

การทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับ
แบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ด้วยการวิเคราะห์แบบถดถอย
Prediction of deflection of composite plate with two opposite edges
clamped and other two edges free using regression analysis

กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข*, ปิยะพันธ์ ธรรมปัญญา

พงษ์นุกร ไทยะ

Kullasup Phongsrisuk*, Piyapan Thammapanya

Pongnukorn Thaiya

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา 50300 ประเทศไทย
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Rajamangala University of
Technology Lanna 50300, Thailand

*Corresponding Author. E-mail: phongsrisuk@gmail.com

(Received: April 28, 2025, Revised: May 19, 2025, Accepted: June 4, 2025)

บทคัดย่อ: งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์ระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ โดยใช้การวิเคราะห์แบบถดถอยไม่เชิงเส้นเพื่อทำนายระยะการแอ่น โดยพิจารณาพารามิเตอร์สำคัญ ได้แก่ อัตราส่วนทางเรขาคณิต และรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใย แบบจำลองการวิเคราะห์แบบถดถอยถูกพัฒนาจากข้อมูลที่ได้จากการจำลองด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ในช่วงอัตราส่วนทางเรขาคณิต 1:1 ถึง 5:1 และรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$, $[0/90]_s$, $[90/0]_s$ และ $[90]_4$ จากผลการวิจัยพบว่า แบบจำลองการวิเคราะห์แบบถดถอยไม่เชิงเส้นสามารถทำนายระยะการแอ่นได้อย่างแม่นยำโดยมีค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจมากกว่า 0.95 และสามารถอธิบายความสัมพันธ์เชิงซ้อนของพารามิเตอร์ได้อย่างเหมาะสม ทั้งนี้ สมการที่มีจำนวนพารามิเตอร์น้อย เช่น สมการกำลังหรือสมการเลขชี้กำลัง มีความเหมาะสมมากกว่าสำหรับการใช้งานจริง เนื่องจากลดความเสี่ยงจากการโอเวอร์ฟิต และสะดวกต่อการตีความทางวิศวกรรม งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่าการวิเคราะห์แบบถดถอยไม่เชิงเส้นเป็นเครื่องมือที่มีศักยภาพในการออกแบบโครงสร้างคอมโพสิตที่ต้องการควบคุมการเสียรูปอย่างมีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ: การวิเคราะห์แบบถดถอย แผ่นวัสดุคอมโพสิต ระยะการแอ่น ไฟไนต์เอลิเมนต์

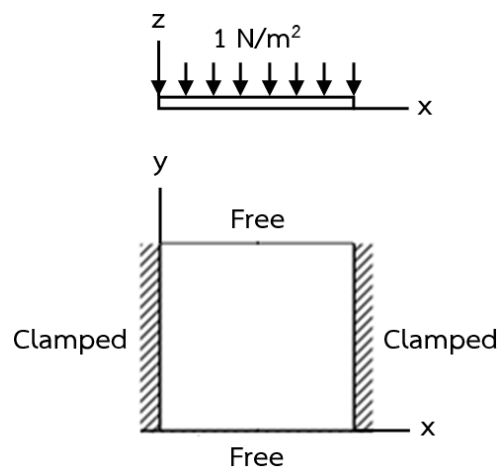
Abstract: This research aimed to analyze the deflection of composite plates with two opposite edges clamped and the other two edges free under uniformly distributed load. Nonlinear regression analysis was employed to predict the deflection by considering essential parameters, namely the geometric ratio and fiber orientation patterns. The regression analysis model was developed based

on data obtained from finite element software simulations within a geometric ratio range of 1:1 to 5:1 and fiber orientation patterns of $[0]_4$, $[0/90]_s$, $[90/0]_s$, and $[90]_4$. The results indicated that the nonlinear regression analysis model could accurately predict the deflection, achieving a coefficient of determination greater than 0.95, and was able to capture the complex relationships among the parameters effectively. Moreover, equations with fewer parameters, such as the power and exponential equations, were more suitable for practical applications, as they reduced the risk of overfitting and were convenient for engineering interpretation. This research demonstrated the nonlinear regression analysis model as a powerful tool for designing composite structures that require precise deformation control.

Keywords: Regression analysis, Composite plate, Deflection, Finite Element

1. บทนำ

แผ่นวัสดุคอมโพสิตถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในงานวิศวกรรมโครงสร้าง อากาศยาน และยานยนต์ เนื่องจากมีอัตราส่วนความแข็งแรงต่อน้ำหนักที่สูง[1] การวิเคราะห์พฤติกรรมของแผ่นวัสดุคอมโพสิตภายใต้สภาวะต่าง ๆ เป็นสิ่งสำคัญในการออกแบบและวิเคราะห์โครงสร้าง[2] ระยะเวลาอันเป็นตัวแปรสำคัญที่ใช้ในการออกแบบแผ่นวัสดุคอมโพสิตให้มีความแข็งแรงและทนทานต่อการเสียรูป การวิเคราะห์ระยะการแอ่นช่วยให้สามารถปรับปรุงประสิทธิภาพการใช้งานของแผ่นวัสดุคอมโพสิตได้ โดยการเลือกวัสดุและการออกแบบที่เหมาะสมเพื่อให้แผ่นวัสดุคอมโพสิตสามารถรับภาระได้อย่างมีประสิทธิภาพ การควบคุมการเสียรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตเป็นสิ่งสำคัญในการรักษาความปลอดภัยของโครงสร้างและอุปกรณ์ที่ใช้แผ่นวัสดุคอมโพสิต นอกจากนี้การออกแบบแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีประสิทธิภาพยังช่วยลดต้นทุนการผลิตและการบำรุงรักษา เนื่องจากสามารถลดการเสียรูปและการเสียหายที่อาจเกิดขึ้นได้



ภาพที่ 1 แผ่นคอมโพสิตที่มีการรองรับแบบ CFCF

อย่างไรก็ตาม การคำนวณระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ (CFCF) ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ (ภาพที่ 1) มีความซับซ้อนสูง จึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) แต่ระยะการแอ่นที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะไม่อยู่ในรูปของสมการ ทำให้ในทางปฏิบัติที่มีการนำแผ่นวัสดุคอมโพสิตมาใช้ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิต (Aspect ratio) ต่าง ๆ ต้องหาระยะการแอ่นจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ [3] การวิเคราะห์แบบถดถอย (Regression analysis) เป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ระหว่างตัวแปรตาม (Dependent variable) และตัวแปรอิสระ (Independent variable) เพื่อทำนายผลลัพธ์ของตัวแปรตามจากค่าของตัวแปรอิสระในสถานการณ์ต่าง ๆ ทำให้ทราบอิทธิพลของตัว

แปรอิสระต่าง ๆ ที่มีต่อตัวแปรตาม และเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรได้อย่างชัดเจน[4] การวิเคราะห์แบบถดถอยจึงเป็นวิธีการที่น่าสนใจและมีประโยชน์อย่างมากในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและการทำนายผลลัพธ์ในสถานการณ์ต่าง ๆ

ที่ผ่านมา มีงานวิจัยที่ประยุกต์ใช้การวิเคราะห์แบบถดถอยในการทำนายระยะการแอ่นซึ่งเป็นตัวแปรตาม จากค่าของอัตราส่วนทางเรขาคณิตซึ่งเป็นตัวแปรอิสระของแผ่นวัสดุไอโซทรอปิก (Isotropic plate) ที่มีขอบสามด้านรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกหนึ่งด้านรองรับแบบยึดแน่น (CFFF) ขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกสองด้านรองรับแบบยึดแน่นและแบบอย่างง่าย (CFSF) ขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกสองด้านรองรับแบบอย่างง่าย (SFSF)[5] รวมถึงแผ่นคอนกรีตที่มีขอบสี่ด้านรองรับแบบอย่างง่าย (SSSS)[6] และแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น (CCCC)[3] และขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและขอบอีกหนึ่งด้านรองรับแบบปล่อยอิสระ (CCCF)[7] อย่างไรก็ตาม ปัจจุบันยังไม่มียานวิจัยที่ประยุกต์ใช้การวิเคราะห์แบบถดถอยในการทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ

2. วัตถุประสงค์

2.1 เพื่อวิเคราะห์ระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

2.2 เพื่อพัฒนาแบบจำลองการวิเคราะห์แบบถดถอยที่สามารถทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตจากอัตราส่วนทางเรขาคณิต

2.3 เพื่อลดเวลาและขั้นตอนในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นวัสดุคอมโพสิต เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนทางเรขาคณิต โดยไม่จำเป็นต้องทำการจำลองด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ทุกครั้ง

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

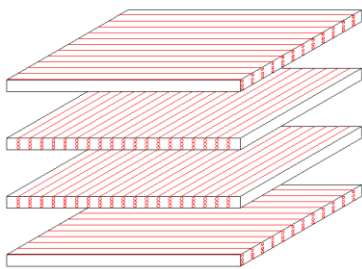
3.1 ทฤษฎีลามิเนชันแบบคลาสสิก (Classical lamination theory: CLT)

แผ่นวัสดุคอมโพสิตเป็นโครงสร้างที่ได้จากการประสานชั้นลามิเนตา (Lamina) หลายชั้น ซึ่งมีการจัดเรียงเส้นใยในทิศทางที่แตกต่างกัน เพื่อให้ได้สมบัติเชิงกลที่เหมาะสมกับการใช้งาน สำหรับการวิเคราะห์พฤติกรรมเชิงกลของแผ่นวัสดุคอมโพสิตในเบื้องต้น มักประยุกต์ใช้ทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิก (Classical plate theory: CPT) ซึ่งตั้งอยู่บนข้อสมมติฐานว่าความหนาของแผ่นมีขนาดน้อยเมื่อเทียบกับความยาวด้านสั้นของแผ่น และละเลยผลกระทบของการเสียรูปเนื่องจากความเค้นเฉือน (No shear distortion) ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-strain relation) ในวัสดุคอมโพสิตมีความซับซ้อนกว่าวัสดุไอโซทรอปิก (Isotropic material) เนื่องจากสมบัติวัสดุมีลักษณะเป็นแอนไอโซทรอปิก (Anisotropic) ทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิกที่ประยุกต์กับวัสดุคอมโพสิตจึงนำไปสู่การพัฒนาทฤษฎีลามิเนชันแบบคลาสสิก ซึ่งสามารถใช้ในการเขียนสมการควบคุม (Governing differential equation) สำหรับแผ่นวัสดุคอมโพสิตแบบสมมาตรที่มีการจัดเรียงเส้นใยในแนว 0° หรือ 90° (ภาพที่ 2) และรับภาระแบบกระจายกระทำตั้งฉากกับแผ่น ได้เป็น[1]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (1)$$

โดย w คือ ระยะการแอ่นของแผ่นที่ตำแหน่ง (x, y) , q คือ ภาระต่อพื้นที่หน้าตัดกระทำตั้งฉากกับแผ่น และ D_{ij} คือ องค์ประกอบของเมทริกซ์ความแข็งเกร็งดัด (Bending stiffness) ของแผ่นวัสดุคอมโพสิต ลักษณะการรองรับที่ขอบของแผ่นวัสดุคอมโพสิตมีผลกระทบอย่างมีนัยสำคัญต่อรูปแบบและขนาดของการแอ่นที่เกิดขึ้น ในงานวิจัยนี้พิจารณาแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ซึ่งลักษณะการรองรับดังกล่าวเป็นการรองรับที่มีความซับซ้อนมากกว่าการรองรับแบบทั่วไป ทำให้ไม่สามารถแก้สมการควบคุม (สมการ 1) เพื่อหา

ค่าระยะการแอ่น (w) ได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical method) ดังนั้นจึงมีความจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าคำตอบ โดยในงานวิจัยนี้เลือกใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณค่าระยะการแอ่น ผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์สามารถนำมาสร้างชุดข้อมูลที่ใช้ในการพัฒนารูปแบบการวิเคราะห์แบบถดถอยเชิงข้อมูล (Data-driven regression model) เพื่อทำนายพฤติกรรมการณ์การแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตในลักษณะการรองรับดังกล่าว



ภาพที่ 2 ตัวอย่างการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [0/90]_s

3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ถือเป็นเทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลายในวงการวิศวกรรม เนื่องจากสามารถให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำสำหรับปัญหาซับซ้อนที่ยากจะแก้ด้วยระเบียบวิธีวิเคราะห์ ระเบียบวิธีนี้มีประสิทธิภาพเป็นพิเศษในการจำลองพฤติกรรมของโครงสร้างที่มีรูปทรงไม่เป็นมาตรฐานหรือมีความซับซ้อนทางเรขาคณิต กระบวนการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญต่อไปนี้[8]

1) การแบ่งส่วนโครงสร้าง

เริ่มจากการแบ่งวัตถุหรือโครงสร้างออกเป็นส่วนย่อย ๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ ซึ่งอาจมีรูปทรงเรขาคณิตพื้นฐาน เช่น สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม (สำหรับปัญหา 2 มิติ) หรือทรงสี่หน้า ทรงหกหน้า (สำหรับปัญหา 3 มิติ) การแบ่งส่วนนี้ทำให้สามารถประมาณค่าตัวแปรต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2) การสร้างสมการเอลิเมนต์

แต่ละเอลิเมนต์จะถูกกำหนดสมการเฉพาะที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทางฟิสิกส์ต่าง ๆ เช่น ความเค้น ความเครียด และการกระจัด โดยอาศัย

หลักการทางกลศาสตร์และสมการเชิงอนุพันธ์

3) การรวมระบบสมการ

สมการของเอลิเมนต์แต่ละชิ้นจะถูกรวมเข้าด้วยกันเพื่อสร้างระบบสมการขนาดใหญ่ที่แสดงพฤติกรรมของโครงสร้างทั้งหมด

4) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ระบบสมการที่ได้จะถูกแก้ด้วยอัลกอริธึมเชิงตัวเลขที่เหมาะสม ซึ่งให้ผลลัพธ์เป็นค่าการกระจัดหรือปริมาณอื่น ๆ ที่จุดต่อ (Nodes) ต่าง ๆ

5) การประมวลผลหลังการคำนวณ

ข้อมูลผลลัพธ์จะถูกนำมาวิเคราะห์และแสดงผลในรูปแบบที่เข้าใจง่าย เช่น แผนภาพการกระจายความเค้น ภาพเคลื่อนไหวแสดงการเปลี่ยนรูป หรือกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ

3.3 ระเบียบวิธีการวิเคราะห์แบบถดถอย

การวิเคราะห์แบบถดถอย เป็นวิธีการทางสถิติที่สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ เพื่อทำนายผลลัพธ์ของตัวแปรตามจากค่าของตัวแปรอิสระ โดยการวิเคราะห์แบบถดถอยสามารถแบ่งออกได้หลายประเภท เช่น การวิเคราะห์แบบถดถอยเชิงเส้น (Linear regression) และการวิเคราะห์แบบถดถอยไม่เชิงเส้น (Non-linear regression) ในการวิเคราะห์ระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอมีความซับซ้อน เนื่องจากระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น อัตราส่วนทางเรขาคณิต รูปแบบการเรียงตัวของเส้นใย (Ply orientation) และคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุย่อยในแต่ละชั้น ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านี้กับระยะการแอ่นมักมีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้น [9] ดังนั้น การสร้างแบบจำลองถดถอยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear regression model) จึงมีความเหมาะสมในการทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ โดยทั่วไปแบบจำลองสามารถเขียนได้ในรูปแบบ [10 - 12]

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \beta) + \varepsilon \quad (2)$$

โดย y คือ ระยะการแอ่น (m) $x_1, x_2, \dots, x_n$ คือ อัตราส่วนทางเรขาคณิต, $f(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่แทนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตาม, β คือ เวกเตอร์พารามิเตอร์ และ ε คือ ค่าคลาดเคลื่อนสุ่ม ในการประมาณพารามิเตอร์มักใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear least squares method) โดยเลือกฟังก์ชันที่แทนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตาม เช่น สมการพหุนามลำดับที่ 2 หรือ 3 ส่วนการประเมินประสิทธิภาพของแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้นที่ใช้ทำนายค่าระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตเพื่อยืนยันว่าแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้นมีความน่าเชื่อถือและสามารถใช้งานในทางปฏิบัติได้ จะใช้สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of determination : R^2) ในการวัดความสามารถของแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้นในการอธิบายความแปรปรวนของข้อมูล และใช้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง (Root Mean Square Error: $RMSE$) เพื่อวัดขนาดของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยระหว่างค่าที่แบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้นทำนายได้กับค่าที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ ดังสมการ (3) และ (4)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (3)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2} \quad (4)$$

โดย y_i คือ ระยะการแอ่นที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ (m), $\hat{y}_i$ คือ ระยะการแอ่นที่ได้จากแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้น (m), $\bar{y}$ คือ ค่าเฉลี่ยของระยะการแอ่นที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ (m) และ n คือ จำนวนข้อมูล ถ้า R^2 มีค่ามากแสดงว่าตัวแปรอิสระและตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันมากหรือตัวแปรอิสระสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามได้มาก ถ้า R^2 มีค่าน้อยแสดงว่าตัวแปรอิสระและตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันน้อยหรือตัวแปรอิสระสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของตัว

แปรตามได้น้อย โดย R^2 จะไม่มีหน่วย และมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 สำหรับค่า $RMSE$ หากมีค่าต่ำ แสดงว่าระยะการแอ่นที่ได้จากแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้นมีความใกล้เคียงกับระยะการแอ่นที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ ซึ่งหมายความว่าแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้นมีประสิทธิภาพในการทำนายระยะการแอ่นได้ดี

4. วิธีดำเนินการศึกษา

ในการทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ สามารถแบ่งการศึกษาออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

- 1) การสร้างชุดข้อมูล
- 2) การออกแบบแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้น
- 3) การประเมินผลแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้น

4.1 การสร้างชุดข้อมูล

ทำการสร้างชุดข้อมูลระยะการแอ่นในแต่ละอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ 1 N/m^2 โดยการจำลองในไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ ที่มีพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังนี้

- อัตราส่วนทางเรขาคณิต (ความกว้างด้าน x ต่อความกว้างด้าน y) ตั้งแต่ 1:1 ถึง 5:1 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1
- เส้นใยมีการเรียงตัวแบบ $[0]_4$, $[0/90]_s$, $[90/0]_s$ และ $[90]_4$ โดยแต่ละชั้นมีความหนา 0.0025 m
- กำหนดค่าคุณสมบัติเชิงกลของแผ่นวัสดุคอมโพสิตเป็น $E_1 = 150 \text{ GPa}$, $E_2 = E_3 = 7 \text{ GPa}$, $G_{12} = G_{13} = 3.5 \text{ GPa}$, $G_{23} = 1.4 \text{ GPa}$ และ $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$
- คำนวณระยะการแอ่นที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นวัสดุคอมโพสิต

4.2 การออกแบบแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้น

แบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้นที่ใช้ในการวิจัยนี้ประกอบด้วย การถดถอยแบบพหุนามดีกรี n (n^{th}

Degree polynomial regression) การถดถอยแบบสมการกำลัง (Power regression) และการถดถอยแบบสมการเลขชี้กำลัง (Exponential regression)

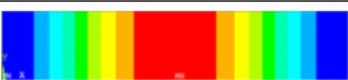
4.3 การประเมินผลแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้น

แบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้นจะถูกประเมินโดยใช้สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ระหว่างค่าระยะการแอ่นที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์กับค่าระยะการแอ่นที่ได้จากแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้น

5. ผลการศึกษา

5.1 จากการจำลองแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้การกระจายสมำเสมอ ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ พบว่าระยะการแอ่นสูงสุดจะเกิดขึ้นบริเวณกลางแผ่นและลดลงไปยังขอบที่ถูกรองรับแบบยึดแน่น (ตารางที่ 1) โดยไม่ขึ้นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และการเรียงตัวของเส้นใย

ตารางที่ 1 ระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิต

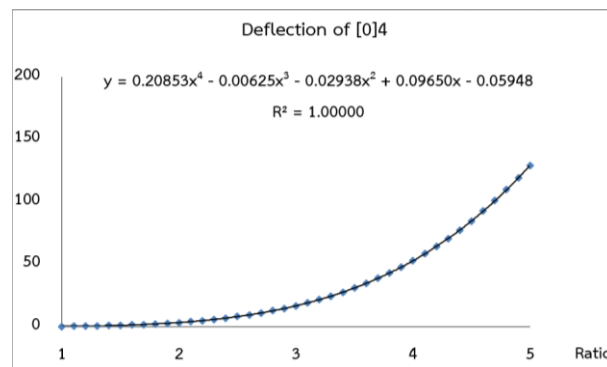
เส้นใย	อัตราส่วน	
	1:1	5:1
[0] ₄	 0.211 μm	 129.240 μm
[0/90] _s	 0.243 μm	 147.220 μm
[90/0] _s	 1.250 μm	 782.540 μm
[90] ₄	 4.434 μm	 2787.300 μm

5.2 จากการทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้การกระจายสมำเสมอ ด้วยการถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 พบว่าค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจเท่ากับ 1.00000 (ภาพที่ 3 -6) และค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองมีค่าน้อยกว่า 0.02 (ตารางที่ 2) แสดงว่าแบบจำลองถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 สามารถทำนายระยะการ

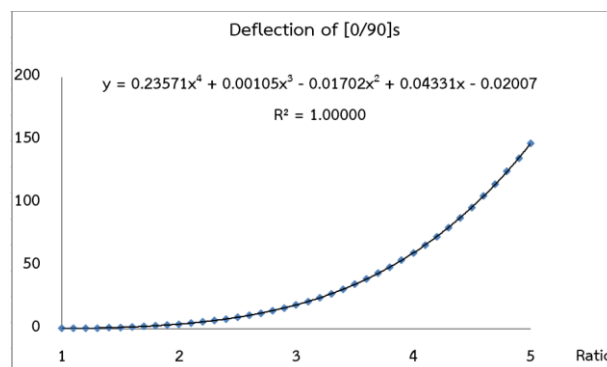
แอ่นได้อย่างแม่นยำเกือบสมบูรณ์ อย่างไรก็ตาม การใช้การถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 ซึ่งมีพารามิเตอร์ 5 ตัว ได้แก่ a_0, a_1, a_2, a_3 และ a_4 ในสมการ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ทำให้สมการสามารถโค้งงอและลากผ่านทุกจุดข้อมูลได้ แม้ว่าจะไม่มีความสัมพันธ์ที่แท้จริงระหว่างข้อมูล ทำให้เกิดปัญหาโอเวอร์ฟิตติ้ง (Overfitting) ได้ง่าย โดยเฉพาะเมื่อใช้ในการทำนายระยะการแอ่นนอกช่วงข้อมูล (Extrapolation) ซึ่งอาจเกิดการแกว่งของค่าที่ไม่เป็นเหตุเป็นผล[12 – 14]

ตารางที่ 2 RMSE ของการถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4

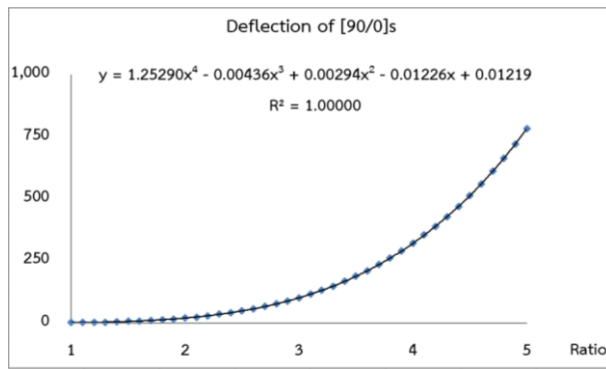
เส้นใย	RMSE
[0] ₄	0.00128
[0/90] _s	0.00100
[90/0] _s	0.00180
[90] ₄	0.01771



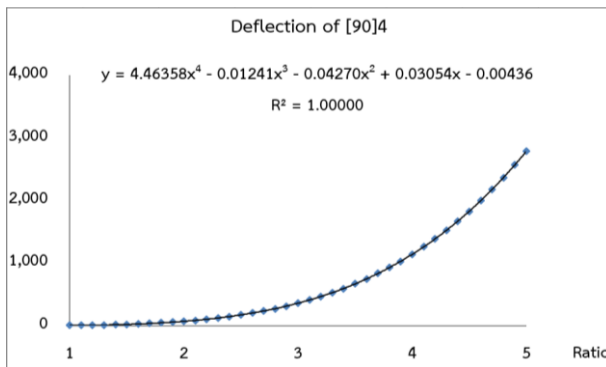
ภาพที่ 3 การถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 ของ [0]₄



ภาพที่ 4 การถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 ของ [0/90]_s



ภาพที่ 5 การถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 ของ $[90/0]_s$



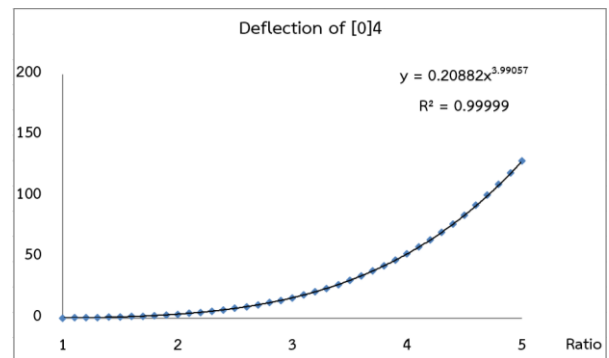
ภาพที่ 6 การถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 ของ $[90]_4$

5.3 จากการทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่น และอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ ด้วยการถดถอยแบบสมการกำลัง พบว่าค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจอยู่ระหว่าง 0.99999 - 1.00000 (ภาพที่ 7 - 10) และค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองมีค่าน้อยกว่า 0.40 (ตารางที่ 3) ซึ่งหมายความว่า การทำนายระยะการแอ่นมีความแม่นยำสูงและมีความคลาดเคลื่อนน้อยมาก และการที่การถดถอยแบบสมการกำลังซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 ตัว ได้แก่ a และ b ในสมการ $y = ax^b$ ทำให้เส้นสมการถูกควบคุมโดยความโค้งงอที่เหมาะสม จึงไม่มีการโอเวอร์ฟิตติ้ง และไม่เกิดการแกว่งของค่าภายนอกช่วงข้อมูลอย่างที่เกิดขึ้นในการถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 โดย a ทำหน้าที่เป็นสัมประสิทธิ์เชิงสเกล ถ้า a มีค่ามาก แสดงว่าแผ่นวัสดุคอมโพสิตมีแนวโน้มที่จะแอ่นตัวได้มากภายใต้ภาระเดียวกัน ส่วน b เป็นเลขชี้กำลังที่แสดงลักษณะของความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนทางเรขาคณิตและระยะการแอ่น หาก $b > 1$ แสดงว่าเมื่อ

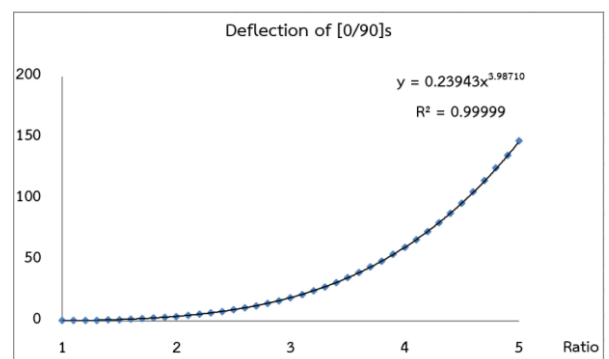
อัตราส่วนทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น ระยะการแอ่นจะเพิ่มขึ้นในอัตราเร่ง อย่างไรก็ตาม หาก $0 < b < 1$ แสดงว่าระยะการแอ่นเพิ่มขึ้นในอัตราที่ช้าลงเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น ซึ่งสะท้อนถึงพฤติกรรมที่เสถียรมากกว่า

ตารางที่ 3 RMSE ของการถดถอยแบบสมการกำลัง

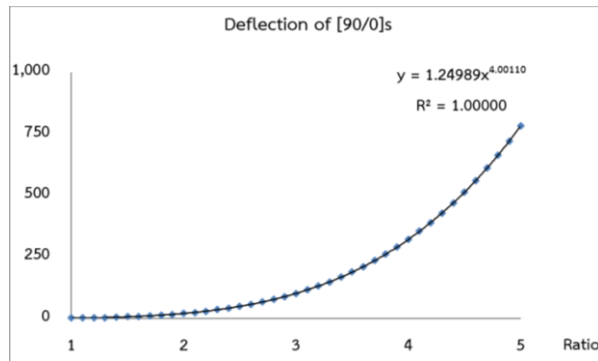
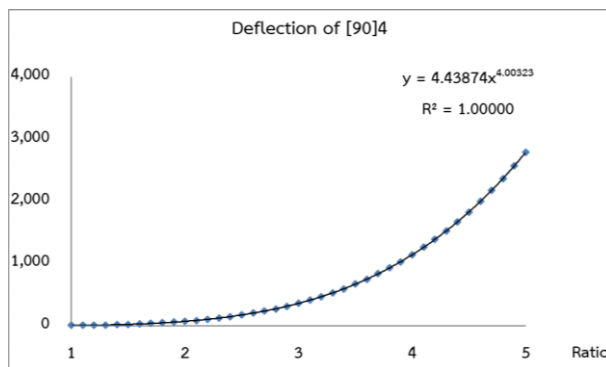
เส้นใย	RMSE
$[0]_4$	0.20067
$[0/90]_s$	0.19195
$[90/0]_s$	0.00840
$[90]_4$	0.39185



ภาพที่ 7 การถดถอยแบบสมการกำลังของ $[0]_4$



ภาพที่ 8 การถดถอยแบบสมการกำลังของ $[0/90]_s$

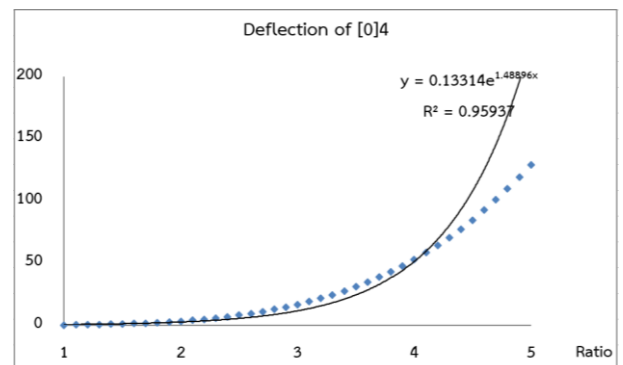
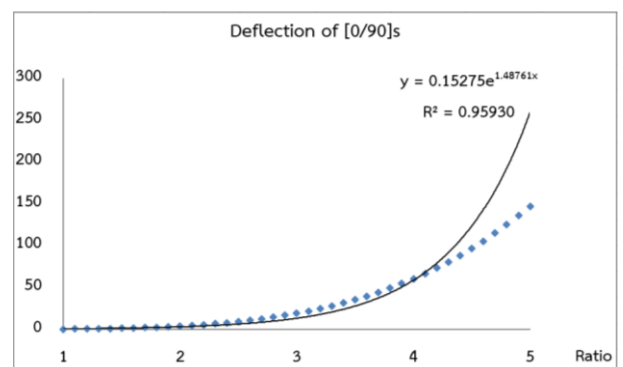
ภาพที่ 9 การถดถอยแบบสมการกำลังของ $[90/0]_s$ ภาพที่ 10 การถดถอยแบบสมการกำลังของ $[90]_4$

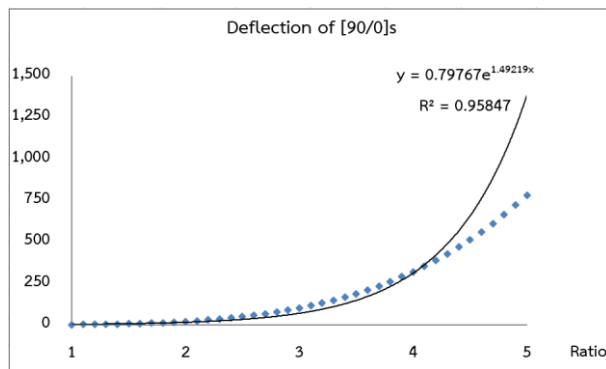
5.4 จากการทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ ด้วยการถดถอยแบบสมการเลขชี้กำลัง พบว่าค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจอยู่ระหว่าง 0.95839 – 0.95937 (ภาพที่ 11 – 14) และค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองมีค่าน้อยกว่า 530 (ตารางที่ 4) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการทำนายระยะการแอ่นมีความแม่นยำในระดับหนึ่ง แม้ว่าความคลาดเคลื่อนจะมากกว่าการถดถอยแบบสมการกำลังอย่างมีนัยสำคัญ และการที่การถดถอยแบบสมการเลขชี้กำลังซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 ตัว ได้แก่ a และ b ในสมการ $y = ae^{bx}$ การควบคุมความโค้งของสมการเลขชี้กำลังจะถูกควบคุมโดยพารามิเตอร์ที่กำหนดให้เส้นมีลักษณะการโค้งแบบธรรมชาติ ซึ่งไม่ทำให้เกิดปัญหาโอเวอร์ฟิตติ้งโดย a แสดงถึงระดับของการแอ่นเริ่มต้นเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตเป็นศูนย์ หรือพฤติกรรมโดยรวมของแผ่นภายใต้ภาระคงที่ ขณะที่ b เป็นค่าที่ควบคุมอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะการแอ่นตามการเปลี่ยนแปลงของอัตราส่วนทางเรขาคณิต หาก $b > 0$ แสดงว่า

แผ่นวัสดุมีแนวโน้มแอ่นเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น ในทางกลับกัน หาก $b < 0$ ระยะการแอ่นจะลดลงเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น ซึ่งอาจสะท้อนลักษณะพิเศษของโครงสร้างหรือพฤติกรรมที่เสถียรขึ้นเมื่อมีการเสริมแรง

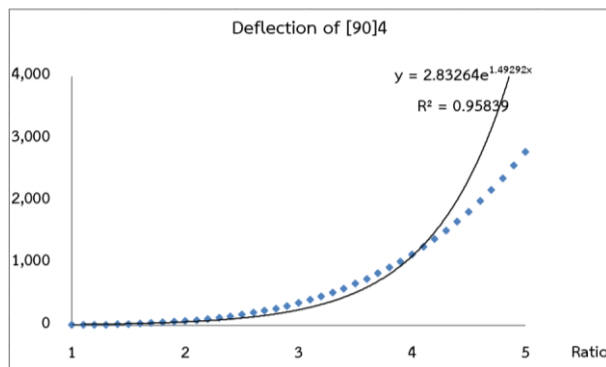
ตารางที่ 4 RMSE ของการถดถอยแบบสมการเลขชี้กำลัง

เส้นใย	RMSE
$[0]_4$	24.00195
$[0/90]_s$	27.37331
$[90/0]_s$	147.25940
$[90]_4$	525.27618

ภาพที่ 11 การถดถอยแบบสมการเลขชี้กำลังของ $[0]_4$ ภาพที่ 12 การถดถอยแบบสมการเลขชี้กำลังของ $[0/90]_s$



ภาพที่ 13 การถดถอยแบบสมการเลขชี้กำลังของ [90/0]_s



ภาพที่ 14 การถดถอยแบบสมการเลขชี้กำลังของ [90]₄

6. สรุปผลและอภิปรายผล

จากผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองการถดถอยไม่เชิงเส้นสามารถทำนายระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ ได้อย่างแม่นยำ โดยมีค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R^2) มากกว่า 0.95 และค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง ($RMSE$) มีค่าน้อยกว่า 530 ดังแสดงในตารางที่ 5 โดยการถดถอยแบบพหุนามดีกรี 4 มีความแม่นยำมากกว่าการถดถอยแบบสมการกำลังและสมการเลขชี้กำลังตามลำดับ อย่างไรก็ตาม ในการเลือกใช้สมการควรคำนึงถึงจำนวนพารามิเตอร์ที่น้อย เพื่อลดปัญหาการโอเวอร์ฟิตติ้งและทำให้สมการนั้นง่ายต่อการนำไปใช้งานและตีความพารามิเตอร์ทางวิศวกรรมได้ง่าย ดังนั้น การใช้สมการกำลังจึงเหมาะสมกว่าการใช้สมการพหุนามดีกรีสูงและสมการเลขชี้กำลัง เนื่องจากสามารถหลีกเลี่ยงปัญหาโอเวอร์ฟิตติ้งได้ และยังคงให้ผลการ

ทำนายระยะการแอ่นที่แม่นยำ การวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่า การวิเคราะห์แบบถดถอยเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต ผลการวิจัยสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบและวิเคราะห์โครงสร้างที่ใช้วัสดุคอมโพสิตได้อย่างมีประสิทธิภาพและปลอดภัย

ตารางที่ 5 สรุปผลการประเมินแบบจำลองถดถอยไม่เชิงเส้น

การประเมินผลแบบจำลอง	พหุนามดีกรี 4	สมการกำลัง	สมการเลขชี้กำลัง
R^2	1.00000	0.99999 - 1.00000	0.95839 - 0.95937
RMSE	< 0.02	< 0.40	< 530
พารามิเตอร์	5	2	2
ปัญหาโอเวอร์ฟิตติ้ง	สูง	ต่ำ	ต่ำ
การทำนายนอกช่วงข้อมูล	ต่ำ	สูง	ปานกลาง

7. ข้อจำกัดงานวิจัย

แบบจำลองการถดถอยไม่เชิงเส้นที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้ อาศัยข้อมูลจากการจำลองด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ เพื่อสร้างชุดข้อมูลของระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตตั้งแต่ 1:1 ถึง 5:1 ดังนั้น แบบจำลองที่ได้สามารถนำมาใช้ในการทำนายระยะการแอ่นได้ภายในช่วงอัตราส่วนดังกล่าว นอกจากนี้ การจำลองและการทำนายระยะการแอ่นในงานวิจัยนี้ ดำเนินการภายใต้สมมติฐานของภาระแบบกระจายสม่ำเสมอและเงื่อนไขขอบที่กำหนดไว้เท่านั้น ซึ่งอาจไม่ครอบคลุมสภาพการณ์จริงที่มีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น การรับภาระแบบเป็นจุด การรับภาระแบบกระจายไม่สม่ำเสมอ หรือการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขขอบ เพื่อเพิ่มขีดความสามารถในการประยุกต์ใช้แบบจำลองกับสภาพการณ์จริงในอนาคต จึงควรมีการขยายขอบเขตของการศึกษาให้ครอบคลุมรูปแบบภาระและเงื่อนไขขอบที่หลากหลายยิ่งขึ้น

8. บรรณานุกรม

- [1] ไพโรจน์ สิงห์นาคกิจ. (2559). กลศาสตร์ของวัสดุคอมโพสิต. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [2] ปุณปวีร์ จงรัตนศรีกุล, & สมชัย นรเศรษฐ์โสภณ. (2559). การวิเคราะห์และการออกแบบโครงสร้างแบบรังผึ้งของวัสดุคอมโพสิตไม้ - ซิเมนต์. วิศวกรรมลาดกระบัง, 33(3), 24–31.
- [3] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข, ณัฐพงษ์ กุลท้วม, & เอกนรินทร์ ระลาธิ. (2559). ความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่น – ความเค้นดัด และอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตรขอบสี่ ด้านรองรับแบบยึดแน่น. วารสารวิชาการวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี, 9(1), 61–69.
- [4] Dukkipati, R. V. (2010). Numerical method. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.
- [5] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข, อาศิร บุญยะประภัศร, กรกฎ รัชชภูมิ, & ธนบดี รัชพลพันธ์. (2557). การศึกษาการเปลี่ยนพฤติกรรมแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคาน. วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 21(2), 21–29.
- [6] Singh, V., & Prashanth, M. H. (2023). Deflection surface analysis of thin plate structures using regression technique. In G. C. Marano, A. V. Rahul, J. Antony, G. Unni Kartha, P. E. Kavitha, & M. Preethi (Eds.), Proceedings of SECON'22. SECON 2022. Lecture notes in civil engineering (Vol. 284). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-12011-4_18
- [7] ธวัชชัย อุ้นใจม, กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข, อนุชา ตาน้อย, & อนุชิต เกตุทะจักร์. (2561). พฤติกรรมการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบครอสพลายที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ. วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี, 11(2), 53–64.
- [8] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข. (2556). เอกสารประกอบการสอนวิชาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา.
- [9] Reddy, J. N. (2004). Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. Boca Raton, FL: CRC Press LLC.
- [10] Seber, G. A. F., & Wild, C. J. (1989). Nonlinear regression. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience.
- [11] Draper, N. R., & Smith, H. (1998). Applied regression analysis (3rd ed.). New York, NY: Wiley.
- [12] Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction (2nd ed.). New York, NY: Springer.
- [13] Burden, R. L., & Faires, J. D. (2015). Numerical analysis (10th ed.). Boston, MA: Brooks/Cole.
- [14] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2007). Numerical mathematics. Berlin, Germany: Springer.
- [15] Atkinson, K. (1989). An introduction to numerical analysis (2nd ed.). New York, NY: Wiley.