ร้อยโทหญิง สุวิมล เสนีวงศ์ ณ อยุธยา
พันโท ผศ.ทวีวัชร วีระแกล้ว
พันโท ผศ.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง

โครงการความร่วมมือ หลักสูตรปริญญาโท ระหว่าง
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และ โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า

การพัฒนาโปรแกรมสำหรับออกแบบโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติด้วยวิธีอ้อมของระบบทางพลศาสตร์

The Development of Program for Designing the Structure of Automatic Car Cloth Cover by Indirect Method of Dynamic Optimal Control

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้มุ่งการออกแบบโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติซึ่งเป็นอุปกรณ์ที่สามารถยืดอายุการใช้งานของรถยนต์ได้ จึงเลือกศึกษาจากทฤษฎีทางระบบหุ่นยนต์ (Robotics system theory) โดยอาศัยกลไกการทำงานของแขนกลสองตำแหน่ง ซึ่งเคลื่อนที่ทั้งแบบหมุน (Revolute) และแบบเชิงเส้น (Prismatic) เพื่อให้ได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motions) ของผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติที่ได้จากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler-Lagrange equations) เพื่อนำค่าโมเมนต์ของแรงบิด (Actuator torques) และแรงภายนอก (External forces) มาวิเคราะห์การทำงาน และนำโปรแกรม MATLAB มาพัฒนาปัญหาทางการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamic optimal control problem) โดยทำการแปลงปัญหาผ่านวิธีทางแคลคูลัสของความแปรปรวน (Calculus of variation) ซึ่งเป็นวิธีทางอ้อม (Indirect method) และหาคำตอบโดยการใช้โปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) แต่เนื่องจากปัญหาเป็นพารามิเตอร์ที่ขึ้นกับเวลา งานวิจัยนี้จึงได้นำวิธีการคอลโลเคชัน (Collocation method) มาใช้เพื่อทำให้ปัญหาถูกแปลงเป็นปัญหาทางการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดของระบบสถิตยศาสตร์ (Static optimal control problem) ให้ได้มาซึ่งโมเมนต์ของแรงบิดและโมเมนต์ของแรงภายนอกที่มอเตอร์สามารถทำงานได้ รวมทั้งยังสามารถวิเคราะห์โครงสร้างหากเปลี่ยนวัสดุตามความต้องการของผู้ใช้ โดยโปรแกรมมีความแม่นยำและความรวดเร็วในการหาคำตอบ ซึ่งสามารถจำลองโครงสร้างการทำงานเพื่อเป็นแนวทางในการออกแบบของจริงต่อไป

Abstract

Nowadays a car becomes more and more necessary part in human lifestyles. For this reason, researcher has a new idea, in order to design exterior equipment especially for protecting cars. Therefore, we address the first problem how to make this automatic car cloth cover fit for a specific car and easy to use. The two- link mechanisms are considered which revolute and prismatic joints are. Using robotic theories and Euler-Lagrange equations are used for the dynamic equations of motion. In addition, joining with optimization theories program from MATLAB, by applying calculus of variations to the cost functional, the necessary conditions are obtained. After we analyzed the optimization for dynamic system problem. So we get actuator torques and external forces of the moment in order to get extremum energy of the motors. Graphic user interface can analyze the Structure of Automatic Car Cloth Cover when we change the materials. The suitable programs are developed for simulation and designing the motion so as to be matched with the considered car.

Keywords

Automatic car cloth covers,
Robotics system theory,
R-P Robot,
Dynamic optimization,
Calculus of variation

1. บทนำ

ผ้าคลุมรถยนต์จัดเป็นอุปกรณ์ประดับยนต์ที่ช่วยยืดอายุการใช้งานของรถได้ แต่ตามแบบเดิมการใช้งานยังไม่สะดวกสำหรับผู้ใช้เท่าที่ควร ผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติจึงเป็นแนวคิดในการวิจัยให้เกิดสิ่งประดิษฐ์ขึ้นใหม่ โดยจะออกแบบให้ก่อนการใช้งานอุปกรณ์ทั้งหมดถูกเก็บในกันชนด้านท้ายของตัวรถอย่างมิดชิด เมื่อกดรีโมตผ้าคลุมค่อย ๆเคลื่อนที่ออกมา และจะหยุดเคลื่อนที่เมื่อผ้าคลุมมาจนถึงด้านหน้าของตัวรถและอยู่ในระนาบเดียวกับกันชนด้านท้าย การพับเก็บก็เช่นกันคือเมื่อกดรีโมตผ้าก็ค่อย ๆ เคลื่อนที่จากด้านหน้าถอยมาจนถึงด้านหลังและม้วนเก็บกลับที่เดิม ซึ่งเป็นการออกแบบที่คำนึงถึงความสะดวกสบายในการใช้งานมากที่สุด

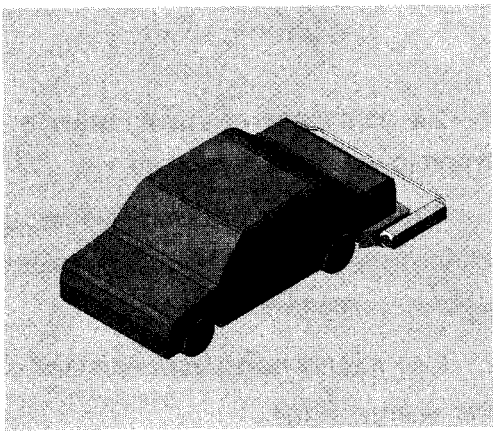
ในงานวิจัยนี้มุ่งศึกษาทางทฤษฎีในส่วนของการทำงานของโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติซึ่งอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB มาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหา โดยการออกแบบโครงสร้างใช้จากทฤษฎีของระบบหุ่นยนต์เพื่อคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่จากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ แต่คำตอบที่ได้อยู่ในรูปปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น จึงต้องแปลงปัญหาทางพลศาสตร์เป็นปัญหาทางสถิตยศาสตร์เสียก่อน โดยใช้วิธีการหาคำตอบสำหรับปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุม (Optimal control problem) มาช่วยวิเคราะห์ปัญหาด้วย เนื่องจากการแก้ปัญหาวิธีนี้คำตอบทางพลศาสตร์จะได้ผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพและความถูกต้องแม่นยำมากยิ่งขึ้น (1) โดยมีวิธีการแก้ปัญหาอยู่สองวิธีคือ วิธีตรง (Direct method) และวิธีอ้อม (Indirect method) (2) โดยผู้วิจัยเลือกที่จะแก้ปัญหาแบบวิธีอ้อม ซึ่งเป็นวิธีการที่ยากและซับซ้อนกว่า แต่ให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำมากกว่า โดยวิธีอ้อมเป็นการแก้ปัญหาโดยใช้แคลคูลัสความแปรปรวน ซึ่งทำโดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) และนำไปแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ร่วมกับการใช้เงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด (Necessary condition) สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด และเพิ่มการพัฒนาโปรแกรมให้ติดต่อผู้ใช้ได้โดยผ่านหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface ;GUI) พร้อมกับแสดงผลการวิเคราะห์ออกมาในรูปกราฟเพื่อความเข้าใจง่าย เนื่องจากแสดงผลทั้งแรงภายนอกและแรงบิดของมอเตอร์ต่อ-

เนื่องตลอดการเคลื่อนที่ของการทำงาน รวมทั้งลองวิเคราะห์ว่ามีความเป็นไปได้มากน้อยเพียงใดที่จะนำผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติมาใช้กับรถยนต์จริงๆ

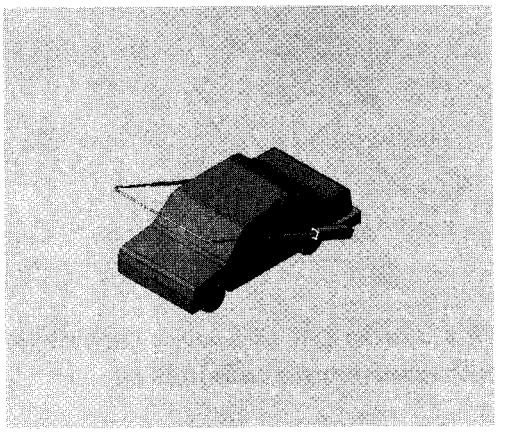
2. สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motions)

2.1 ฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)

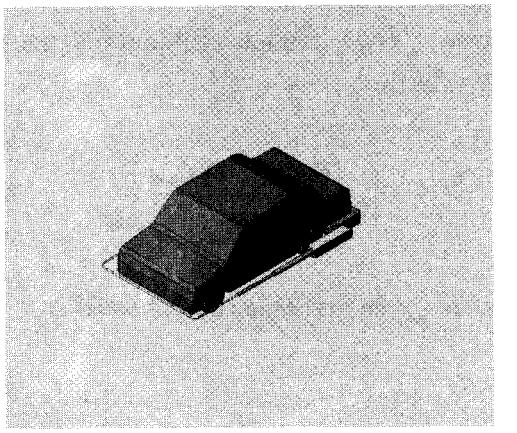
จาก Craig.(3) กล่าวถึงการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ว่าต้องคำนึงถึงข้อต่อ (Joints) ของหุ่นยนต์ ดังนั้นในการศึกษาถึงโครงสร้างของผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติต้นแบบนี้ จึงอาศัยทั้งลักษณะการเคลื่อนที่แบบหมุน และเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น โดยให้มีระดับขั้นความเสรี (Degree of freedoms) สองค่า หรืออาจเรียกได้ว่าสองลิงค์ โดยลิงค์แรกเป็นการทำงานโดยควบคุมลักษณะการหมุน ให้มีองศาการหมุนระหว่าง 0 ถึง 180 องศาและลิงค์ที่สองเป็นการทำงานแบบยืดออกจากลิงค์แรกหรือเรียกว่าการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งขนานกับแกน (Translation) ความยาวของลิงค์ที่ยืดออกนี้จะมีความยาวสุดท้ายเท่ากับความยาวของรถยนต์แต่ละคันที่เราต้องการศึกษาตามรูปที่ 1,2 และ 3



รูปที่ 1 แสดงจุดเริ่มต้นศึกษาการทำงานของโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติโดยให้ลิงค์แรกอยู่ด้านข้างกันชนรถด้านท้าย และลิงค์ที่สองถูกเก็บภายในลิงค์แรก

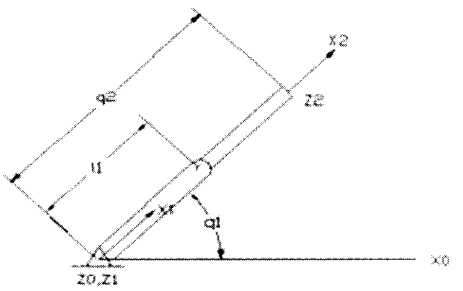


รูปที่ 2 แสดงการเคลื่อนที่ของโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติโดยเริ่มลิงค์แรกเคลื่อนที่แบบหมุนและลิงค์ที่สองเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งขนานกับแกน



รูปที่ 3 แสดงตำแหน่งสุดท้ายในการเคลื่อนที่ของโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติที่เป็นปัญหาในการพิจารณา

การพิจารณาตำแหน่ง (Position) และการเปลี่ยนมุม (Orientation) ของเฟรมทำให้สามารถหาพิกัด (Coordinate) ได้จากการพิจารณาค่า D-H parameters ของแต่ละลิงค์ ซึ่งประกอบไปด้วย $\alpha_{i-1}, d_i, \theta_i$ และ α_{i-1} โดยที่แต่ละค่าเป็นตัวบอกความเป็นลิงค์ i ซึ่ง คือ Link length α_i คือ Link twist d_i คือ Link offset และ θ_i คือ Link angle ได้ภาพแสดงการทำงานของแต่ละลิงค์ตามรูปที่ 4



รูปที่ 4 แสดงค่า D-H parameters และการทำงานด้านข้างของผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติ [4]

2.2 จาโคเบียนเมตริกซ์ (Jacobian matrix; ${}^{0}_{n}J(q)$

มีความสำคัญในส่วนการวิเคราะห์ และควบคุมของการเคลื่อนที่ของความเร็วของหุ่นยนต์ โดยการจะได้มาของจาโคเบียนเมตริกซ์จะต้องหาจากทรานฟอรส์เมชั่นเมตริกซ์ (Transformation matrix; ${}^{0}_{n}T(q)$ เสียก่อน ถ้าหุ่นยนต์มีจำนวน n ลิงค์จะได้เป็น

$$ {}^{0}_{n}T(q) = \left[\begin{array}{ccc:c} {}^{0}_{n}R(q) & & & {}^{o}P(q)_{norg} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times4} \qquad (1) $$

ต่อมาให้ ${}^{0}_{n}J$ คือ ค่าจาโคเบียน สามารถเขียนได้ว่า

$$ {}^{0}_{n}J(q) = [J_{1(6\times1)} : J_{2(6\times1)} : \ldots\ldots : J_{n(6\times1)}]_{(6\times n)} = \left[\begin{array}{c} J_v \\ \ldots\ldots \\ J_w \end{array}\right]_{6\times n} \qquad (2) $$

เมื่อลิงค์แรกของโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติควบคุมลักษณะการหมุน ค่าจาโคเบียนเมตริกซ์ที่ใช้ต้องพิจารณาเป็นแบบหมุนด้วย เมื่อพิจารณาการหมุนรอบแกน z จะได้ว่า

$$ J_n = \left[\begin{array}{c} \vec{z}_i({}^{0}P_{(n+1)org} - {}^{0}P_{iorg}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{z}_i \end{array}\right]_{6\times n} \qquad (3) $$

ต่อมาเมื่อพิจารณาลิงค์ที่สองซึ่งเป็นการควบคุมลักษณะการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นโดยการยืดออก ค่าจาโคเบียนเมตริกซ์ที่ใช้ต้องพิจารณาเป็นแบบเคลื่อนที่เชิงเส้นด้วย เมื่อพิจารณาการยืดออกตามแนวแกน x จะได้ว่า

$$ J_n = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]_{6\times1} \qquad (4) $$

2.3 โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of inertia; I)

จาก Kane.(5) อธิบายโมเมนต์ความเฉื่อยว่าเป็นตัวต้านทานการเคลื่อนที่ในแนวหมุน โดยต้องกำหนดว่าจะพิจารณารอบจุดใด สมมติว่าพิจารณาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุด a($\vec{I}_a$) และทำการอินทิเกรตพื้นผิว (Surface integral) จะได้

$$ \vec{I}_a = \int_F \rho\vec{P} \times (\vec{n}_a \times \vec{P}) d\tau \qquad (5) $$

2.4 สมการการเคลื่อนที่ทางพลศาสตร์ (Dynamic equation of motion)

เป็นการแสดงคุณสมบัติที่สำคัญของระบบเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ ในการศึกษานี้ใช้การอธิบายโดยใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์

2.4.1 พลังงานจลน์ของระบบกลศาสตร์ (Kinetic energy; $K(q)$

เมื่อพิจารณาพลังงานจลน์ทั้งหมด เขียนในรูปของ Spong.(4) จะได้ว่า

$$ K(q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \sum_{i=1}^{n} [m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I_i R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)]\dot{q} \qquad (6) $$

โดยที่ q คือ เจเนรอลไลซ์โคออดิเนต (Generalized coordinate)

$$D(q) = \sum_{i=1}^{n} (m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0_i R I_i {}^0_i R^T J_{\omega i}) \quad (7)$$

และ

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\} \quad (8)$$

ส่วน $D(q)$ คือ พอสซิทีฟเดฟฟินิทเมตริกซ์ (Positive definite matrix) และ c_{ijk} คือ คริสทอฟเฟลซิมโบว์ล (Christoffel symbols)

2.4.2 พลังงานศักย์ของระบบกลศาสตร์ (Potential energy; V (q))

จาก Craig. (3) แสดงสมการในเทอมของพลังงานศักย์ได้ว่า

$$\phi_k = \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (9)$$

2.4.3 สมการออยเลอร์-ลากรางจ์

ซึ่ง Spong.(4) อธิบายว่าเป็นสมการที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของเวลาของระบบกลศาสตร์ กำหนดให้

$$\tau_k = \sum_j d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j + \phi_k(q) \quad ; k = 1,.....,n \quad (10)$$

โดยที่ τ คือ แรงบิดและแรงภายนอกใช้เป็นสมการการเคลื่อนที่ของระบบและ n คือ จำนวนระดับขั้นความเสรี

3. ปัญหาทางทฤษฎีทางการควบคุมที่ได้พลสูงสุดของระบบพลศาสตร์ (Optimization for dynamic system problem)

ระบบพลศาสตร์ที่ใช้ทางวิศวกรรมส่วนมากจะแสดงในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ในการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงที่มีแรงภายนอกมากระทำมีสมการการเคลื่อนที่เป็น $\ddot{x} = u$ โดยที่ x แทนตำแหน่งในการเคลื่อนที่ของอนุภาค และ u แทนแรงภายนอกที่มากระทำ ซึ่งสามารถกำหนดเป็นเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุดของปัญหาได้ โดยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second derivative equation) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First derivative equation) ได้ว่า

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{และ} \quad \dot{x}_2 = u \quad (11)$$

โดยที่ x_2 คือ ความเร็วของอนุภาค และทั้งค่า x_1 และ x_2 สามารถคำนวณหาได้ ถ้าทราบแรงภายนอกที่กระทำ ดังนั้นสมการการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ สามารถสร้างได้ในรูป

$$\dot{x}_i = f(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2 ....., u_m, t) \; ; \quad i = 1, ..., n \quad (12)$$

ให้ t คือ เวลา X_1 คือ สเตทวาริเอเบิล (State variables) ของระบบหรือเอาท์พุท (Output variables) ของระบบ โดยที่ u คือ คอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) หรืออินพุทที่ใส่ให้ระบบ f_1 คือ ฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร x, u และ t โดย n คือ จำนวนสเตทวาริเอเบิล และ m คือ จำนวนของคอนโทรลวาริเอเบิล

โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์สามารถแบ่งปัญหาเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ได้สองประเภท คือ ปัญหาแบบเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) และปัญหาเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งเงื่อนไขบังคับเป็นข้อจำกัดทางกายภาพของระบบ เป็นตัวบังคับให้ระบบลู่เข้าหาคำตอบที่ถูกต้อง โดยทั่วไปแล้วค่าเริ่มต้น (Initial guesses) หรือเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบมักจะกำหนดเอง ซึ่งส่วนใหญ่เริ่มจากสภาวะหยุดนิ่ง แต่เงื่อนไขขอบเขตต้องกำหนดตามสเตทวาริเอเบิล คอนโทรลวาริเอเบิลและเงื่อนไขบังคับทางกายภาพ (Path constraints)

$$x_L \le x(t) \le x_u \quad (13)$$

$$u_L \le u(t) \le u_u \quad (14)$$

โดยที่ X_L และ X_U คือ ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของสเตทวาริเอเบิล และ U_L และ U_U คือ ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของตัวแปรควบคุม ต่อมาสามารถกำหนดเงื่อนไขบังคับทางกายภาพของระบบได้เป็น

$$c_L \le c(x(t),u(t),t) \le c_u \quad (15)$$

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,x_2,.....,x_n,u_1,u_2,.....,u_m,t) \quad ;i=1,2,.....,n \quad (16)$$

$$g_i(x_1,x_2,.....,x_n,u_1,u_2,.....,u_m,t)=0 \quad ;i=1,2,.....,r \quad (17)$$

$$c_i(x_1,x_2,.....,x_n,u_1,u_2,.....,u_m,t)\le 0 \quad ;i=1,2,.....,p \quad (18)$$

$$s_i^2(x_1,x_2,.....,x_n)+c_i=0 \quad ;i=1,2,.....,q \quad (19)$$

โดยที่สมการ 16 เป็นเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ สมการ 17 เป็นเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints) สมการ 18 เงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ (Inequality constraints) และสมการ 19 เป็นเงื่อนไขบังคับที่เป็นตัวแปรสมมติ (Slack variable)

การศึกษาในงานวิจัยนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวนหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อมของปัญหาทางการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพหรือปลายทางของระยะทางการทำงาน ให้ฟังก์ชันนอล (Functional;$J(x)$) เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน ซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาทั้งหมดโดยทั่วไปเรียกว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) แต่ถ้าพิจารณาคอสฟังก์ชันนอลที่ค่าพลังงานของระบบที่น้อยที่สุด (Minimum energy) จะได้รูปสมการเป็น

$$J' = \int_{t_0}^{t_f}\left(L' + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\dot{x}_i - f_i)\right)dt \quad (20)$$

ส่วนการเลือกใช้เงื่อนไขใดนั้นขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการพิจารณา โดยฟังก์ชันนอล $J[x]$ ในการศึกษานี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and end points) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น (t_0) เวลาสุดท้าย (t_f) รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0), x(t_f)$ ไว้แล้ว ความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable functions) เป็นไปตามสภาวะขอบเขตของ $x(t_0)=x_0$ และ $x(t_f)=x_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_0 \le t \le t_f$ ให้ฟังก์ชัน $F(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)$ แสดงเป็นฟังก์ชันนอลได้ว่า

$$J[x_1,x_2,...,x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t,x_1,x_2,...,x_n,\dot{x}_1,\dot{x}_2,...,\dot{x}_n)dt \quad (21)$$

ถ้าให้ $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_i(t_0)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ $h_i(t_0)=h_i(t_f)=0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n] - J[x_1,x_2,...,x_n] \quad (22)$$
$$= \int_{t_0}^{t_f}\left[\begin{matrix}F(t,x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,...,\dot{x}_n+\dot{h}_n)\\ -F(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)\end{matrix}\right]dt$$

และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) กระจายสมการ และตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher order terms) ทิ้ง จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{h}_i\right)dt \quad (23)$$

ซึ่ง δJ เป็นการประมาณค่าจาก ΔJ ส่วนเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุดของค่าเหมาะสมสูงสุดเป็นค่าที่ทำให้ $\delta J = 0$ คือการทำให้ $h(t_0)=h(t_f)=0$ ดังนั้นจึงสมมติให้เป็นอนุพันธ์ต่อเนื่อง (Continuous derivatives) ได้ค่าเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i=1,...,n \quad (24)$$

4. การออกแบบโปรแกรม

ในส่วนของโปรแกรมได้ใช้ MATLAB ในการศึกษา โดยนำความสามารถของโปรแกรมมาใช้ 3 ส่วนด้วยกัน กล่าวคือ ซิมโบลิกส์ทูลบ็อกซ์ (Symbolic toolbox) การแก้ปัญหาทางออฟติไมเซชัน (Optimization solver) และหน้าจอรับข้อมูล ซึ่งทั้งหมดจะทำงานสัมพันธ์กันตลอดเวลา

ผู้ใช้จะมีหน้าที่ป้อนข้อมูลเกี่ยวกับรถยนต์ที่ต้องการศึกษา หลังจากนั้นโปรแกรมจะทำการคำนวณหาค่าความเหมาะสมสูงสำหรับระบบพลศาสตร์ (Dynamic optimization) ของผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติของรถยนต์ที่นำมาเป็นตัวอย่าง และแสดงผลออกมาในรูปกราฟของแรงบิดและแรงภายนอกของชิ้นงาน

4.1 โครงสร้างของโปรแกรม

4.1.1 อินพุท (Input) สำหรับโปรแกรม

โปรแกรมจะรับค่าต่างๆที่ได้จากปัญหาที่สนใจ ได้แก่ ความยาวกันชนหลังของรถยนต์ ความยาวทั้งหมดของรถยนต์ เวลาทั้งหมดที่ต้องการให้ผ้าคลุมรถยนต์ทำงาน และความหนาแน่นของวัสดุที่ต้องการศึกษา ซึ่งโปรแกรมจะรับจากการป้อนของผู้ใช้ผ่านหน้าจอรับข้อมูล

4.1.2 ขอบข่ายการทำงานของโปรแกรม

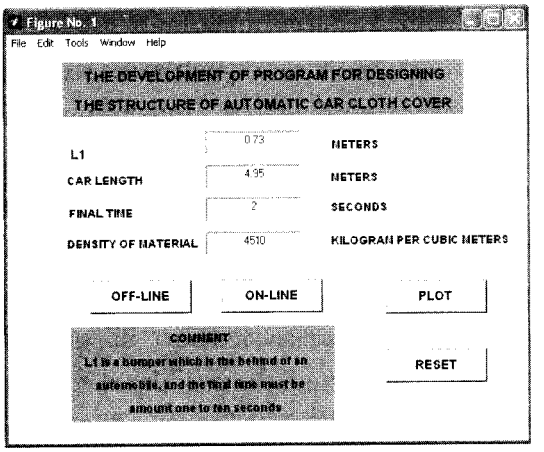
โครงสร้างของโปรแกรมแบ่งการทำงานเป็น 2 ส่วนใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ

ส่วนที่ 1 เรียกว่า ส่วนออฟไลน์ (Off-line) จะแปลงปัญหาที่สนใจที่ได้จากการอินพุทในรูปของข้อมูลแบบสตริง (String data) ให้เป็นปัญหาแบบโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยที่โปรแกรมจะพาราเมเทอร์ไรซ์ (Parameterize) ตัวแปรต่างๆ แล้วจะสร้างเวกเตอร์ของเงื่อนไขบังคับด้วยวิธีคอลโลเคชัน และกำหนดฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการ (Objective function) ซึ่งข้อมูลทั้งหมดจะถูกแยกเก็บไว้ในไฟล์ต่างๆ ตามประเภทของข้อมูล ซึ่งไฟล์ดังกล่าวจะกลายเป็นไฟล์อินพุท (Input file)

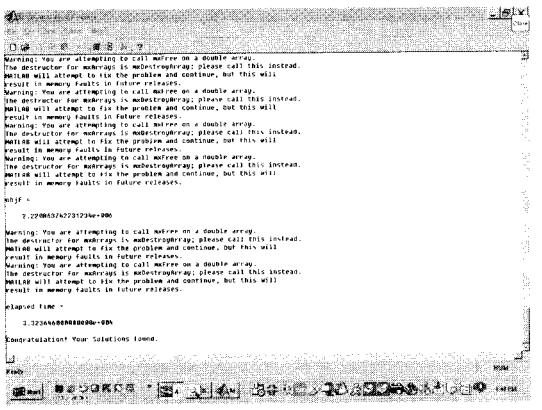
ส่วนที่ 2 เรียกว่าส่วนออนไลน์ (On-line) จะทำงานในส่วนของการแก้ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้นเป็นคำตอบที่ต้องการ โดยจะเน้นการแก้ปัญหาในส่วนของออฟติไมเซชันเป็นหลัก ซึ่งได้จากโปรแกรมที่เขียนไว้แล้วจาก Veeraklaew T.(6) ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับแคลคูลัสความแปรปรวน จากนั้นอาศัยฟังก์ชันเอฟมินคอนซึ่งเป็นออฟติไมเซชันทูลบอกซ์ (Optimization toolbox) ที่มีอยู่แล้วใน MATLAB เป็นฟังก์ชันหลักในการแก้ปัญหา ซึ่งจะทำหน้าที่ตั้งแต่ขั้นแรกเมื่อรับค่าอินพุทมาแล้วจะคืนค่าของเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ และเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ ซึ่งแทนค่าพารามิเตอร์ทางออฟติไมเซชัน (Optimization parameter) $\underline{\alpha}$ ลงไปแล้ว โดยขั้นที่สองเป็นการแทนค่าของ F $(\underline{\alpha})$ และขั้นที่สามเป็นการรับค่าจากขั้นตอนแรกนำมาคำนวณจนกว่าจะได้คำตอบ โดยการหาคำตอบของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าความชัน (Gradient) ของฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการ และค่าจาโคเบียนของเงื่อนไขบังคับอยู่ตลอดเวลา เพื่อนำไปสู่คำตอบของค่าเหมาะสมสูงสุด

5. ประเภทของปัญหาที่นำมาทดสอบกับโปรแกรม

จากข้อมูลของรถยนต์ Isuzu MU-7 (3,000 c.c) กำหนดขนาดของกันชนรถยนต์ให้มีความยาว 0.73 เมตร ขนาดความยาวของรถยนต์ 4.95 เมตร (7) และกำหนดให้เวลาทั้งหมดที่ผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติทำงาน 2 วินาที แสดงหน้าจอรับข้อมูล ตามรูปที่ 5 และเมื่อทำการรันโปรแกรมเป็นที่เรียบร้อยแล้วแสดงการสิ้นสุดการทำงานของโปรแกรม ตามรูปที่ 6 ดังนี้

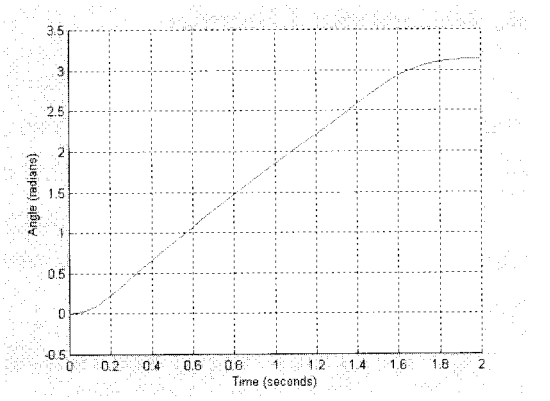


รูปที่ 5 แสดงการกำหนดข้อมูลจากปัญหา

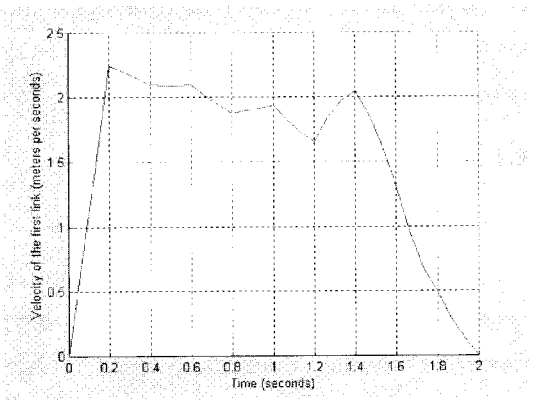


รูปที่ 6 แสดงการสิ้นสุดการทำงานของโปรแกรม

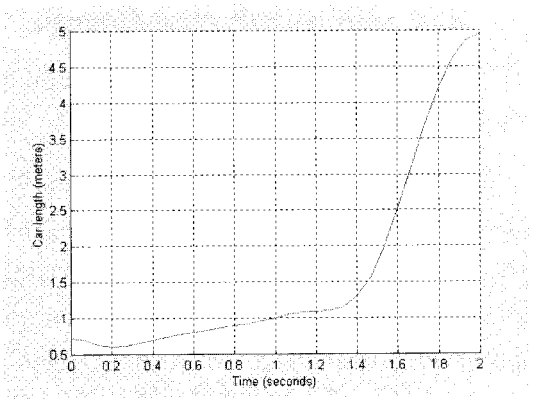
ซึ่งหน้าจอคอมมานด์ปรากฏคำว่า "Congratulation! Your Solutions found" แสดงว่าผลที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องและเป็นค่าเหมาะสมสูงสุด (Extremum) แสดงผลลัพธ์ที่ต้องการตามรูปที่ 7 และ 12 ดังนี้



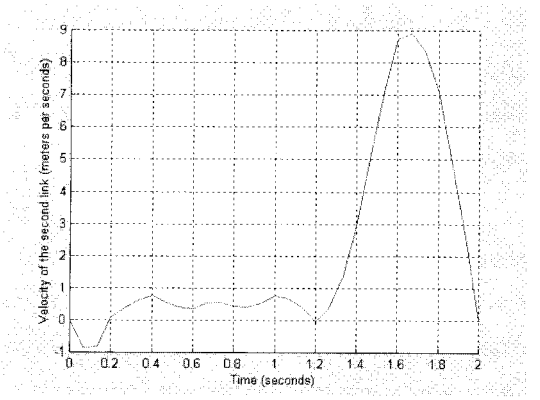
รูปที่ 7 แสดงมุมลิงค์แรก (q_1) หมุนไปเปรียบเทียบกับเวลา



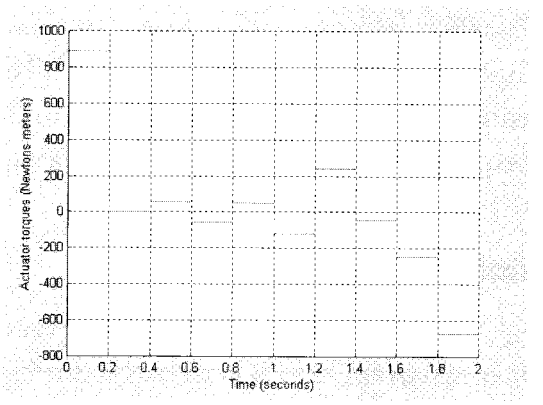
รูปที่ 8 แสดงความเร็วที่ลิงค์แรก (q_1) เคลื่อนที่ไปเปรียบเทียบกับเวลา



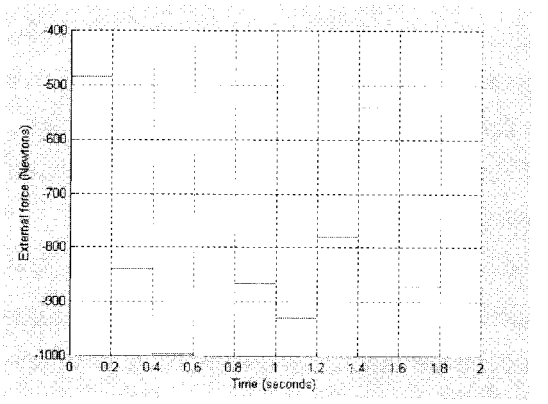
รูปที่ 9 แสดงระยะทางการยืดออกของลิงค์ที่สอง (q_2) เปรียบเทียบกับเวลา



รูปที่ 10 แสดงค่าความเร็วของลิงค์ที่สอง (q_2) เคลื่อนที่ไปเปรียบเทียบกับเวลา



รูปที่ 11 แสดงค่าแรงบิดของมอเตอร์เปรียบเทียบกับเวลา



รูปที่ 12 แสดงค่าแรงภายนอกของมอเตอร์เปรียบเทียบกับเวลา

จากรูปที่ 11 ทำให้ทราบว่ามอเตอร์ที่มารับค่าแรงบิดต้องเลือกให้มีขนาดประมาณ 900 นิวตันเมตร และจากรูปที่ 12 ทำให้ทราบว่ามอเตอร์ที่มารับค่าแรงภายนอกต้องเลือกให้มีขนาดประมาณ 930 นิวตัน จึงจะสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพมีค่าเหมาะสมสูงสุด

จากการทดสอบโปรแกรมโดยเปลี่ยนการทดสอบเป็นหลายปัญหา ทำให้ทราบว่าเมื่อทำการรันโปรแกรมเป็นที่เรียบร้อยแล้วหน้าจอคอมมานด์ปรากฏเป็นสามลักษณะ คือ "Congratulation! Your Solutions found" "Local minimum Exist!" หรือ "No solution!" โดยจะแสดงผลเป็นลักษณะใดนั้นขึ้นกับปัญหาที่นำมาทดสอบ

6. สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

การหาสมการการเคลื่อนที่ด้วยทฤษฎีของระบบหุ่นยนต์เป็นการศึกษาโดยอาศัยโครงสร้างของข้อต่อซึ่งแตกต่างไปตามการใช้งาน ในการศึกษานี้มีระดับขั้นความเสรีสองค่า โดยลิงค์แรกเคลื่อนที่แบบหมุนและลิงค์ที่สองเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น แก้ปัญหาโดยใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ พบว่าสมการที่ได้ให้ผลการทดสอบโปรแกรมที่ดี สามารถนำไปใช้แทนการทำงานของโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติได้เป็นอย่างดี ส่วนการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ด้วยวิธีการทรานสคริปชัน (Transcription method) เป็นการแปลงปัญหาทางพลศาสตร์ที่มีลักษณะของปัญหาเป็นแบบ Two point boundary value problem (TPBVP) เป็นปัญหาทางสถิตยศาสตร์โดยการแบ่งข้อมูลเป็นช่วงๆ จากปัญหาแบบเวลาต่อเนื่อง (Continuous time) เป็นวิธีดิสครีท (Discrete time) เนื่องจากปัญหาเป็นพารามิเตอร์ที่ขึ้นกับเวลา จึงต้องทำการแปลงปัญหาทางออฟติไมเซชั่น (Optimization) ผ่านวิธีทางแคลคูลัสของความแปรปรวนที่สนใจกรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน

โดยสมการการเคลื่อนที่ที่ได้เป็นปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งไม่สามารถคาดเดาว่าจะได้คำตอบหรือไม่ อาจเนื่องมาจากความซับซ้อนของปัญหาหรือมีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งโปรแกรมไม่สามารถหาคำตอบได้ หากการรันแสดงผลออกมาว่าไม่ได้คำตอบก็จะต้องเปลี่ยนปัญหาไปทดลองกับปัญหาอื่น และช่วงเวลาที่ผู้วิจัยกำหนดให้โปรแกรมทำงาน ได้แบ่งช่วงเวลาออกเป็น 10 ช่วง ตั้งแต่ 1 ถึง 10 วินาที และจากการศึกษาพบว่าที่รถยนต์ชนิดเดียวกันเวลาทำงานของรถยนต์ที่เวลาน้อยๆ แรงภายนอกและแรงบิดของมอเตอร์จะทำงานหนักกว่าที่เวลาการทำงานมาก แต่การทำงานที่นานเกินไปก็ไม่ก่อให้เกิดความสะดวกสบายและเป็นการออกแบบที่ไม่น่าใช้งาน จึงอยู่ที่ความต้องการของผู้ใช้งานว่าต้องการให้ออกแบบโดยคำนึงถึงสิ่งใดเป็นสำคัญ

7. ข้อแนะนำสำหรับงานวิจัยต่อไป

7.1 เนื่องจากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์เป็นวิธีการหาสมการการเคลื่อนที่ที่ดี แต่มีความซับซ้อนเมื่อต้องพิจารณาระดับขั้นความเสรีมากๆ และใช้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก อาทิ การอินทิเกรทหรือดิฟเฟอเรลเชียล จึงน่าจะเขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณการทำงานแทน เนื่องจากโปรแกรมในยุคปัจจุบัน สามารถทำการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้ได้คำตอบโดยง่าย

7.2 ถ้าต้องการผลการทดลองที่ดีขึ้นอาจแบ่งช่วงเวลาการศึกษาโดยใช้วิธีคอลโลเคชันมากกว่า 10 ช่วง แต่การรันผลการทดลองจะนานมากยิ่งขึ้น อาจเปลี่ยนมาใช้คอมพิวเตอร์ที่มีคุณลักษณะเฉพาะ (Specification) ที่สูงขึ้นก็ได้

7.3 หากต้องการให้ผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติเป็นไปตามความต้องการของผู้ใช้มากที่สุด ผู้วิจัยก็สามารถเปลี่ยนปัญหาเงื่อนไขบังคับตามความเหมาะสมของปัญหาได้

7.4 ในการคำนึงถึงการได้มาจริงของผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติต้องคำนึงถึงตัวผ้าที่เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย เนื่องจากหากมีผ้าการรับแรงก็จะเปลี่ยนไป ในการทดลองนี้ใช้วัสดุชนิดไททาเนียมซึ่งมีน้ำหนักเบา มีความคงทน แข็งแรง แต่ราคาค่อนข้างแพง หากพบวัสดุที่ดีกว่าก็สามารถเปลี่ยนวัสดุได้

7.5 รูปร่างของโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติจะต้องสวยงาม น่าใช้ และสามารถเข้าได้กับตัวรถเป็นอย่างดี ซึ่งในการทดลองนี้ไม่ได้ออกแบบไว้อย่างละเอียด เนื่องจากต้องการออกแบบเบื้องต้นให้เข้าใจง่ายที่สุด และสามารถทำการศึกษาต่อไปได้โดยสะดวก

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณในความกรุณาเป็นอย่างสูงของพันเอกสุภโชค สัมปัตตะวนิช และผู้ช่วยศาสตราจารย์วิชิต บัวแก้ว ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ให้แนวคิดในการวิเคราะห์ และช่วยแก้ปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้น

ขอขอบพระคุณ พลโทอุดม พรหมโยธิน พลตรีปิยะ หิรัญรัศมี พลตรีรัชพล ประทีปะวณิช รวมทั้งครอบครัวพันธ์กล้า และครอบครัวพรหมโยธิน ที่กรุณาแก้ปัญหาและให้การดูแลเป็นอย่างดีมาโดยตลอด

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ พลโทสมจิตร์ และคุณแม่วาสนา เสนีวงศ์ ณ อยุธยา ที่ให้การเลี้ยงดูอบรมสั่งสอนและเป็นแรงใจให้ดำเนินชีวิตจนถึงทุกวันนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] Agrawal SK., Fabien BC.(1999). Optimization of dynamic systems. Boston: Kluwer Academic Publishers.

[2] Bock HG.(1978). Numerical solution of nonlinear multipoint boundary value problems with application to optimal control. ZAMM. p. 58.

[3] Craig JJ. (1986). Introduction to Robotic: Mechanics and control. Addision-Wesley Publishing Company.

[4] Mark WS.(1989).Robot dynamics and control. University of Illinois at Urbana-Champaign.

[5] Kane TR., Levinson DA.(1985). Dynamics: Theory and applications. McGraw-Hill Inc.

[6] Veeraklaew T. (2000) Extensions of optimization theory and new computational approaches for higher-order dynamic systems [Dissertation]. Delaware: The University of Delaware.

[7] Isuzu MU-7. (Serial online). Available from URL: http:// www.isuzu.com. Accessed February 14,2005.