุปนี้มีข้อยกเว้น กล่าวคือ หากวัตถุดังกล่าวเป็นวัตถุเชื่อมโยงหลายต่อ (multiply-connected bodies) เช่น วัตถุที่มีการเจาะรูบริเวณใกล้กับจุดที่แรงกระทำ เงื่อนไขข้างต้นก็จะเป็นจริงและลักษณะการกระจายตัวของความเค้นก็จะแปรเปลี่ยนไปตามค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง ค่าความแตกต่างของความเค้นนี้ไม่สามารถคำนวณค่าได้ อย่างไรก็ตาม ผลจากการทดลองสำหรับปัญหาง่าย ๆ เช่น แผ่นบางมีรูกลม ตรงกลางรับความเค้นดึงล้วน แสดงให้เห็นว่า ค่าความแตกต่างนี้ไม่มีผลต่อการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ที่ได้มาจาก โฟโตออสติคซิตี (Frocht, 1948; Jessop and Harris, 1950; Dally, 1991)

## 5.2 การใช้งานได้จริงเชิงกายภาพ

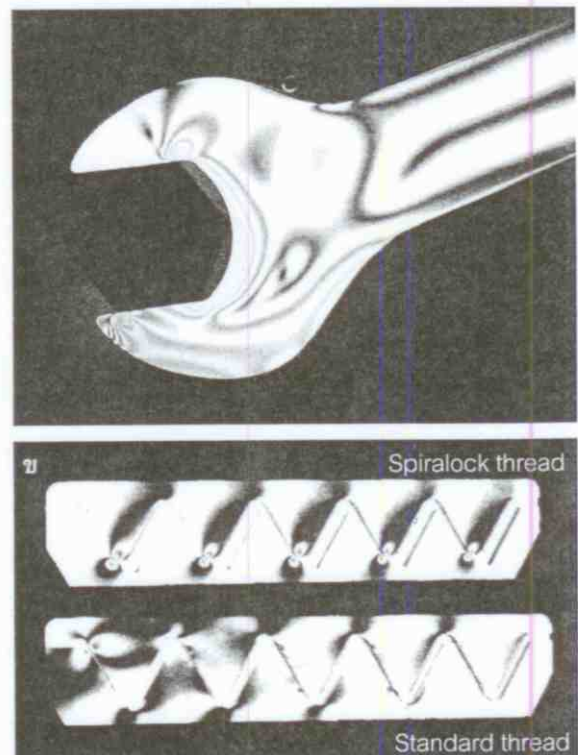
พิจารณาภาพสนามไอโซโครมาติก (isochromatic field) ที่เกิดขึ้นในตัวแบบของประแจปากตายที่ใช้ขันสลักเกลียว (รูปที่ 3ก) จากรูปจะเห็นได้ว่าลักษณะของสีจะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดทั่วทั้งตัวประแจ แต่จะมีริ้วหรือแถบสีหนึ่งที่สีมีความคงที่ เนื่องจากว่า สนามไอโซโครมาติกนั้นแปรผันตรงกับภาระที่กระทำกับตัวประแจ จึงมีหลายปัจจัยที่แสดงถึงระดับของค่าความเค้น กล่าวคือ

- ความเข้มของสี (intensity of colors)
- จำนวนริ้วสีหรือความถี่ของริ้วสี (number or frequency of fringes) และ
- ความโค้งของริ้วสี (curvature of fringes)

ความเข้มของสีจะแปรผกผันกับจำนวนริ้วสี กล่าวคือ ยิ่งความเข้มของสีจางลงไปพร้อม ๆ กับจำนวนริ้วสีที่มากขึ้นเท่าใด ระดับของความเค้นก็ยิ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเท่านั้น ในส่วนความโค้งของริ้วสี หากความโค้งมีค่ามากขึ้นเท่าใด ความเค้นมีค่าสูงขึ้นเท่านั้นเช่นกันแต่ทั้งนี้ก็ขึ้นอยู่กับจำนวนริ้วสีด้วย ในบรรดาปัจจัยทั้งสามนี้ จำนวนริ้วสีมีความสำคัญมากที่สุด

ในรูปที่ 3ก บริเวณที่เกิดความเค้นมากที่สุดก็คือ บริเวณที่เกิดการสัมผัสกันระหว่างประแจกับหัวสลักเกลียว ผู้อ่านอาจจะเกิดข้อสงสัยว่า เนื่องจากบริเวณผิวโค้งด้านในปากประแจนั้นมีจำนวนริ้วสีมากเช่นเดียวกัน ค่าความเค้นที่บริเวณดังกล่าวน่าจะมีค่าสูงกว่าค่าความเค้นที่จุดสัมผัสดังกล่าว ข้อสงสัยนี้สามารถตอบได้โดยพิจารณาความโค้งของริ้วสีประกอบ จะเห็นได้ว่า บริเวณผิวโค้งด้านในปากประแจนั้นความโค้งของริ้วจะมีค่าน้อยกว่าความโค้งของริ้วที่บริเวณจุดสัมผัส ความโค้งของผิวที่ด้านในปากประแจเช่นนี้เรียกว่า ฟิลเลตแบบเส้นสายธาร (streamline fillet) ซึ่งลักษณะความโค้งแบบนี้จะช่วยลดความหนาแน่นของความเค้น (stress concentration) ณ บริเวณดังกล่าว อย่างไรก็ตาม ค่าความเค้นที่บริเวณผิวโค้งด้านในของประแจก็ยังมีค่าสูงอยู่และอาจทำให้เกิดรอยแตกร้าว (crack) ขึ้นได้

รูปที่ 3ข แสดงภาพการขบกันระหว่างเกลียวของสลักเกลียวและแป้นเกลียว ด้านบนเป็นภาพของเกลียวที่มีชื่อทางการค้าว่า spiralock (Kren, 2006) ส่วนภาพด้านล่างนั้นเป็นภาพของเกลียวมาตรฐานที่ใช้กันอยู่ทั่วไป จากการเปรียบเทียบจะเห็นได้ว่า ลักษณะริ้วไอโซโครมาติกในภาพด้านล่างจะมีลักษณะแตกต่างกันโดยเกลียวทางด้านซ้ายมือจะรับความเค้นมากที่สุด ในขณะที่เกลียวถัดมาทางด้านขวามือจะรับความเค้นในสัดส่วนที่น้อยลงมาก ๆ ลักษณะการกระจายตัวที่ไม่สม่ำเสมอเช่นนี้จะทำให้เกลียวเกิดความเสียหายได้ง่าย อย่างไรก็ตามหากพิจารณาภาพด้านบนจะพบว่า ริ้วไอโซโครมาติกเกือบจะมีลักษณะเหมือนกัน ดังนั้นเกลียวทุก ๆ เกลียวจะรับความเค้นในปริมาณที่เกือบจะเท่ากันซึ่งทำให้ทั้งสลักเกลียวและแป้นเกลียวมีอายุการใช้งานที่ยาวนานกว่าเกลียวในภาพด้านล่าง อย่างไรก็ตาม แม้ว่ารูปแบบของเกลียวในภาพด้านบนจะดีกว่ารูปแบบเกลียวในภาพด้านล่าง การผลิตเกลียวแบบภาพด้านบนนั้นจะกระทำได้ยากกว่า ซึ่งส่งผล



รูปที่ 3 ริ้วไอโซโครมาติกของ ก) ประแจปากตาย (Spannungsoptik, 2004) และ ข) เกลียวที่ขบกัน (Kren, 2006)



ให้มีราคาค่อนข้างสูง ดังนั้นเกลียวแบบด้านบนนั้นจึงถูกใช้ในงานที่มีลักษณะเฉพาะเจาะจงเท่านั้น เช่น ใช้ยืดชิ้นส่วนที่อยู่ภายใต้ภาระแปรเปลี่ยน (variable loads)

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า ภาพริ้วสนามความเค้น (รูปที่ 2) หรือริ้วไอโซโครมาติก (รูปที่ 3) ที่ได้จากโฟโตอีลาสติซิตีสามารถให้คำตอบสำหรับข้อสงสัยหลายข้อได้ทั้ง ๆ ที่ยังมีได้ทำการคำนวณใด ๆ ทั้งสิ้นและส่วนนี้เองที่เป็นข้อดีของโฟโตอีลาสติซิตี

## 6. ข้อจำกัดของโฟโตอีลาสติซิตี

แม้ว่าโฟโตอีลาสติซิตีจะมีความสามารถวิเคราะห์ความเค้นได้เป็นอย่างดี วิธีนี้ก็ยังมีข้อจำกัดที่สำคัญอยู่หลายประการดังต่อไปนี้

(1) ในอดีตที่ผ่านมาผู้วิเคราะห์ความเค้นมักจะหาค่าตัวแปรไอโซโครมาติกเท่านั้น ทั้งนี้เนื่องจากการหาค่าตัวแปรไอโซคลินิกกระทำได้ยาก ต้องมีการหมุนชิ้นส่วนของโพลาไรสโคป (polariscope) หลายครั้งเพื่อให้ได้ค่า ตัวแปรไอโซคลินิกทั่วทั้งสนาม ซึ่งทำให้การทำงานเป็นไปด้วยความยากลำบาก

(2) เนื่องจากตัวแปรไอโซโครมาติกสัมพันธ์กับค่าผลต่างของความเค้นหลักไม่ใช่ความเค้นหลักตัวใดตัวหนึ่งซึ่งจำเป็นจะต้องใช้ในการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลตามทฤษฎีความเสียหาย ดังนั้นจึงจำเป็นต้องแยกค่าความเค้นหลักทั้งสองออกจากกัน การแยกความเค้นด้วยวิธีการปฏิบัติด้วยมือจำเป็นต้องใช้ความเพียรพยายามอย่างสูงและต้องใช้เวลาอย่างมาก จึงทำให้ไม่สามารถทำได้ทั่วทั้งสนาม

(3) เนื่องจากอันดับริ้ว  $N$  มีค่าเป็นจำนวนจริงซึ่งประกอบไปด้วยจำนวนเต็มและจำนวนเศษส่วน การหาอันดับริ้วจำนวนเต็มจึงสามารถหาได้โดยการนับริ้ว (counting of fringe orders) แม้ว่าจะมีการกำหนดหลักเกณฑ์ในการนับอันดับริ้วไว้แล้ว (Dally, 1991) แต่ลักษณะของริ้วไอโซโครมาติกจะแปรเปลี่ยนไปตามรูปร่างของวัตถุและลักษณะของแรงที่กระทำ จึงทำให้การนับอันดับริ้วกระทำได้ยาก นอกจากนี้ หากจุดที่สนใจมีอันดับริ้วจำนวนเศษส่วนแล้ว ก็จะไม่สามารถทำการนับได้ด้วยเหตุนี้จึงต้องใช้อุปกรณ์เสริมเข้ามาช่วยในการหาค่า

อันดับริ้วจำนวนเศษส่วน (fractional fringe) และอุปกรณ์ชิ้นนี้มีชื่อเรียกว่า เครื่องชดเชย (compensator) (Dally, 1991) การใช้เครื่องชดเชยนี้ทำให้ผู้วิเคราะห์ต้องมีการปฏิสัมพันธ์กับอุปกรณ์มากขึ้น จึงทำให้เสียเวลามากขึ้นตามไปด้วย

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า ผู้วิเคราะห์ความเค้นจะต้องเป็นผู้ที่มีความชำนาญ และความเข้าใจอย่างสูงในทฤษฎีโฟโตอีลาสติซิตีและด้วยเหตุนี้เองที่ทำให้ผู้วิเคราะห์หันไปใช้การวิเคราะห์ความเค้นเชิงตัวเลข โดยเฉพาะวิธีส่วนย่อยจำกัดซึ่งถูกประดิษฐ์ขึ้นประมาณปี ค.ศ. 1960 และได้รับความนิยมตั้งแต่นั้นเป็นต้นมาจนถึงปัจจุบัน (รูปที่ 1)

## 7. โฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลขคืออะไร

โฟโตอีลาสติซิตีได้รับความนิยมลดลงอย่างรวดเร็วจนถึงประมาณปี ค.ศ. 1990 (รูปที่ 1) ได้มีนักวิจัยหลายท่านได้ผนวกโฟโตอีลาสติซิตีเข้ากับอุปกรณ์เชิงเลขสมัยใหม่ เช่น เครื่องคอมพิวเตอร์ กล้องบันทึกภาพ และซอฟต์แวร์และฮาร์ดแวร์ที่เกี่ยวข้องกับการประมวลผลภาพ (Patterson, 2000; Ramesh, 2000) เพื่อให้การวิเคราะห์ปัญหากระทำได้รวดเร็วยิ่งขึ้น การผสมผสานโฟโตอีลาสติซิตีเข้ากับอุปกรณ์เชิงเลขสมัยใหม่ได้ทำให้เกิดสาขาใหม่ชื่อว่า โฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลข (digital photoelasticity) นักวิจัยหลายท่านได้เสนอวิธีต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหาทางด้านการออกแบบโดยตั้งอยู่บนรากฐานของโฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลข วิธีเหล่านี้รู้จักกันในชื่อของ การวิเคราะห์ริ้วแบบอัตโนมัติ (automated fringe analysis) และกำลังได้รับการพัฒนาความสามารถให้สูงขึ้นอย่างต่อเนื่อง (รูปที่ 1)

## 8. การประยุกต์ใช้โฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลข

โฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลขทำให้การวิเคราะห์ความเค้นเป็นไปได้โดยง่ายและมีความสามารถในระดับสูงเทียบเท่ากับระเบียบวิธีวิธีส่วนย่อยจำกัด (Patterson, 2000) โฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลขจึงถูกนำไปประยุกต์ใช้งานได้ในหลาย ๆ ด้าน เช่น การออกแบบในอุตสาหกรรม การแพทย์ และการเรียนการสอน

ด้านการออกแบบในอุตสาหกรรมนั้น โฟโตอีลาสติซิตีเชิงเลขได้ถูกนำไปใช้ในการหาค่าตัวประกอบต่างๆ

อาทิเช่น ตัวประกอบความเค้นเข้มข้น ตัวประกอบความหนาแน่นของความเค้น ความเค้นตกค้าง (residual stress) ในวัตถุ และหาจุดบกพร่องที่เกิดขึ้นในกระจกแก้วหรือขวดใส (Aben *et al.*, 2000) เป็นต้น นอกจากนี้ภาพสนามไอโซคลินิกยังนำไปหาสนามแนววิถีความเค้นหลัก (stress trajectory) (Thamm, 2000) เพื่อใช้ในการออกแบบเหมาะสมที่สุดทางด้านรูปร่างของชิ้นส่วนเครื่องจักรกลและการแยกความเค้นหลัก (Petrucchi and Restivo, 2007) สำหรับด้านการแพทย์นั้นได้มีการนำไปประยุกต์ใช้เกี่ยวกับการทำศัลยกรรมฟัน (Srinivasan and Padmanabhan, 2005; Wang *et al.*, 2004)

ในด้านการเรียนการสอนนั้น มีการสอนโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขอยู่ทั่วไปตามสถาบันการศึกษาต่าง ๆ ทั้งต่างประเทศ (Shakerin and Jensen, 2001) และในประเทศ ส่วนใหญ่แล้วโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขจะถูกบรรจุเป็นหัวข้อหนึ่งภายใต้รายวิชา การวิเคราะห์ความเค้นเชิงทดลอง (experimental stress analysis) สำหรับในประเทศไทย รายวิชาการวิเคราะห์ความเค้นเชิงทดลอง มักจะถูกบรรจุอยู่ในหลักสูตรระดับบัณฑิตศึกษา เนื่องจากว่าโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขมีความเกี่ยวข้องโดยตรงกับการประยุกต์ทางด้านการออกแบบ ดังนั้นหากสามารถนำโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขมาผสมผสานเชิงบูรณาการกับรายวิชาอื่น ๆ เช่น กลศาสตร์วัสดุ หรือการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล ก็จะทำให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพิ่มขึ้น (พิเชษฐ์ พินิจ, 2551)

### 9. ปัญหาในโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลข

แม้ว่าจะสามารถนำโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขไปประยุกต์ใช้ในงานด้านการออกแบบในอุตสาหกรรม การแพทย์ และ การศึกษาได้ แต่ก็ยังมีปัญหาหลายปัญหาที่ต้องทำการแก้ไข ปัญหาเหล่านี้เป็นหัวเรื่องสำคัญในการทำการวิจัยที่กำลังดำเนินอยู่อย่างต่อเนื่องในปัจจุบัน (รูปที่ 1) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

(1) อิทธิพลระหว่างตัวแปรไอโซคลินิกและตัวแปรไอโซโครมาติก เนื่องจากว่าวิธีที่เกี่ยวข้องกับสองตัวแปรนี้ก็ซ้อนทับกันอยู่ในวิธีโฟโตอีลาสติกซิตี ตัวแปรทั้งสองจะมี

อิทธิพลต่อกันและกันเมื่อมีการคำนวณเชิงตัวเลขเกิดขึ้น ดังนั้น การแยกแยะ (ตัวแปร) ทั้งสองออกจากกันโดยสิ้นเชิงจึงเป็นเรื่องที่มีความสำคัญอย่างมาก

(2) ตัวแปรอยู่ในรูปของฟังก์ชันคาบ เนื่องจากว่าสมการที่ใช้หาค่าตัวแปรทั้งสองอยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ค่าของตัวแปรที่คำนวณหาได้จึงเป็นค่าเฟสซ้อนรูป (wrapped phase values) เนื่องด้วยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขไปประยุกต์ใช้จะต้องเป็นค่าเฟสเต็มรูป (unwrapped phase values) ด้วยเหตุนี้ การประดิษฐ์กระบวนการคืนรูป (unwrapping process) ที่มีประสิทธิภาพจึงเป็นเรื่องที่มีความสำคัญ

(3) การแยกความเค้น ตามที่ได้กล่าวแล้วข้างต้นว่าวิธีไอโซโครมาติกมีความสัมพันธ์โดยตรงกับค่าผลต่างของความเค้นหลักมิใช่ความเค้นหลักตัวใดตัวหนึ่ง ดังนั้นการแยกความเค้นจึงมีความจำเป็น การแยกความเค้นโดยอาศัยอุปกรณ์ชดเชยนั้นเป็นเรื่องที่ยุ่งยาก ดังนั้นการประดิษฐ์วิธีที่มีความถูกต้องและรวดเร็วในการแยกความเค้นจึงเป็นเรื่องที่สำคัญเช่นเดียวกัน

### 10. บทสรุป

โฟโตอีลาสติกซิตีเป็นวิธีหนึ่งในการวิเคราะห์ความเค้นเชิงทดลองที่สามารถแสดงความเค้นออกมาในรูปของข้อมูลเชิงสนาม การใช้งานได้จริงของโฟโตอีลาสติกซิตีสามารถพิสูจน์ได้ทั้งภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ ด้วยการผสมผสานระหว่างโฟโตอีลาสติกซิตีกับความก้าวหน้าทางด้านเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ เป็นผลให้เกิดสาขาใหม่ขึ้นภายใต้ชื่อ โฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลข

โฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลขสามารถใช้งานได้ง่ายโดยที่ผู้วิเคราะห์ไม่จำเป็นต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีโฟโตอีลาสติกซิตีมากนัก นอกจากนี้การผนวกเทคโนโลยีสมัยใหม่ที่เรียกว่า การทำต้นแบบรวดเร็ว (rapid prototyping) ที่สามารถสร้างตัวแบบที่มีรูปร่างซับซ้อนได้โดยง่ายและสะดวกเข้ากับโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลข จะทำให้การวิเคราะห์ความเค้นสามารถกระทำได้รวดเร็วยิ่งขึ้น (Karelekas and Agelopoulos, 2006) การผสมผสานเทคโนโลยีดังกล่าวข้างต้นจะทำให้โฟโต



อีลาสติซิตีเชิงเลขกลายเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์ความเค้นในอนาคต

# 11. เอกสารอ้างอิง

พิเชษฐ์ พินิจ. (2551). โปรแกรมเพื่อการแสดงผลภาพสนามความเค้นสองมิติเพื่อการพัฒนาการเรียนรู้และประสบการณ์ในการเรียนรายวิชาการศาสตร์วัสดุขั้นสูง. เอกสารประชุมวิชาการครุศาสตร์อุตสาหกรรมแห่งชาติครั้งที่ 3 ครุศาสตร์อุตสาหกรรมกับการพัฒนาอาชีวศึกษายุคใหม่; 18-19 ธันวาคม 2551; โรงแรมเอส ดี อเวนิว, กรุงเทพฯ. ประเทศไทย. หน้า 233-241

Aben, H., Ainola, L. and Anton, J. (2000). Integrated photoelasticity for nondestructive residual stress measurement in glass. *Optics and Lasers in Engineering*. Vol. 33, No. 1, 49-64.

Dally, J.W. and Riley, W.F. (1991). *Experimental stress analysis*. in Chapter 13, 2<sup>nd</sup> ed.; McGraw-Hill.

Frocht, M.M. (1948). *Photoelasticity*. in Chapters 1 and 6, Vol. 2; John Wiley & Sons.

Jessop, H.T. and Harris, F.C. (1950). *Photoelasticity: principles and methods*. in Chapters 5 and 6, Dover.

Karelekas, D.E. and Agelopoulos, A. (2006). On the use of stereolithography built photoelastic models for stress analysis investigations. *Material and Design*. Vol. 27, No. 2, 100-106.

Kren, L. (2006). Ramp breaks common thread of fastener failures. Spiralock Corporation. (Cited 2006 Oct 12) Available from: <http://machinedesign.com/article/ramp-breaks-common-thread-of-fastener-failures-1012>. (accessed on March 10, 2009).

Legay, A. (2003). *Photoelasticity*. Structural Mechanics and Coupled Systems Laboratory. Available from: [http://antoinelegay.free.fr/dutgmp\\_photoelas.html](http://antoinelegay.free.fr/dutgmp_photoelas.html). (accessed on March 10, 2009).

Patterson, E.A., (2002). *Digital photoelasticity: principles, practice and potential*. *Strain*. Vol. 38, No. 1, 27-39.

Petrucci, G and Restivo, G. (2007). Automated stress separation along stress Trajectories. *Experimental Mechanics*. Vol. 47, No. 6, 733-743.

Ramesh, K. (2000). *Digital photoelasticity: Advanced methods and applications*. in Chapter 1, Springer.

Shakerin, S. and Jensen, D.D. (2001). Enhancement of mechanics education by means of photoelasticity and finite element methods. *International Journal of Mechanical Engineering Education*. Vol. 29, No. 4, 307-320.

Spannungsoptik. (2004). Technische Universität Chemnitz. Available from: <https://www.tu-chemnitz.de/mb/ExpMech/bildschluessel.php?druck>. (accessed on March 12, 2009).

Srinivasan, M. and Padmanabhan, T.V. (2005). Implant prosthodontics: an in-vitro photoelastic stress analysis. *Journal of Indian Prosthodontic Society*. Vol. 5, No. 4, 193-199.

Thamm, F. (2000). The role of the stress trajectories as an aid in the choice of the suitable shape of load-bearing structural elements of engines and structure. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*. Vol. 44, No. 1, 171-183.

Wang, M.Q., Zhang, M. and Zhang, J. (2004). Photoelastic study of the effects of occlusal surface morphology on tooth apical stress from vertical bite forces. *Journal of Contemporary Dental Practice*. Vol. 5, No. 1, 74-93.