

## การวิเคราะห์การไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จิตติน ตริพุทธรัตน์ \*

### บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการศึกษาการวิเคราะห์การไหล ที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ การไหลที่ไม่มีความเฉื่อยซึ่งเป็นการไหลของของไหลแบบเชิงช้าๆ และการไหลที่มีความเฉื่อยซึ่งเป็นการไหลแบบทั่วไป สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีความสอดคล้องกับการไหลทั้งสองแบบข้างต้นได้ประดิษฐ์ขึ้น สมการดังกล่าวได้นำมาใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งสามารถใช้ได้ในคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลโปรแกรมนี้ ได้มีการตรวจสอบความถูกต้องโดยทำการแก้ปัญหาตัวอย่างที่มีผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับทางทฤษฎี ก่อนที่จะมีการนำมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

**คำสำคัญ :** ไฟไนต์เอลิเมนต์, การไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัว

---

\* อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, อีเมล: Jittri@kku.ac.th

## A Finite Element Method for Viscous Incompressible Flow Analysis

Jittin Triputtarat \*

### Abstract

A finite element method for viscous incompressible flow analysis is presented. The flow is classified into two types as: the flow without inertia for slow moving fluid and with inertia for a more general flow. Finite element equations corresponding to these flows are derived and are used in the development of the computer programs that can be executed on standard personal computers. The programs have been verified by solving academic-type examples that have exact solutions before applying to solve more complex flow problems.

**Keywords:** Finite Element, Viscous incompressible flow

---

\* Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University, Khon Kaen 40002, E-mail: Jittri@kku.ac.th

## บทนำ

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ใช้สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ และได้รับความนิยมเนื่องจากมีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาโครงสร้างที่ซับซ้อน (Cook, Malkus and Plesha, 1989) (Zienkiewicz and Taylor, 2005) วิธีการนี้มีการนำมาใช้แพร่หลายในการแก้ปัญหาทางด้านต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อน (Lewis, et al., 1996) (Dechaumphai, 1994) การถ่ายเทประจุไฟฟ้า (Jin, 1993) ชีวการแพทย์ (Gallagher, et al., 1982) เป็นต้น นอกจากนี้ไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านพลศาสตร์โดยเฉพาะการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความหนืดซึ่งต้องทำการวิเคราะห์ค่อนข้างซับซ้อนโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับปัญหาการไหลทั่วไปซึ่งประกอบไปด้วยสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในการประมวลผลวิธีเชิงตัวเลขให้มีผลลัพธ์ที่แม่นยำจำเป็นต้องมีการใช้พื้นที่ในการจัดเก็บข้อมูลและมีการใช้เวลาในการวิเคราะห์ค่อนข้างมาก

การศึกษานี้เริ่มจากการไหลที่มีความหนืดคงที่แบบไม่อัดตัวและไม่มีความเฉื่อยซึ่งเป็นการไหลของของไหลแบบเชิงช้า สมการนาเวียร์-สโตว์จะถูกนำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยมีการคำนวณหาผลลัพธ์ด้วยโปรแกรมทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่กล่าวข้างต้น ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัวและมีความเฉื่อยเป็นการไหลของของไหลทั่วไปก็จะมีทำการวิเคราะห์หาผลลัพธ์เช่นเดียวกัน การศึกษาครั้งนี้ได้มีการทำการวิเคราะห์ตัวอย่างปัญหาหลายๆรูปแบบเพื่อทำการพิสูจน์ประสิทธิภาพของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้วิเคราะห์ปัญหาการไหลของไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัว

## 1. การไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัวโดยไม่มี ความเฉื่อย

### 1.1 สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น

ทฤษฎีเบื้องต้นที่ใช้กับการแก้ปัญหาคำนวณที่ของไหลจะอยู่ในรูปของสมการทั่วไปคือ

1. กฎการอนุรักษ์มวลหรือสมการความต่อเนื่อง
2. กฎอนุรักษ์โมเมนตัม และ
3. กฎอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งประกอบ

ไปด้วยสมการ 2 สมการคือ สมการไม่เชิงเส้นและสมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับการไหลก่อดัดไม่ได้ที่มีการไหลที่เข้าความหนาแน่นและอุณหภูมิของของไหลจะถูกกำหนดให้ มีค่าคงที่ และจะมีสมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมเท่านั้นที่มีความสำคัญต่อการวิเคราะห์ โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์จะมีการไหลที่คงที่ 2 ทิศทางดังสมการ (1a-c)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1a)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = p \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1b)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1c)$$

โดยที่  $u$  และ  $v$  คือความเร็วในทิศทาง  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ  $p$  คือความดัน  $\mu$  คือค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดของของไหล และ  $\rho$  คือความหนาแน่นของของไหล

ในส่วนของการไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัวโดยไม่มี ความเฉื่อยสามารถใช้ทฤษฎีเรโนลด์ส์นัมเบอร์โดยสมการนี้จะป็นอัตราส่วนของค่าความเฉื่อยต่อความหนืดของของไหล เมื่อใดที่ค่าเรโนลด์ส์นัมเบอร์มีค่าน้อยมากค่าความเฉื่อยของการไหลของของไหลไม่ต้องนำมาทำการเปรียบเทียบกับค่าความหนืดและสามารถตัดออกจากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมได้ดังสมการ (1b-c) ในส่วนนี้สมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ (1a-c) ลดรูปลงเป็นสมการง่าย ๆ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ tensor คือ

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad (2a)$$

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0 \quad (2b)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0 \quad (2c)$$

โดยมีส่วนประกอบเป็นความเค้นคือ

$$\sigma_x = -p + 2\mu u_{,x} \quad (3a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu v_{,y} \quad (3b)$$

$$\tau_{xy} = \mu(u_{,x} + v_{,y}) \quad (3c)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ (2a-c) สามารถอธิบายอยู่ในรูปของความเร็วตามระยะทางของการไหล  $S_1$

$$u = u_1(x, y) \quad (4a)$$

$$v = v_1(x, y) \quad (4b)$$

หรือตามระยะที่เกิดแรงตึงผิว  $S_2$

$$T_x = \sigma_x \ell + T_{xy} m \quad (5a)$$

$$T_y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m \quad (5b)$$

โดยที่  $\ell$  และ  $m$  คือทิศทางในรูปของโคไซน์ในรูปแบบเวกเตอร์

## 1.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

โดยทั่วไปตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของปัญหาการไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัวนั้นมีความสอดคล้องกับสมการความต่อเนื่องดังสมการ (1a) และสมการการเคลื่อนที่ 2 สมการคือ (1b-c) ซึ่ง 2 สมการนี้ประกอบไปด้วยความเร็ว  $u, v$  และความดัน  $p$  บทความนี้ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมชนิดหกจุดต่อ (Yamada, et al., 1975) ซึ่งเอลิเมนต์นี้มีองค์ประกอบความเร็วและความดันดังสมการ

$$u(x, y) = N_\alpha u_\alpha \quad (6a)$$

$$v(x, y) = N_\alpha v_\alpha \quad (6b)$$

$$p(x, y) = H_\lambda P_\lambda \quad (6c)$$

โดยที่  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ;  $\lambda = 1, 2, 3$   $N_\alpha$  และ  $H_\lambda$  เป็นเอลิเมนต์ที่เป็นฟังก์ชันของความเร็วและความดันตามลำดับ

ทำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้เป็นสมการการเคลื่อนที่ (2b-c) และสมการความต่อเนื่อง (2a) ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

$$\int_A N_i (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) dA = 0 \quad (7a)$$

$$\int_A N_i (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dA = 0 \quad (7b)$$

$$\int_A H_i (u_{,x} + v_{,y}) dA = 0 \quad (7c)$$

โดยที่  $A$  เป็นพื้นที่ประยุกต์ใช้ทฤษฎีของเกาส์ในสมการ (7a-c) ทำการอินทิเกรตและกำหนดเงื่อนไขขอบเขตจาก

สมการ (5a-b) และสมการ (7a-b) จะได้

$$\begin{aligned} & \int_A [(2\mu u_{,x} - p)N_{\alpha,x} + \mu(u_{,y} + v_{,x})N_{\alpha,y}] dA \\ & = \int_{S_2} N_\alpha T_x dS \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} & \int_A [\mu(u_{,y} + v_{,x})N_{\alpha,x} + (2\mu v_{,y} - p)N_{\alpha,y}] dA \\ & = \int_{S_2} N_\alpha T_y dS \end{aligned} \quad (8b)$$

เมื่อนำเอลิเมนต์ความเร็วและความดันจากสมการ (6a-c) มาประยุกต์ใช้สามารถเขียนเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูป

$$(2\mu M_{\alpha\beta xx} + \mu M_{\alpha\beta yy})\mu_\beta + \mu M_{\alpha\beta xy} v_\beta - H_{\alpha\lambda x} P_\lambda = R_{\alpha x} \quad (9a)$$

$$\mu M_{\alpha\beta yx} u_\beta + (\mu M_{\alpha\beta xx} + 2\mu M_{\alpha\beta yy})v_\beta - H_{\alpha\lambda y} P_\lambda = R_{\alpha y} \quad (9b)$$

$$-H_{\beta\lambda x} u_\beta + H_{\beta\lambda y} v_\beta = 0 \quad (9c)$$

โดยที่

$$M_{\alpha\beta xx} = \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA \quad (10a)$$

$$M_{\alpha\beta yy} = \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (10b)$$

$$M_{\alpha\beta xy} = \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA \quad (10c)$$

$$M_{\alpha\beta yx} = \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,x} dA \quad (10d)$$

$$H_{\alpha\lambda x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda dA \quad (10e)$$

$$H_{\alpha\lambda y} = \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda dA \quad (10f)$$

$$R_{\alpha x} = \int_{S_2} N_\alpha T_x dS \quad (10g)$$

$$R_{\alpha y} = \int_{S_2} N_\alpha T_y dS \quad (10h)$$

เอลิเมนต์เมทริกซ์นี้ได้นำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งรายละเอียดเกี่ยวกับเมทริกซ์ไม่แสดงในบทความนี้

## 1.3 ขั้นตอนการวิเคราะห์

จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ (10a-h) ซึ่งในบทความนี้ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมหกจุดต่อเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ประกอบไปด้วยสมการดังสมการ

(9a-c) รวม 15 สมการโดยที่สมการเอลิเมนต์นี้จะขึ้นอยู่กับปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ โดยเริ่มจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมก่อนทำการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าตัวแปรของความเร็วและความดัน ในที่นี้สมการเอลิเมนต์ (9a-c) เป็นสมการเชิงเส้นและมีการคำนวณผลลัพธ์เป็นแบบการแก้ปัญหาโดยตรง ซึ่งทั้งสมการเมทริกซ์และโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ได้มีการตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำโดยทำการวิเคราะห์ตัวอย่างปัญหาแบบง่ายเพื่อดูผลลัพธ์ที่ได้ก่อนนำมาทำการวิเคราะห์ปัญหาข้างต้น

#### 1.4 ตัวอย่างที่ทำการวิเคราะห์

ในการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ จะทำการวิเคราะห์การไหลในท่อโลหะเรียบซึ่งเป็นการไหลแบบเต็มรูปแบบในท่อดังรูปที่ 1 โดยความเร็วที่ไหลเข้าท่อจะอยู่ในรูปแบบการกระจายตัวเป็นแบบพาลาโบลา

$$u(y) = \frac{4y}{h^2} (h - y) \quad (11)$$

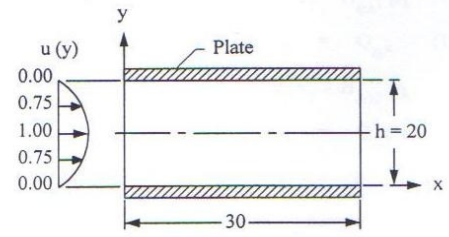
ทำให้เป็นการไหลเป็นการไหลในทิศทางเดียว

ตามแกน x (White, 1991)เขียนอยู่ในรูป

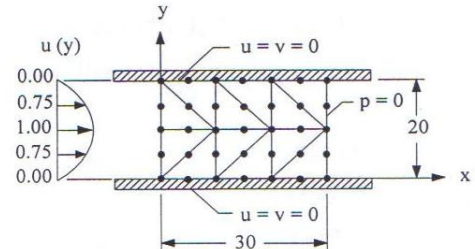
$$u(y) = \frac{y}{2\mu} (y - h) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (12)$$

ซึ่งแบบจำลองการไหลในท่อโลหะเรียบจะมีการแบ่งเอลิเมนต์เป็นแบบสามเหลี่ยมจำนวนเอลิเมนต์ 12 เอลิเมนต์และมีจำนวน 35 จุดต่อและมีการกำหนดขอบเขตเงื่อนไขดังรูปที่ 2 ในการวิเคราะห์นี้จะทำการวิเคราะห์การกระจายตัวของความเร็วและความดันที่เกิดขึ้นในขณะที่ของไหลไหลอยู่ในท่อแผ่นโลหะเรียบ รูปที่ 3 เป็นการทำนายอัตราเร็วการไหลซึ่งมีลักษณะการไหลในทิศทางแกน x จากการทำนายนี้แสดงให้เห็นว่าลักษณะของการไหลของของไหลมีความสอดคล้องกับสมการ (12) เมื่อทำการเปรียบเทียบกับรูปที่ 4 และรูปที่ 5 เป็นการทำนายการกระจายตัวของความดันบริเวณด้านล่างของท่อ ด้านบนและตรงกลางของท่อซึ่งเป็นไปตามสมการ

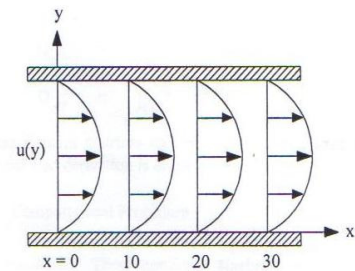
$$P(x) = \frac{8u}{h^2} (x - 30) \quad (13)$$



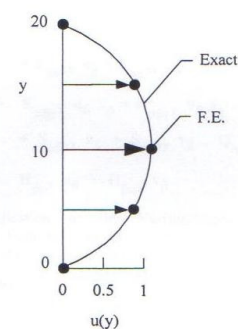
รูปที่ 1 ลักษณะการไหลของของไหลในท่อโลหะเรียบ



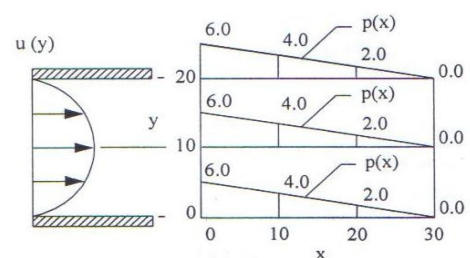
รูปที่ 2 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และสมภาวะเงื่อนไขขอบเขตของการไหลในท่อ



รูปที่ 3 รูปแบบความเร็วของการไหลของของไหลในทิศทางแกน X



รูปที่ 4 เปรียบเทียบความเร็วการไหลของของไหลในท่อระหว่างผลลัพธ์แม่นยำตรงและผลลัพธ์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 5 การกระจายตัวของความดันในทิศทางแกน X

## 2. การไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัวโดยมีความเฉื่อย

### 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น

สำหรับปัญหาการไหลทั่วไปสมการนาเวียร์-สโตร์สามารถนำมาแก้ปัญหาได้ดังสมการ (1a-c) ซึ่งสมการนี้จะมีลักษณะเป็นสมการไม่เชิงเส้นเนื่องจากมีเทอมของความเฉื่อยเข้ามาเกี่ยวข้องดังแสดงในสมการ (1b-c) สมการนาเวียร์-สโตร์นี้ถูกเขียนให้อยู่ในรูปเทนเซอร์เพื่อให้ง่ายต่อการทำเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังนี้

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad (14a)$$

$$u u_{,x} + v u_{,y} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y} = 0 \quad (14b)$$

$$u v_{,x} + v v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} = 0 \quad (14c)$$

เมื่อทำเป็นสมการที่มีความเค้นเป็นองค์ประกอบแสดงได้เป็น

$$\sigma_x = -p + 2\nu u_{,x} \quad (15a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\nu v_{,y} \quad (15b)$$

$$\tau_{xy} = \nu(u_{,y} - v_{,x}) \quad (15c)$$

และอยู่ในรูปของความหนืดจุลศาสตร์คือ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (16)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\mu^x} p_\mu + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta = Q_{\alpha^x} \quad (17a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\mu^y} p_\mu + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta = Q_{\alpha^y} \quad (17b)$$

$$H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta = 0 \quad (17c)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ในรูปแบบเมทริกซ์เอลิเมนต์หาได้จากการอินทิเกรตพื้นที่ A และระยะทางของของไหล  $S_2$  คือ

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x} dA \quad (18a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y} dA \quad (18b)$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda dA \quad (18c)$$

$$H_{\alpha\lambda^y} = \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda dA \quad (18d)$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2\nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + \nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (18e)$$

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = \nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,x} dA \quad (18f)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA \quad (18g)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + 2\nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (18h)$$

$$Q_{\alpha^x} = \int_{S^2} N_i T_x dS \quad (18i)$$

$$Q_{\alpha^y} = \int_{S^2} N_i T_y dS \quad (18j)$$

### 2.2 กระบวนการการคำนวณ

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (17a-c) เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้นสมการแบบไม่เชิงเส้นนี้เป็นสมการพีชคณิตจะถูกประยุกต์ด้วยวิธีของนิวตันราฟสัน (Dechaumphai, 1995) โดยเริ่มแรกจะมีค่าที่ไม่สมดุลในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังนี้

$$F_{\alpha^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta - Q_{\alpha^x} \quad (19a)$$

$$F_{\alpha^y} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta - Q_{\alpha^y} \quad (19b)$$

$$F_\mu = H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta \quad (19c)$$

ในการประยุกต์วิธีการของนิวตัน ราฟสันในสมการพีชคณิตนั้นอยู่ในรูป

$$G_{\alpha\beta^x} \Delta u_\beta + L_{\alpha\beta^y} \Delta v_\beta - H_{\alpha\lambda^x} \Delta p_\lambda = F_{\alpha^x} \quad (20a)$$

$$L_{\alpha\beta^x} \Delta u_\beta + G_{\alpha\beta^y} \Delta v_\beta - H_{\alpha\lambda^y} \Delta p_\lambda = F_{\alpha^y} \quad (20b)$$

$$H_{\alpha\mu^x} \Delta u_\beta + H_{\beta\mu^y} \Delta v_\beta = F_\mu \quad (20c)$$

โดยที่

$$G_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \quad (21a)$$

$$G_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \quad (21b)$$

$$L_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \quad (21c)$$

$$L_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \quad (21d)$$

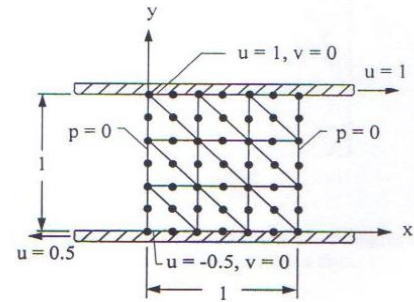
ในสมการ (21a-d) นี้  $u_\gamma$  และ  $v_\gamma$  เป็นค่าของความเร็วในขณะที่มีการทำการคำนวณซ้ำ การวิเคราะห์ซ้ำนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อเปอร์เซ็นต์ของค่าผิดพลาดน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้

## 2.3 ตัวอย่างปัญหาที่ทำการวิเคราะห์และประโยชน์ที่ได้รับ

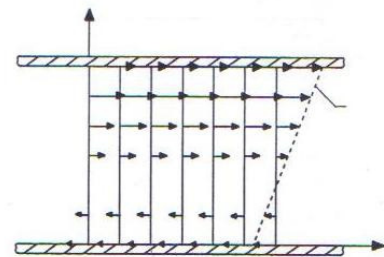
ตัวอย่างแรกที่น่าสนใจมาทำการวิเคราะห์ในโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลที่มีความหนืดแบบไม่อัดตัวโดยมีความเฉื่อยนั้นก็คือปัญหาที่เกี่ยวข้องของไหลแบบ ราบเรียบ (Couette) รูปร่างลักษณะและเงื่อนไขขอบเขตถูกแสดงดังรูปที่ 6 ส่วนบนของท่อแผ่นโลหะมีการเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว  $u = 1$  ขณะที่ด้านล่างของท่อแผ่นโลหะจะมีการเคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยความเร็ว  $u = -0.5$  แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบไปด้วยเอลิเมนต์ 18 เอลิเมนต์และมีจำนวนจุดต่อ 49 จุดต่อดังรูป โดยที่ความเร็ว  $u$  จะมีลักษณะกระจายตัวซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการดังนี้

$$u(y) = 1.5y - 0.5 \quad (22)$$

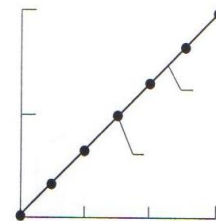
ซึ่งปัญหานี้ถูกวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อทำนายอัตราการไหลของของไหลในทิศทางแกน X ดังรูปที่ 7 ซึ่งการคำนวณอัตราเร็วของการไหลนี้จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับมีความสอดคล้องกับสมการการไหลของของไหลดังสมการที่ (22) ดังรูปที่ 8



รูปที่ 6 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และสภาวะเงื่อนไขของการไหลแบบราบเรียบ

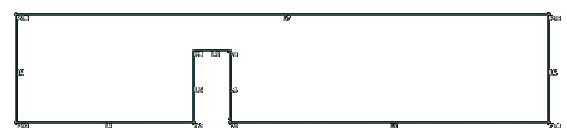


รูปที่ 7 ลักษณะความเร็วในการไหลของของไหลในทิศทางแกน X ซึ่งเป็นการไหลแบบราบเรียบ

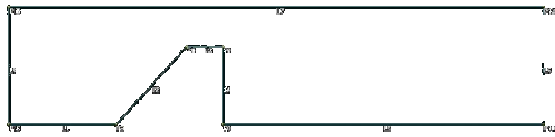


รูปที่ 8 การเปรียบเทียบอัตราเร็วของของไหลระหว่างผลลัพธ์ของการไหลของของไหลตามหลักทฤษฎีและผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

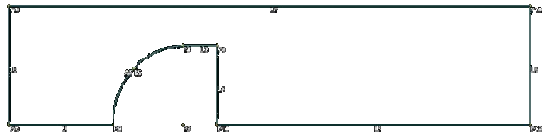
ในการทดสอบประสิทธิภาพของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการแก้ปัญหาการไหลที่ซับซ้อนในตัวอย่างที่สองได้มีการทำการทดสอบการไหลผ่านผนังลดแรงกระแทก 4 รูปแบบดังแสดงในรูปที่ 9, 10, 11, 12 และผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 14, 15, 16 และ 17



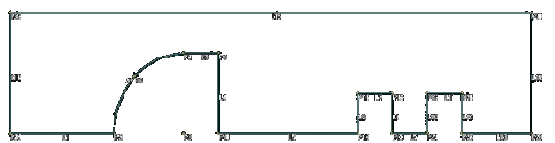
รูปที่ 9 การกำหนดขอบเขตการไหลของน้ำผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 1



รูปที่ 10 การกำหนดขอบเขตการไหลของน้ำผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 2

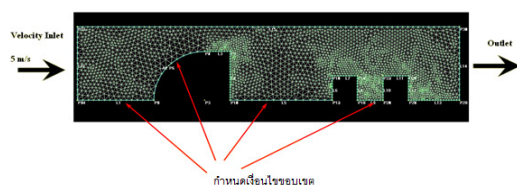


รูปที่ 11 การกำหนดขอบเขตการไหลของน้ำผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 3



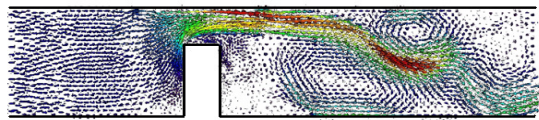
รูปที่ 12 การกำหนดขอบเขตการไหลของน้ำผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 4

รูปที่ 9, 10, 11 และ 12 เป็นการกำหนดการไหลของน้ำผ่านผนังลดแรงกระแทกรูปแบบต่างๆ โดยรูปแบบที่ 1 ผนังลดแรงกระแทกจะมีลักษณะผนังลดแรงกระแทกแบบตรง แบบที่ 2 บริเวณด้านหน้าของผนังลดแรงกระแทกทำมุมเอียง 45 องศา แบบที่ 3 ผนังลดแรงกระแทกจะมีลักษณะโค้ง และแบบที่ 4 ผนังลดแรงกระแทกมีลักษณะโค้งและเพิ่มผนังแบบตรงอีกสองอันทางด้านท้าย ตามลำดับ ซึ่งจะมีการแบ่งเอลิเมนต์เป็นเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมทั้ง 4 รูปที่คล้ายคลึงกัน ดังรูปแบบที่รูปที่ 13 การแบ่งเอลิเมนต์ของการวิเคราะห์ลักษณะการไหลของน้ำผ่านผนังลดแรงกระแทกทั้ง 4 รูปแบบ โดยจะทำการแบ่งเอลิเมนต์บริเวณส่วนโค้งและมุมของผนังลดแรงกระแทกให้มีความละเอียดมากกว่าบริเวณอื่นเนื่องจากบริเวณนี้จะเป็นบริเวณที่จะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัดเจน

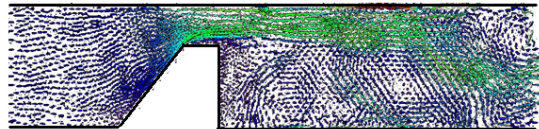


รูปที่ 13 การกำหนดขอบเขตเงื่อนไขในการวิเคราะห์

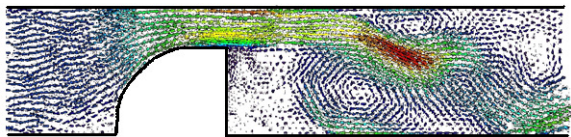
การกำหนดขอบเขตเงื่อนไขปัญหาของการไหลของน้ำผ่านผนังลดแรงกระแทกทั้ง 4 รูปแบบ มีการกำหนดให้อัตราการไหลของน้ำมีความเร็วเท่ากับ 5 เมตร/วินาที บริเวณผิวของน้ำกำหนดให้เป็นความดันบรรยากาศ และบริเวณด้านล่างของเขื่อนกำหนดให้เป็นผนัง



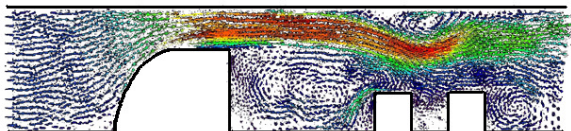
รูปที่ 14 เวกเตอร์ความเร็วของน้ำที่ไหลผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 1



รูปที่ 15 เวกเตอร์ความเร็วของน้ำที่ไหลผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 2



รูปที่ 16 เวกเตอร์ความเร็วของน้ำที่ไหลผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 3



รูปที่ 17 เวกเตอร์ความเร็วของน้ำที่ไหลผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 4

จากรูปที่ 14, 15, 16 และ 17 แสดงลักษณะเวกเตอร์ของความเร็วของกระแสน้ำ ที่ผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ที่ได้จากการคำนวณผ่านโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งจากผลที่แสดงจะเห็นว่าความเร็วของน้ำที่ไหลผ่านผนังลดแรงกระแทกแบบที่ 1 บริเวณด้านหน้าของผนังจะรับกระแสน้ำแบบตั้งฉากโดยตรง ซึ่งส่งผลให้ส่วนด้านหน้าของผนังเกิดความเสียหายได้โดยตรง และในส่วนด้านหลังของผนังจะเกิดการไหลหมุนวน ในแบบที่ 2 เมื่อทำการปรับเปลี่ยนรูปร่าง

โครงสร้างของผนังลดแรงกระแทกให้มีความลาดชันเป็น 45 องศา ผลที่แสดงได้ว่ากระแสน้ำมีการไหลผ่านได้ดีกว่าแบบที่ 1 และเกิดการไหลหมุนวนลดน้อยลงแสดงว่าภาชนะรับแรงดลของน้ำมีค่าน้อยกว่า เช่นเดียวกันส่วนในแบบที่ 3 และ 4 เมื่อปรับปรุงในส่วนทางผิวรับแรงกระแทกให้เป็นส่วนโค้งจะเห็นได้ว่าทางด้านหน้าของผนังจะรับแรงกระแทกได้น้อยที่สุด และการไหลผ่านของกระแสน้ำจะดูราบเรียบที่สุด การไหลหมุนวนทางด้านหลังลดลงและเกิดห่างจากฐานของผนังลดแรงกระแทกและสามารถนำไปใช้ได้จริงกับการลดการกัดเซาะชายฝั่งของทะเลดังรูปแบบที่ 4 เป็นต้น

### 3. สรุปผลการวิเคราะห์

ระเบียบวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้ เป็นระเบียบวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาของไหลที่มีความหนืดเป็นแบบไม่อัดตัว สมการนาเวียร์-สโตว์ประกอบไปด้วยสมการอนุรักษ์มวลและสมการการเคลื่อนที่ซึ่ง 2 สมการนี้จะถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหาการไหล รูปแบบการไหลสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ การไหลที่มีความเฉื่อยซึ่งเป็นการไหลแบบเชิงชั่ว และการไหลที่ไม่มีความเฉื่อยซึ่งเป็นการไหลทั่วไป

สำหรับปัญหาการไหลที่ไม่มีความเฉื่อย สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นสมการเส้นตรง แต่สำหรับปัญหาการไหลทั่วไปตัวแปรความเฉื่อย จะเพิ่มเข้ามาในสมการนาเวียร์-สโตว์ทำให้การวิเคราะห์หาคำผลลัพธ์เป็นแบบไม่เชิงเส้น การวิเคราะห์นี้จำเป็นต้องใช้วิธีการวิเคราะห์แบบการวนซ้ำโดยใช้วิธีการของนิวตันรับสั่นเข้ามาช่วยในการวิเคราะห์

ทั้งทฤษฎีไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ได้มีการตรวจสอบความแม่นยำในการวิเคราะห์ผลลัพธ์โดยทำการวิเคราะห์ปัญหาหลายๆปัญหาไม่ว่าจะเป็นการวิเคราะห์โดยทฤษฎีและการทดลองจากปัญหาข้างต้นสามารถที่จะพิสูจน์ให้เห็นว่าทฤษฎีไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นมีประสิทธิภาพที่ช่วยในการเข้าใจปัญหาและสามารถปรับแก้ปัญหาเพื่อให้วิศวกรสามารถออกแบบงานได้ดีขึ้น

### เอกสารอ้างอิง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2548 ไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างง่าย; พร้อมซอฟต์แวร์ พิมพ์ครั้งที่ 1 สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กทม.

Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E. (1989). Concepts and Applications of Element Analysis, Third Ed., Wiley&Sons New York.

Dechaumphai, P., (1994). Finite Element Method in Engineering, Chulalongkorn University Press, Bangkok.

Dechaumphai, P. (1995). "Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems," J of Energy, Heat & mass Transfer, No. 2, Vol 17 . pp 87-94

Dechaumphai, P., (1995). Numerical Methods in Engineering, Chulalongkorn University Press, Bangkok.

Gallagher, R. H., Simon, B. R., Johnson, P. C. and Gross, J. F., (1982). Finite Elements in Biomechanics, John Wiley & Sons, New York.

Jin, J., (1993). The Finite Element Method in Electromagnetic, John Wiley & Sons, New York.

Lewis, R. W., Morgan, K., Thomas, H. R., and Seetharamu, K. N., (1996). The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis, John Wiley & Sons, New York.

Peraire, J., Vahidati, M., Morgan, K and Zienkiewicz, O. C. (1987). "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computation," J of Comp Phys Vol 72. pp. 449-446

White, F. M., (1991). Viscous Fluid Flow, Second Ed., McGraw-Hill, New York

Yamada, Y., Ito, K., Yokocchi, Y., Yamamo, T. and Ohtsuda. T., (1975). "*Finite Element Analysis of Steady Fluid and Metal Flow*," Finite Element in Fluids, Edited by Gallagher, R. H., et., John Wiley and sons, New York.

Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.(2005). the Finite Element Method, Fourth Ed., McGraw-Hill Inter-national.