

การเสีรรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่น
และอีกสองด้านปล่อยอิสระ

Deformation of composite plate with two opposite edges clamped
and other two edges free

กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข^{1*}, ปิยะพันธ์ ธรรมปัญญา², พงษ์นุกร ไทยะ³

Kullasup Phongsrisk^{1*}, Piyapan Thammapanya², Pongnukorn Thaiya³

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา 50300 ประเทศไทย

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,

Rajamangala University of Technology Lanna 50300, Thailand

*Corresponding Author. E-mail: phongsrisk@gmail.com

(Received: April 28, 2025, Revised: June 10, 2025, Accepted: July 7, 2025)

บทคัดย่อ: งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการเสีรรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ รับภาระแบบกระจายสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น โดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ในการคำนวณระยะการแอ่นและความเค้นดัดของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิต 1:1 ถึง 5:1 รวมถึงมีรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$, $[0/90]_s$, $[90/0]_s$ และ $[90]_4$ จากผลการศึกษาพบว่าการกระจายของระยะการแอ่นและความเค้นดัดมีแนวโน้มที่คล้ายกันในทุกอัตราส่วนทางเรขาคณิต โดยระยะการแอ่นสูงสุดเกิดขึ้นบริเวณกลางแผ่น ส่วนความเค้นดัดสูงสุดเกิดขึ้นบริเวณขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่น นอกจากนี้ยังพบว่าระยะการแอ่นและความเค้นดัดจะเพิ่มขึ้นเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น เนื่องจากโมเมนต์ดัดที่สูงขึ้นในแผ่นที่ยาวขึ้น ทั้งนี้แผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ มีระยะการแอ่นและความเค้นดัดสูงสุดเมื่อเปรียบเทียบกับกรเรียงตัวของเส้นใยแบบอื่น เนื่องจากค่าความแข็งแรงดึงดัดในแนวแกนและโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดที่ต่ำกว่า ผลการศึกษานี้สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการออกแบบโครงสร้างคอมโพสิตที่ต้องการควบคุมการแอ่นตัวและความเค้นดัดให้เหมาะสมกับการใช้งานทางวิศวกรรม

คำสำคัญ: การเสีรรูป แผ่นวัสดุคอมโพสิต ระยะการแอ่น ความเค้นดัด ไฟไนต์เอลิเมนต์

Abstract: This research aimed to study the deformation of a composite plate with two opposite edges clamped and the other two edges free, subjected to a uniformly distributed load acting perpendicular to the plate. Finite element software was utilized to calculate the deflection and bending stress of the composite plate with geometric ratios from 1:1 to 5:1 and with $[0]_4$, $[0/90]_s$, $[90/0]_s$, and $[90]_4$ fiber arrangements. The study results indicated that the distributions of deflection and bending stress were similar across all geometric ratios, with the maximum deflection occurring

at the center of the plate and the maximum bending stress occurring near the clamped edges. Additionally, the deflection and bending stress increased as the geometric ratios increased, due to the higher bending moment in the longer plates. The composite plates with $[90]_4$ fiber arrangement exhibited the highest deflection and bending stress compared to the other fiber arrangements, due to their lower axial bending stiffness and cross-sectional moment of inertia. The results of this study could serve as a guideline for designing composite structures that require controlled deflection and bending stress for appropriate engineering applications.

Keywords: Deformation, Composite plate, Deflection, Bending stress, Finite element

1. บทนำ

ในปัจจุบัน แผ่นวัสดุคอมโพสิต (Composite plates) ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในงานวิศวกรรม เนื่องจากมีคุณสมบัติที่โดดเด่น เช่น ความแข็งแรงสูง น้ำหนักเบา ทนต่อการกัดกร่อน และสามารถปรับแต่งคุณสมบัติเชิงกลได้ตามความต้องการ จึงถูกนำไปประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรมหลายประเภท เช่น อากาศยาน ยานยนต์ เครื่องจักรกล และอุปกรณ์กีฬา โดยเฉพาะในส่วนที่ต้องการโครงสร้างที่มีความแข็งแรงสูงและน้ำหนักเบา [1] เมื่อแผ่นวัสดุคอมโพสิตรับภาระกระทำตั้งฉากกับแผ่น แผ่นวัสดุคอมโพสิตจะเกิดการเสียรูป (Deformation) ซึ่งประกอบด้วยการแอ่น (Deflection) และความเค้นดัด (Bending stress) ที่มีลักษณะซับซ้อน เนื่องจากโครงสร้างของแผ่นวัสดุคอมโพสิตจะมีการเรียงตัวของเส้นใยที่แตกต่างกัน รวมไปถึงความแตกต่างของคุณสมบัติเชิงกล การศึกษาการเสียรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง เพื่อให้สามารถออกแบบโครงสร้างที่รองรับภาระได้อย่างปลอดภัยและมีประสิทธิภาพสูงสุด

จึงได้มีการสร้างเอลิเมนต์แบบเปลือก (Shell element) ที่อิงตามทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (First order shear deformation theory: FSDT) และทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับสูง (Higher order shear deformation theory: HSDT) เพื่อทำการศึกษาค้นคว้าการเสียรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสี่ด้านรองรับแบบอย่างง่าย (SSSS) รับภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ [2] และภาระแบบไซน์ [3] กระทำตั้งฉากกับแผ่น โดยทำการแปรผันอัตราส่วนความหนาต่อความกว้าง และได้มีการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ในการวิเคราะห์

การกระจายของระยะการแอ่นและความเค้นดัดในแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น (CCCC) [4] และที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่น และอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ (CCCF) [5] รับภาระแบบกระจายสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น โดยทำการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิต

แผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ (CFCF) เป็นรูปแบบที่พบได้บ่อยในงานวิศวกรรม เช่น แผ่นปิด ฝาครอบ แผ่นรองรับในโครงสร้าง ชิ้นส่วนของปีกหรือแพนหาง และแผงตัวถังรถยนต์ แม้ว่าจะมีงานวิจัยจำนวนมากที่ศึกษาพฤติกรรมการเสียรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตภายใต้เงื่อนไขขอบหลากหลายแบบ เช่น SSSS, CCCC หรือ CCCF แต่ยังไม่พบว่ามีช่องว่างในการศึกษาเกี่ยวกับแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบแบบ CFCF โดยเฉพาะเมื่อพิจารณาเกี่ยวกับการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิต และการเรียงตัวของเส้นใยแบบสมมาตร (ตารางที่ 1) ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงมุ่งศึกษาพฤติกรรมการเสียรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบแบบ CFCF โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method: FEM) เพื่อศึกษาผลกระทบของรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใย และอัตราส่วนทางเรขาคณิต ซึ่งผลการศึกษานี้จะช่วยเติมเต็มช่องว่างในองค์ความรู้ และสามารถใช้เป็นแนวทางเบื้องต้นในการออกแบบโครงสร้างแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีลักษณะขอบดังกล่าวในงานวิศวกรรมจริง

ตารางที่ 1 ทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

ผู้เขียน	วิธีการ	ภาระ	ขอบ	เส้นใย	อัตราส่วน
งานวิจัย [2]	FEM (FSDT)	กระจายสม่ำเสมอ	SSSS	0, 90	h/a
งานวิจัย [3]	FEM (HSDT)	โซ่	SSSS	0, 90	h/a
งานวิจัย [4]	FEM (FSDT)	กระจายสม่ำเสมอ	CCCC	0, 90	a/b
งานวิจัย [5]	FEM (FSDT)	กระจายสม่ำเสมอ	CCCF	0, 90	a/b
การศึกษานี้	FEM (FSDT)	กระจายสม่ำเสมอ	CFCF	0, 90	a/b

2. วัตถุประสงค์

2.1 วิเคราะห์พฤติกรรมการเสียรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ ภายใต้ภาระแบบกระจายสม่ำเสมอที่กระทำตั้งฉากกับแผ่น

2.2 ศึกษาผลของอัตราส่วนทางเรขาคณิต (Aspect ratio) ที่มีค่าตั้งแต่ 1:1 ถึง 5:1 ต่อระยะการแอ่นและความเค้นดัดของแผ่นวัสดุคอมโพสิต

2.3 เปรียบเทียบพฤติกรรมของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใยแบบสมมาตร ได้แก่ $[0]_4$, $[90]_4$, $[0/90]_s$ และ $[90/0]_s$

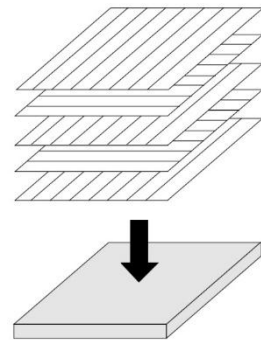
3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

3.1 แผ่นวัสดุคอมโพสิต

วัสดุคอมโพสิต (Composite material) ประกอบด้วยวัสดุที่มีสมบัติแตกต่างกันอย่างน้อยสองชนิด ซึ่งรวมตัวกันโดยไม่เกิดการเป็นเนื้อเดียวกัน [6] ทำให้วัสดุที่ได้มีสมบัติที่ดีเป็นพิเศษหรือมีลักษณะที่สำคัญบางอย่างแตกต่างไปจากเดิม [7] โดยทั่วไป วัสดุคอมโพสิตจะประกอบไปด้วยตัวประสาน (Matrix) และตัวเสริมแรง (Reinforcement) ซึ่งตัวประสานทำหน้าที่กระจายแรงไปยังตัวเสริมแรงและรักษารูปทรงของวัสดุคอมโพสิต ขณะที่ตัวเสริมแรงช่วยเสริมสมบัติให้ตัวประสานเพื่อให้วัสดุคอมโพสิตมีสมบัติตามที่ต้องการ [1] สมบัติ

ของวัสดุคอมโพสิตสามารถออกแบบได้โดยการเลือกวัสดุองค์ประกอบ สัดส่วนของวัสดุองค์ประกอบ ความเข้ากันได้ระหว่างวัสดุองค์ประกอบ การเรียงตัวของตัวเสริมแรง และการกระจายตัวของตัวเสริมแรงในตัวประสาน[8] ทำให้วัสดุคอมโพสิตสามารถปรับแต่งสมบัติได้ตามความต้องการในการใช้งาน

วัสดุคอมโพสิตที่ใช้เส้นใยเป็นตัวเสริมแรงและถูกสร้างเป็นแผ่นบางเรียกว่า ลามิना (Lamina) และเมื่อลามิनाหลายชั้นถูกซ้อนทับกันจะเรียกว่า ลามิเนต (Laminate) ซึ่งสามารถนำมาประกอบเป็นแผ่น วัสดุคอมโพสิต (ภาพที่ 1) ซึ่งเป็นชั้นส่วนพื้นฐานที่สำคัญในงานวิศวกรรม [9] เมื่อแผ่นวัสดุคอมโพสิตเกิดการแอ่นตัว ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) สำหรับระนาบชั้นที่ k สามารถแสดงได้ด้วยสมการ [6]



ภาพที่ 1 แผ่นวัสดุคอมโพสิต

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (1)$$

โดย σ_x คือ ความเค้นตั้งฉากในทิศทาง x (N/m^2)

σ_y คือ ความเค้นตั้งฉากในทิศทาง y (N/m^2)

σ_{xy} คือ ความเค้นเฉือนในระนาบ $x-y$ (N/m^2)

ε_x คือ ความเครียดตั้งฉากในทิศทาง x

ε_y คือ ความเครียดตั้งฉากในทิศทาง y

γ_{xy} คือ ความเครียดเฉือนในระนาบ $x-y$

$[\bar{Q}]$ คือ เมทริกซ์สติฟเนสแบบลดรูปและแปรงรูป (Transformed and reduced stiffness) ซึ่งจะสัมพันธ์กับคุณสมบัติของวัสดุ และลักษณะการวางตัวของเส้นใยเทียบกับแกนอ้างอิง (θ) ดังสมการ (2)

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(m^4 + n^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})n^3m \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})n^3m + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \quad (2)\end{aligned}$$

โดย m คือ $\cos\theta$ และ n คือ $\sin\theta$ ในกรณีที่ลามินาเป็นวัสดุออร์โททรอปิก (Orthotropic material) จะมีค่า $Q_{11} = E_1^2/(E_1 - \nu_{12}^2E_2)$, $Q_{22} = E_1E_2/(E_1 - \nu_{12}^2E_2)$, $Q_{12} = \nu_{12}E_1E_2/(E_1 - \nu_{12}^2E_2)$ และ $Q_{66} = G_{12}$ โดย E_1 เป็นมอดุลัสยืดหยุ่นตามแนวเส้นใย E_2 เป็นมอดุลัสยืดหยุ่นตามแนวขวางเส้นใย G_{12} เป็นมอดุลัสเฉือนในระนาบตามแนวเส้นใยและตามแนวขวางเส้นใย และ ν_{12} เป็นอัตราส่วนปัวซองในระนาบตามแนวเส้นใยและตามแนวขวางเส้นใย ซึ่งผลรวมของความเค้นที่เกิดขึ้นตลอดแนวความหนาของแผ่นวัสดุคอมโพสิต สามารถคำนวณเป็นแรงลัพธ์ (Force resultants) N_{xx} , N_{yy} และ N_{xy} และโมเมนต์ลัพธ์ (Moment resultants) M_{xx} , M_{yy} และ M_{xy} ได้ดังสมการ (3)

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

โดยแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดขึ้นในแผ่นวัสดุคอมโพสิตจะสัมพันธ์กับความเครียด ϵ_{xx} , ϵ_{yy} และ γ_{xy} และความโค้ง (Curvature) κ_{xx} , κ_{yy} และ κ_{xy} ของระนาบกึ่งกลางของแผ่นวัสดุคอมโพสิต เมทริกซ์ขนาด 6x6 ในสมการ (3) เรียกว่า เมทริกซ์ ABD ซึ่งประกอบไปด้วยเมทริกซ์ย่อย 3 เมทริกซ์ ได้แก่ เมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ความแข็งแรงยืด (Extensional

stiffness), เมทริกซ์ B คือ เมทริกซ์ความแข็งแรงเชื่อมต่อน (Coupling stiffness) และเมทริกซ์ D คือ เมทริกซ์ความแข็งแรงดัด (Bending stiffness) โดยเมทริกซ์ ABD จะเป็นผลรวมของผลคูณของค่าสติฟเนสแบบลดรูปและแปรงรูปกับความหนาของชั้นลามินา ($z_k - z_{k-1}$) ชั้นที่ k ดังสมการ (4) - (6)

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (4)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (5)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (6)$$

3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์พฤติกรรมการแอ่นและความเค้นดัดของแผ่นวัสดุคอมโพสิตสามารถทำได้โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ที่มีความแม่นยำสูงในการคำนวณปัญหาทางวิศวกรรมโครงสร้าง โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์แผ่นวัสดุคอมโพสิตมีขั้นตอนหลักดังนี้

1) การสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการวิเคราะห์พฤติกรรมการแอ่นและความเค้นดัดของแผ่นวัสดุคอมโพสิต จะใช้เอลิเมนต์แบบเปลือกในการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นวัสดุคอมโพสิตเนื่องจากแผ่นวัสดุคอมโพสิตมีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับความยาวและความกว้าง และเอลิเมนต์แบบเปลือกสามารถรองรับการแอ่นตัว (Bending) และการบิดตัว (Twisting) ได้ โดยแต่ละจุดต่อ (Node) ของเอลิเมนต์แบบเปลือกจะมี 6 องศาอิสระ (Degrees of freedom: DOF) ได้แก่ การเคลื่อนที่ในแนวแกน x , y และ z และการหมุนรอบแกน x , y และ z

2) การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถสร้างได้จากวิธีการโดยตรง (Direct approach) วิธีการแปรผัน (Variational approach) และวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) ในการวิเคราะห์พฤติกรรมการแอ่นและความเค้นดัดของแผ่นวัสดุคอมโพสิต จะสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ซึ่งเป็นการสร้างสมการ

ไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) โดยตรง โดยไม่จำเป็นต้องหาฟังก์ชันที่มีความสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตักสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาโดยทั่ว ๆ ไป และถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในปัจจุบัน [10] ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ของแผ่นวัสดุคอมโพสิตสามารถเขียนได้ดังนี้ [11]

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0 \quad (9)$$

สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้จะถูกแปลงเป็นสมการเชิงเส้น (Linear equations) โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape functions) ดังสมการ (10) - (12) ในการประมาณค่าการกระจัด (Displacement) ในแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์แผ่นวัสดุคอมโพสิต

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (10)$$

$$v = \sum_{i=1}^n N_i v_i \quad (11)$$

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (12)$$

โดย u_i, v_i, w_i คือ การกระจัดในแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ ส่วน N_i คือ ฟังก์ชันรูปร่าง

3) การประกอบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของทุกเอลิเมนต์ จะทำให้ได้สมการรวม (Global equation)

4) การแทนเงื่อนไขขอบ (Boundary conditions) ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบในสมการรวม เช่น การยึดแน่นที่สองด้านและปล่อยอิสระที่อีกสองด้าน (Clamped-Free: C-F)

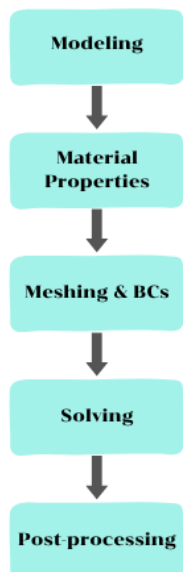
5) การแก้สมการรวมเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อจะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เช่น ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian elimination method) หรือระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition

method) เพื่อหาการกระจัดที่จุดต่อของเอลิเมนต์แผ่นวัสดุคอมโพสิต

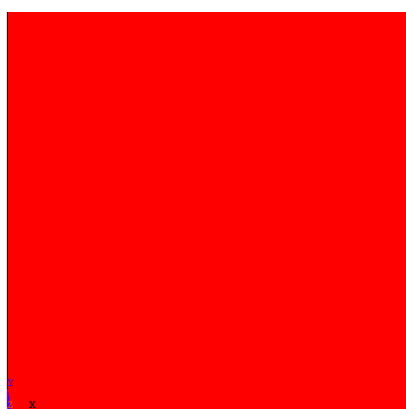
4. วิธีดำเนินการศึกษา

ในการศึกษาการเสียรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ จะทำการศึกษาระยะการแอ่น การกระจายของระยะการแอ่น (Deflection distribution) ความเค้นดัดและการกระจายของความเค้นดัด (Bending stress distribution) ของแผ่นวัสดุคอมโพสิตเมื่อแผ่นวัสดุคอมโพสิตรับภาระแบบกระจายสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่นโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในภาพที่ 2 ได้แสดงลำดับขั้นตอนการจำลองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยแบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอนหลัก ตั้งแต่การสร้างแบบจำลอง (Modeling) การกำหนดคุณสมบัติวัสดุ (Material properties) การกำหนดขนาดเอลิเมนต์ (Meshing) และเงื่อนไขขอบ (Boundary conditions: BCs) ไปจนถึงการคำนวณ (Solving) และวิเคราะห์ผลลัพธ์ (Post-processing)

ในขั้นตอนการสร้างแบบจำลอง จะทำการสร้างแบบจำลองแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิต (ความกว้างด้าน x ต่อความกว้างด้าน y) ตั้งแต่ 1:1 ถึง 5:1 ในไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์โปรแกรม ANSYS [12] ดังแสดงในภาพที่ 3 โดยแผ่นวัสดุคอมโพสิตจะมีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4, [90]_4, [0/90]_5$ และ $[90/0]_5$ ซึ่งแต่ละชั้นจะมีความหนา 0.0025m และค่าคุณสมบัติเชิงกลของแบบจำลองแผ่นวัสดุคอมโพสิตจะถูกกำหนดให้ $E_1 = 150$ GPa, $E_2 = E_3 = 7$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 3.5$ GPa, $G_{23} = 1.4$ GPa และ $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$



ภาพที่ 2 ขั้นตอนการจำลองด้วยระเบียบวิธี
ไฟไนต์เอลิเมนต์



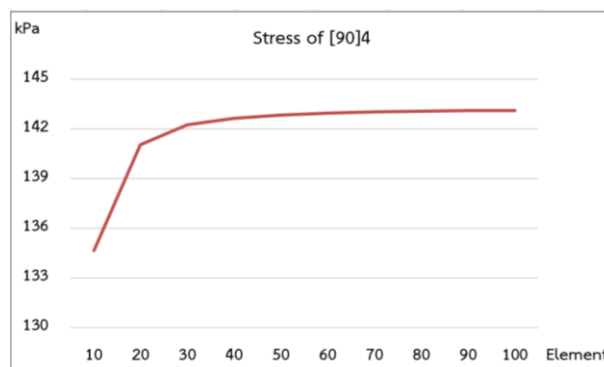
ภาพที่ 3 แบบจำลองแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วน
ทางเรขาคณิต 1:1

แบบจำลองแผ่นวัสดุคอมโพสิตจะถูกแบ่งออกเป็น
เอลิเมนต์ โดยเลือกใช้เอลิเมนต์แบบเปลือก (Shell
281) ที่มีจำนวน 8 จุดต่อ (Node) เนื่องจากแผ่นวัสดุ
คอมโพสิตเป็นกรณีความเค้นระนาบ (Plane stress) ที่
มีลำดับชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 6 กล่าวคือ ทุกจุดของ
แผ่นวัสดุคอมโพสิตสามารถเคลื่อนที่ในแนวแกน x , y
และ z รวมไปถึงสามารถหมุนรอบแกน x , y และ z
ได้ ซึ่งจำนวนเอลิเมนต์จะมีผลต่อการคำนวณ โดย
จำนวนเอลิเมนต์ที่มากจะทำให้ผลการคำนวณมีความ
ถูกต้องแม่นยำกว่าเอลิเมนต์ที่มีจำนวนน้อยกว่า แต่จะ
ใช้เวลาในการคำนวณมากกว่า จึงต้องทำการหาจำนวน
เอลิเมนต์ที่เหมาะสม เพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่มีความ

ถูกต้องแม่นยำและใช้เวลาในการคำนวณที่รวดเร็ว จึง
แบ่งแบบจำลองแผ่นวัสดุคอมโพสิตออกเป็นเอลิเมนต์
สี่เหลี่ยม (Quadrilateral) ด้านละ 10, 20, 30, ..., 100
เอลิเมนต์ เพื่อพิจารณาการลู่เข้าของผลการคำนวณ
ระยะการแอ่นและความเค้นดัด ดังแสดงในภาพที่ 4 ซึ่ง
พบว่าผลการคำนวณระยะการแอ่นและความเค้นดัดมี
การลู่เข้าเมื่อจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 50 และ 80
เอลิเมนต์ ตามลำดับ เพื่อให้สามารถใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์
ซอฟต์แวร์ในการคำนวณระยะการแอ่นและความเค้น
ดัดได้ จึงทำการเลือกใช้เอลิเมนต์จำนวน 100 เอลิเมนต์



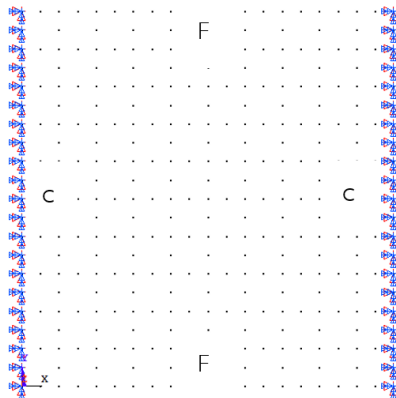
(ก) การลู่เข้าของระยะการแอ่น



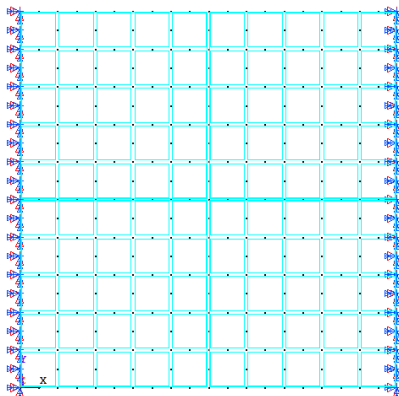
(ข) การลู่เข้าของความเค้นดัด

ภาพที่ 4 การลู่เข้าของผลการคำนวณที่ได้จาก FEM

ส่วนเงื่อนไขขอบของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีขอบสอง
ด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่น (Clamped: C) และ
อีกสองด้านปล่อยอิสระ (Free: F) ได้แสดงดังภาพที่ 5
ซึ่งภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ 1 N/m^2 กระทำตั้งฉาก
กับแผ่นวัสดุคอมโพสิตได้แสดงดังภาพที่ 6



ภาพที่ 5 เงื่อนไขขอบของแบบจำลองที่มีการรองรับแบบ CFCF



ภาพที่ 6 การกำหนดภาระกระทำต้งจากกับแผ่นวัสดุคอมโพสิต

ผลการคำนวณการกระจายของระยะการแอ่นและการกระจายของความเค้นดัดของแบบจำลองแผ่นวัสดุคอมโพสิตโดยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ จะแสดงผลเป็นแผนที่ที่เรียกว่าแผนภาพเส้นชั้นความสูง (Contour plot) ซึ่งโดยทั่วไป สีที่ต่างกันในแผนภาพเส้นชั้นความสูงจะสื่อความหมาย โดยสีแดงแสดงค่าที่สูงที่สุดของระยะการแอ่นและความเค้นดัด ส่วนสีน้ำเงินแสดงค่าที่ต่ำสุดของระยะการแอ่นและความเค้นดัด (รวมถึงค่าลบในกรณีความเค้นกด) ส่วนผลการคำนวณระยะการแอ่นและความเค้นดัดของแบบจำลองแผ่นวัสดุคอมโพสิตโดยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ จะบันทึกเป็นค่าในรูปแบบ .txt หรือไฟล์ข้อความซึ่งเรียกว่า ASCII Output File โดยจะเลือกค่าที่ตำแหน่งจุดต่อ (Node)

5. ผลการศึกษา

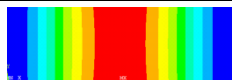
5.1 จากผลการคำนวณการกระจายของระยะการแอ่น พบว่าแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิต 1:1 ถึง 5:1 ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$, $[0/90]_s$, $[90/0]_s$ และ $[90]_4$ มีลักษณะการกระจายของระยะการแอ่นที่เหมือนกัน ดังแสดงในตารางที่ 2-5 โดยระยะการแอ่นสูงสุดจะเกิดขึ้นบริเวณกลางแผ่น (สีแดง) และลดลงตามลำดับ เป็นสีเหลือง เขียว ฟ้ำ และน้ำเงิน ที่มีหน่วยของระยะการแอ่นเป็นไมโครเมตร (μm) ซึ่งเมื่อมองจากภาพตัดแกน y จะพบว่าตำแหน่งตรงกลางแผ่นวัสดุคอมโพสิตจะมีระยะการแอ่นมากกว่าตำแหน่งตรงขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่น และเมื่อมองจากภาพตัดแกน x ระยะการแอ่นตำแหน่งตรงกลางขอบที่มีการรองรับแบบปล่อยอิสระจะมีค่ามากกว่าตำแหน่งตรงกลางแผ่นวัสดุคอมโพสิต จึงทำให้รูปร่างการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตมีลักษณะคล้ายอานม้า

5.2 จากผลการคำนวณระยะการแอ่นตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นวัสดุคอมโพสิต พบว่าระยะการแอ่นจะมีค่ามากขึ้นเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่ามากขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 6 เนื่องจากแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิต 5:1 จะยาวกว่าแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิต 1:1 จึงทำให้เกิดโมเมนต์ดัดมากกว่า เป็นผลให้ระยะการแอ่นมีค่ามากกว่า และพบว่าระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ จะมีค่ามากกว่า $[90/0]_s$, $[0/90]_s$ และ $[0]_4$ เนื่องจากการเรียงตัวของเส้นใยที่ต่างกันจะทำให้ค่า D_{11} ในสมการ (6) ซึ่งเป็นค่าความแข็งแกร่งดัดในแนวแกน x มีค่าต่างกัน ซึ่งค่า D_{11} ของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใย $[90]_4$ จะมีค่าน้อยกว่า $[90/0]_s$, $[0/90]_s$ และ $[0]_4$ ตามลำดับ เป็นผลให้ระยะการแอ่นสูงสุดของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใย $[90]_4$ มีค่ามากที่สุด

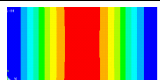
ตารางที่ 2 การกระจายของระยะการแอ่นของ $[0]_4$

อัตราส่วน	การกระจายของระยะการแอ่น
1:1	
2:1	
3:1	
4:1	
5:1	

ตารางที่ 3 การกระจายของระยะการแอ่นของ $[0/90]_s$

อัตราส่วน	การกระจายของระยะการแอ่น
1:1	
2:1	
3:1	
4:1	
5:1	

ตารางที่ 4 การกระจายของระยะการแอ่นของ $[90/0]_s$

อัตราส่วน	การกระจายของระยะการแอ่น
1:1	
2:1	
3:1	
4:1	
5:1	

ตารางที่ 5 การกระจายของระยะการแอ่นของ $[90]_4$

อัตราส่วน	การกระจายของระยะการแอ่น
1:1	
2:1	
3:1	
4:1	
5:1	

ตารางที่ 6 ระยะการแอ่น (μm) ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นวัสดุคอมโพสิต

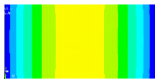
อัตราส่วน	$[0]_4$	$[0/90]_s$	$[90/0]_s$	$[90]_4$
1:1	0.211	0.243	1.250	4.434
2:1	3.303	3.778	20.011	71.204
3:1	16.687	19.078	101.370	360.920
4:1	52.840	60.290	320.470	1141.300
5:1	129.240	147.220	782.540	2787.300

5.3 ผลการคำนวณการกระจายของความเค้นตัดพบว่าแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิต 1:1 ถึง 5:1 ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$, $[0/90]_s$, $[90/0]_s$ และ $[90]_4$ มีลักษณะการกระจายของความเค้นตัดที่เหมือนกัน ดังแสดงในตารางที่ 7-10 โดยความเค้นตัดสูงสุดจะเกิดขึ้นบริเวณขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่น ซึ่งผลการคำนวณโดยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์จะแสดงเป็นสีแดง และความเค้นตัดจะลดลงเป็นลำดับ ได้แก่ สีเหลือง เขียว ฟ้ำ และน้ำเงิน ที่มีหน่วยของความเค้นตัดเป็นกิโลพาสคาล (kPa) แต่เนื่องจากแผ่นวัสดุคอมโพสิตรับภาระแบบกระจายสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น จึงทำให้รูปร่างการแอ่นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตเมื่อมองจากภาพตัด y มีลักษณะคล้ายกระทะทำให้ขอบบนของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการรองรับแบบยึดแน่นเกิดความเค้นดัดแบบกดซึ่งเป็นค่าความเค้นดัดลบ ผลการคำนวณโดยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์จึงแสดงเป็นสีน้ำเงินซึ่งเป็นค่าน้อยเนื่องจาก

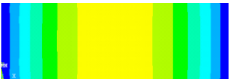
เป็นค่าติดลบ

5.4 จากผลการคำนวณความเค้นดัดตำแหน่งกึ่งกลางขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่น พบว่าความเค้นดัดจะมีค่ามากขึ้นเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่ามากขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 11 เนื่องจากโมเมนต์ดัดมีค่าสูงขึ้นในแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่ยาวกว่า เป็นผลให้ความเค้นดัดมีค่ามากกว่า และพบว่าความเค้นดัดของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ จะมีค่ามากกว่า $[90/0]_s$, $[0/90]_s$ และ $[0]_4$ เนื่องจากการเรียงตัวของเส้นใยที่ต่างกันจะทำให้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดมีค่าต่างกัน ซึ่งการที่มอดุลัสความยืดหยุ่นของการเรียงตัวของเส้นใย $[0]$ มีค่ามากกว่าการเรียงตัวของเส้นใย $[90]$ เป็น 21:1 ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใย $[90]_4$ จะมีค่าน้อยกว่า $[90/0]_s$, $[0/90]_s$ และ $[0]_4$ ตามลำดับ เป็นผลให้ความเค้นดัดของแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใย $[90]_4$ มีค่ามากที่สุด

ตารางที่ 7 การกระจายของความเค้นดัดของ $[0]_4$

อัตราส่วน	การกระจายของความเค้นดัด
1:1	
2:1	
3:1	
4:1	
5:1	

ตารางที่ 8 การกระจายของความเค้นดัดของ $[0/90]_s$

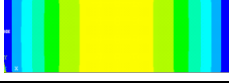
อัตราส่วน	การกระจายของความเค้นดัด
1:1	
2:1	
3:1	
4:1	
5:1	

6. สรุปผลและอภิปรายผล

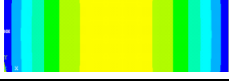
จากผลการศึกษาพบว่าแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิต 1:1 ถึง 5:1 มีรูปแบบการกระจายของระยะการแอ่นและความเค้นดัดที่คล้ายกัน โดยระยะการแอ่นสูงสุดจะเกิดขึ้นบริเวณกลางแผ่นและลดลงไปยังขอบที่ถูกรองรับแบบยึดแน่น ส่วนความเค้นดัดสูงสุดจะเกิดขึ้นบริเวณขอบที่ถูกรองรับแบบยึดแน่น และลดลงไปยังกลางแผ่น ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิก (Classical plate theory: CPT) ที่อธิบายไว้ว่า เมื่อแผ่นบางรับภาระแบบกระจายสม่ำเสมอ กระทำตั้งฉากกับแผ่นโมเมนต์ดัด (Bending moment) จะมีค่าสูงสุดที่บริเวณขอบที่มีข้อจำกัดการเคลื่อนที่สูง เช่น ขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่น ทำให้เกิดความเค้นดัด (Bending stress) สูงสุดบริเวณดังกล่าว [13] ในขณะที่ยาระยะการแอ่นจะเกิดสูงสุดบริเวณที่แผ่นบางมีอิสระในการเคลื่อนที่มาก เช่น ขอบที่มีการรองรับแบบปล่อยอิสระ [14] นอกจากนี้ยังพบว่า แผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่สูงขึ้นจะส่งผลให้ระยะการแอ่นและความเค้นดัดเพิ่มขึ้น เนื่องจากโมเมนต์ดัดมีค่ามากขึ้นเมื่อความยาวของแผ่นวัสดุคอมโพสิตเพิ่มขึ้น สำหรับผลของการเรียงตัวของเส้นใย พบว่าการเรียงตัวของเส้นใยส่งผลต่อระยะการแอ่นและความเค้นดัดด้วย โดยแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ จะมีระยะการแอ่นและความเค้นดัดสูงสุดเมื่อ

เปรียบเทียบกับแผ่นวัสดุคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90/0]_s$, $[0/90]_s$ และ $[0]_4$ เนื่องจากค่าความแข็งแรงดึงดัดในแนวแกนน้อยกว่า $[0]_4$ ตามสมการโมเมนต์ดัดของแผ่น (ค่า D_{11} ในเมทริกซ์ D มีค่าน้อย) และโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดต่ำกว่าการเรียงตัวของเส้นใยแบบอื่น จึงส่งผลให้ระยะการแอ่นและความเค้นดัดมากกว่าการเรียงตัวของเส้นใยแบบอื่น ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Nadaf และ Fernandes [3] ที่ระบุว่าความแข็งแรงดึงดัดในแนวเส้นใยมีอิทธิพลอย่างมากต่อพฤติกรรมการเสีรูปของแผ่นวัสดุคอมโพสิต ดังนั้นผลการศึกษานี้สามารถใช้เป็นแนวทางเบื้องต้นสำหรับการออกแบบแผ่นวัสดุคอมโพสิต โดยเฉพาะในกรณีที่ต้องคำนึงถึงการแอ่นตัวและความเค้นดัด การเลือกอัตราส่วนทางเรขาคณิตและรูปแบบการเรียงตัวของเส้นใยที่เหมาะสมจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพทางกลของแผ่นวัสดุคอมโพสิตในงานวิศวกรรมที่ต้องการความแข็งแรงและความทนทานสูง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในโครงสร้างที่มีข้อจำกัดด้านน้ำหนัก เช่น อุตสาหกรรมการบินและยานยนต์

ตารางที่ 9 การกระจายของความเค้นดัดของ $[90/0]_s$

อัตราส่วน	การกระจายของความเค้นดัด
1:1	
2:1	
3:1	
4:1	
5:1	

ตารางที่ 10 การกระจายของความเค้นดัดของ $[90]_4$

อัตราส่วน	การกระจายของความเค้นดัด
1:1	
2:1	
3:1	
4:1	
5:1	

ตารางที่ 11 ความเค้นดัดสูงสุด (kPa) ของแผ่นวัสดุคอมโพสิต

อัตราส่วน	$[0]_4$	$[0/90]_s$	$[90/0]_s$	$[90]_4$
1:1	1.402	4.995	5.014	5.657
2:1	5.670	19.811	20.395	22.593
3:1	12.822	44.672	46.208	51.126
4:1	22.857	79.915	82.454	91.312
5:1	35.775	125.600	129.130	143.130

7. ข้อจำกัดงานวิจัย

งานวิจัยนี้ดำเนินการภายใต้สมมติฐานที่ว่า แผ่นวัสดุคอมโพสิตมีพฤติกรรมเชิงเส้น (Linear behavior) และรับภาระแบบกระจายสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น โดยมิได้พิจารณาผลกระทบจากปัจจัยภายนอก เช่น รอยตำหนิในวัสดุ อิทธิพลจากอุณหภูมิและความชื้น ตลอดจนผลของการเสื่อมสภาพของวัสดุเมื่อใช้งานจริง รวมถึงเงื่อนไขการรองรับที่ถูกกำหนดให้เป็นแบบยึดแน่นสมบูรณ์ (Perfect clamping) ซึ่งอาจแตกต่างจากสภาวะจริง นอกจากนี้ งานวิจัยนี้เน้นศึกษาพฤติกรรมของแผ่นวัสดุคอมโพสิตเพียงชนิดเดียว โดยมิได้เปรียบเทียบกับวัสดุอื่น เช่น โลหะหรือวัสดุผสม ซึ่งอาจมีพฤติกรรมที่แตกต่างกันภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน จึงมีข้อจำกัดในการอ้างอิงผลลัพธ์ไปใช้กับระบบโครงสร้างที่ซับซ้อนหรือแตกต่างจากแบบจำลอง แนวทาง

การศึกษาต่อยอดในอนาคตที่สามารถนำไปพัฒนาได้ ได้แก่ การเปรียบเทียบกับวัสดุประเภทอื่น การวิเคราะห์ภายใต้ภาระและสภาวะแวดล้อมที่ซับซ้อน การศึกษาผลของความไม่สมบูรณ์ของแผ่นวัสดุคอมโพสิต และการทดลองจริงเพื่อยืนยันผลการจำลองและประเมินความไม่แน่นอนของผลลัพธ์

8. บรรณานุกรม

- [1] ไพโรจน์ สิงหนัดกิจ. (2559). กลศาสตร์ของวัสดุคอมโพสิต. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [2] Mohammed O., Suleiman E. (2016). Deflection and stress analysis of fibrous composite laminates. *International Journal of Advanced Research in Computer Science Software Engineering*, 6(2), 105-112.
- [3] Nadaf M., Fernandes R. J. (2023). Bending analysis for stress and deflection for cross-ply laminated composite plate using higher order shear deformation theory subjected to sinusoidal loading using finite element method. *Indian Journal of Science and Technology*, 16(38), 3177-3185.
- [4] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข, ณัฐพงษ์ กุลท้วม, เอกนรินทร์ ระลาธิ. (2559). ความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่น – ความเค้นดัด และอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตรขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น. *วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ มอ.*, 9(1), 61-69.
- [5] ธวัชชัย อุ้นใจม, กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข, อนุชา ตาน้อย, อนุชิต เกตุทะจักร์. (2561). พฤติกรรมการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบครอสพลายที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่น และอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ. *วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ ม.* อบ, 11(2), 53-64.
- [6] Autar K.K. (2006). *Mechanics of Composite Materials*. Boca Raton: Taylor & Francis Group LLC.
- [7] Isaac M., Daniel O. (1994). *Engineering Mechanics of Composite Materials*. New York: Oxford University Press.
- [8] หฤทกั กิรีติเสวี, ฉัตรชัย วีระนิตสกุล, อภิรัตน์ เล่าห์บุตร. (2552). ภาพรวมของวัสดุเชิงประกอบ. *วิศวกรรมสารมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์*, 22(70), 18-32.
- [9] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข. (2564). การสันสะท้อนเชิงกล. เชียงใหม่: ห้างหุ้นส่วนจำกัดจรัสธุรกิจการพิมพ์.
- [10] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข. (2556). เอกสารประกอบการสอนวิชาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา.
- [11] Reddy J.N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press LLC.
- [12] ANSYS, Inc. (2025). *ANSYS Student Version (Version 2025 R1) [Computer software]*. Canonsburg, PA: ANSYS, Inc.

Retrieved April 3, 2025, from <https://www.ansys.com/>

- [13] Ugural A.C. (2009). *Stresses in beams, plates, and shells*. Boca Raton: CRC Press LLC.
- [14] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. (1959). *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill.