การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร*

A Performance Comparison of the Multivariate Cumulative Sum Control Charts

Received:	*June*	*22, 2018*
Revised:	*July*	*17, 2019*
Accepted:	*July*	*22, 2019*

สุดารัตน์ นิจสุนกิจ (Sudarat Nidsunkid)**
บุญอ้อม โฉมที (Boonorm Chomtee)***

บทคัดย่อ

แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร (multivariate cumulative sum sontrol shart: MCUSUM) เป็นแผนภูมิควบคุมหลายตัวแปร (multivariate control chart) ชนิดหนึ่งที่นิยมใช้ในการควบคุมคุณภาพเชิงสถิติ ในกรณีที่ตัวแปรหรือลักษณะทางคุณภาพที่สนใจศึกษามีมากกว่าหนึ่งลักษณะ เพื่อตรวจสอบกระบวนการที่ค่าเฉลี่ยของกระบวนการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร 2 วิธี คือ วิธีของ Crosier (1988) วิธีที่ 1 (Crosier I) และวิธีที่ 2 (Crosier II) โดยศึกษาและเปรียบเทียบค่า average run length (ARL) และ standard deviation of run length (SDRL) ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร กำหนดค่าอ้างอิง (reference value: k) เป็น 0.5, 1.0 และ 1.5 จำนวนตัวแปร (p) ที่สนใจศึกษา คือ 2, 3 และ 5 ตัวแปร ในแต่ละกรณีมีการทำซ้ำ 10,000 ครั้ง และใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติในการจำลองและวิเคราะห์ข้อมูล ผลการศึกษาพบว่าแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 2 มีประสิทธิภาพในตรวจจับการออกนอกการควบคุมของกระบวนการได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 1 เมื่อค่าเฉลี่ยมีการเปลี่ยนแปลง

คำสำคัญ : แผนภูมิควบคุมหลายตัวแปร แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร average run length standard deviation of run length

* เพื่อเผยแพร่งานวิจัย

** อาจารย์ ดร. ประจำสาขาวิชาสถิติ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
Lecturer, Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University, fscisrni@ku.ac.th
*** รองช่วยศาสตราจารย์ ดร. ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
Associate Professor Dr., Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University, fsciboc@ku.ac.th

Veridian E-Journal, Science and Technology Silpakorn University
Volume 6 Number 3 May – June 2019 ISSN 2408 - 1248

Abstract

Multivariate cumulative sum (MCUSUM) control chart is one type of the multivariate control charts which is widely used to simultaneously monitor several quality characteristics for detecting the mean changes in manufacturing industries, especially for detecting small changes. In this research, we study the performance of two methods of MCUSUM, such as Crosier I and Crosier II, which are proposed by Crosier (1988). The reference values (k) 0.5, 1.0, and 1.5 and the number of variables are 2, 3, and 5 are specified. Statistical package was used to perform the simulations and to generate the random vectors. Each simulation is replicated 10,000 times to provide accurate results. The average run length (ARL) and standard deviation of run length (SDRL) of MCUSUM control charts are calculated and compared. The numerical results indicate that Crosier II has the good performance for detecting small changes in mean.

Keywords: multivariate control chart, multivariate cumulative sum control chart, average run length, standard deviation of run length.

บทนำ

การควบคุมคุณภาพเชิงสถิติ เป็นกระบวนการที่มีความสำคัญสำหรับองค์กรหรืออุตสาหกรรม เนื่องจากองค์กรหรืออุตสาหกรรมต่างๆ ล้วนต้องการให้ผลิตภัณฑ์ที่ผลิตมีคุณสมบัติเหมาะสมต่อการใช้งานในระดับตามที่คาดหมายไว้ เครื่องมือที่ใช้ในการควบคุมคุณภาพทางสถิติมีหลายชนิด แผนภูมิควบคุมเป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งที่มีประสิทธิภาพในการตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการ และใช้กันอย่างแพร่หลายทางอุตสาหกรรม แผนภูมิควบคุมแต่ละชนิดมีข้อกำหนดเฉพาะของขีดจำกัดควบคุม (control limit)

Lowry และ Montgomery (1995) กล่าวว่าแผนภูมิควบคุมแบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ Phase I และ Phase II ใน Phase I เป็นการใช้แผนภูมิสำหรับการทดสอบย้อนหลัง (retrospective testing) ว่ากระบวนการอยู่ในการควบคุมหรือไม่ โดยมีการสุ่มกลุ่มย่อยและคำนวณค่าสถิติ มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ได้ข้อมูลที่อยู่ในการควบคุมเพื่อกำหนดแผนภูมิควบคุมสำหรับการตรวจสอบในอนาคต ขีดจำกัดการควบคุมที่ได้จาก Phase I จะถูกนำใช้ใน Phase II เพื่อทดสอบว่ากระบวนการนี้ยังคงอยู่ในการควบคุมหรือไม่ เมื่อมีการดึงกลุ่มย่อยในอนาคตในช่วงที่สอง ดังนั้น Phase II เป็นการใช้แผนภูมิควบคุมเพื่อตรวจหาการออกจากกระบวนการควบคุม เมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการแล้ว

เมื่อตัวแปรหรือลักษณะทางคุณภาพที่ต้องการควบคุมมีเพียงตัวแปรเดียว แผนภูมิควบคุมที่เป็นที่รู้จักและใช้นิยมใช้กันทั่วไปคือแผนภูมิควบคุม Shewhart แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอกซ์โพเนนเชียล (exponentially weighted moving average control Chart: EWMA control chart) และแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (cumulative sum control chart: CUSUM control chart)

ในกรณีที่ตัวแปรหรือลักษณะทางคุณภาพที่เราสนใจศึกษามีมากกว่าหนึ่งลักษณะ แผนภูมิควบคุมหลายตัวแปร (multivariate control chart) จะถูกนำมาใช้ในการควบคุมลักษณะทางคุณภาพ แผนภูมิควบคุมหลายตัวแปรที่นิยมใช้ในปัจจุบัน ได้แก่ แผนภูมิควบคุม Shewhart หลายตัวแปร (multivariate Shewhart control chart) ซึ่งถูกคิดค้นโดย Hotelling (1947) แผนภูมิควบคุมชนิดนี้มีความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงในกระบวนการควบคุมที่มีความกว้างมากกว่า 1.5 (Carson & Al-Ghamdi, 2016) แต่มีแนวโน้มที่จะไม่ค่อยมีประสิทธิผลใน Phase II เนื่องจากตรวจจับความเปลี่ยนแปลงของกระบวนการเมื่อกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กหรือปานกลางได้ช้า (Montgomery, 2009) แผนภูมิที่ได้รับการออกแบบเพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการที่มีขนาดเล็กหรือปานกลางคือแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอกซ์โพเนนเชียลหลายตัวแปร (multivariate exponentially weighted moving average control chart: MEWMA control chart) และแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร (multivariate cumulative sum control chart: MCUSUM control chart)

หลักเกณฑ์ที่นิยมใช้ในการพิจารณาลักษณะและวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมคือการพิจารณาจาก ค่า average run length (ARL) และค่า standard deviation of run length (SDRL) ตัวอย่างเช่น สุพีชา (2556) เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมสัดส่วนของเสีย 3 ชนิด โดยพิจารณาจากค่า ARL เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม แผนภูมิควบคุมชนิดใดมีค่า ARL สูงสุด แสดงว่าแผนภูมิควบคุมนั้นมีประสิทธิภาพดีที่สุดในสถานการณ์นั้น และ Sudarat, Borkowski, and Busaba (2017) ศึกษาอิทธิพลของการฝ่าฝืนข้อกำหนดเบื้องต้นของแผนภูมิควบคุม Shewhart หลายตัวแปร (multivariate Shewhart control chart) และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอกซ์โพเนนเชียลหลายตัวแปร (MEWMA Control Chart) โดยใช้ค่า ARL และ SDRL ในการอธิบายลักษณะของแผนภูมิควบคุม

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรด้วยวิธีของ Crosier (1988) วิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 โดยศึกษาและเปรียบเทียบค่า ARL และค่า SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร กำหนดค่าอ้างอิง (reference value: k) เป็น 0.5, 1.0 และ 1.5 จำนวนตัวแปรหรือลักษณะทางคุณภาพที่สนใจศึกษา (p) คือ 2, 3 และ 5 ตัวแปร ในแต่ละกรณีมีการทำซ้ำ 10,000 ครั้งและใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติในการจำลองและวิเคราะห์ข้อมูล

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. **แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร (MCUSUM control charts)**

แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร เป็นแผนภูมิควบคุมชนิดหนึ่งที่ใช้ในกระบวนการการควบคุมคุณภาพเชิงสถิติ เมื่อตัวแปรหรือลักษณะทางคุณภาพที่สนใจศึกษามีมากกว่าหนึ่งลักษณะ ข้อดีของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรคือ สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้เมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย

Veridian E-Journal, Science and Technology Silpakorn University
Volume 6 Number 3 May – June 2019 ISSN 2408 - 1248

ให้ $\boldsymbol{X}_i$, $i=1,2,...$ เป็นเวกเตอร์สุ่มขนาด $p\times 1$ มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรด้วยค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_0$ และความแปรปรวนที่ทราบค่า $\sum$ ($\boldsymbol{\mu}_0$ เป็นเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยขนาด $p\times 1$ และ $\sum$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนขนาด $p\times p$) $\boldsymbol{\mu}_1$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $p\times 1$ แทนเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยที่เปลี่ยนแปลงไป มีนักสถิติหลายท่านได้ศึกษาและคิดค้นแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ดังนี้

Woodall และ Ncube (1985) ได้ศึกษาลักษณะของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมสองตัวแปร ซึ่งประกอบไปด้วย แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมด้านเดียว 2 กระบวนการ และพบว่าแผนภูมิควบคุมสะสมผลรวมสะสมสองตัวแปรซึ่งอาศัยหลักการพื้นฐานองค์ประกอบ (Principle Component) สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการเมื่อค่าเฉลี่ยมีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยหรือปานกลางได้ดีกว่าแผนภูมิ Shewhart

Healy (1987) ศึกษาแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ภายใต้สมมติฐานการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร และได้นำเสนอแผนภูมิควบคุม 2 แบบ คือ แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรสำหรับตรวจจับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย และแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรสำหรับตรวจจับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงของเมทริกซ์ความแปรปรวน การตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการเมื่อเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_0$ เปลี่ยนเป็น $\boldsymbol{\mu}_1$ ทำได้โดยคำนวณค่าสถิติดังนี้

$$S_i = \max\left[\left(S_{i-1}+\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{\mu}_0)-0.5D\right),0\right] \qquad (1)$$

โดยที่ $\boldsymbol{a}' = \left[(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_0)'\sum^{-1}\right]/D$ และ D คือค่า noncentrality parameter โดยที่ $D=\sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_0)'\sum^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_0)}$ กระบวนการนี้จะส่งสัญญาณอยู่นอกเหนือการควบคุม เมื่อ $S_i > H$ เมื่อ H คือขีดจำกัดบน (Upper Control Limit) ของแผนภูมิควบคุม

Healy (1987) แนะนำสามารถใช้หลักการคำนวณ ARL, H และ S_0 สำหรับแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม มาใช้สำหรับแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรได้

สำหรับการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของของกระบวนการเมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนมีการเปลี่ยนแปลง Healy (1987) เสนอแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรเพื่อตรวจหาการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการเมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนเปลี่ยนจาก $\sum$ เป็น $C\sum$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว ดังนี้

สำหรับกลุ่มย่อยที่ i จะได้ค่าสถิติคือ

$$S_i = \max\left[\left(S_{i-1}+\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{\mu}_0)'\sum^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{\mu}_0)-\boldsymbol{K}\right),0\right] \qquad (2)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\mu}$ คือเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย และ $\boldsymbol{K} = p\log(C)\left[C/(C-1)\right]$ กระบวนการนี้จะส่งสัญญาณอยู่นอกเหนือการควบคุม เมื่อ $S_i > H$

Crosier (1988) ได้เสนอแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร 2 แบบ แบบแรกอยู่ในรูปของค่าสถิติ CUSUM of $\boldsymbol{T}$ (COT) ซึ่งอิงตามค่ารากที่สองของค่าสถิติ Hotelling's T^2 ดังนี้

$$S_i = \max\left[\left(S_{i-1}+T_i-k\right),0\right];\ i=1,2,...,\mathrm{n} \qquad (3)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\mu}_0$ คือเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม $\sum$ คือเมทริกซ์ความแปรปรวน ค่า $S_0 \geq 0$, ค่า $k>0$ คือค่าอ้างอิงที่มีอิทธิพลต่อการเกิดความผิดพลาดประเภทที่ 1 (type I error) ถ้า k มีค่าเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ความผิดพลาดประเภทที่ 1 มีค่าลดลง, ค่า $T_i = +\left[(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{\mu}_0)'\sum^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{\mu}_0)\right]^{1/2}$ และ n คือจำนวนกลุ่มย่อยของข้อมูล

แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรแบบ COT จะส่งสัญญาณอยู่นอกเหนือการควบคุมเมื่อ $S_i > H$ เมื่อ H คือขีดจำกัดบนของแผนภูมิควบคุม ค่าของ H สามารถหาได้จากการจำลองข้อมูล

แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรแบบที่สองที่เสนอโดย Crosier (1988) มาจากการแทนที่ค่าสเกลาร์ในแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมด้วยเวกเตอร์ กำหนดให้

$$C_i = \left[\left(\boldsymbol{S}_{i-1} + \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0 \right)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{S}_{i-1} + \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0 \right) \right]^{1/2} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{S}_i = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{if } C_i \le k \\ \left(\boldsymbol{S}_{i-1} + \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0 \right)\left(1 - k/C_i\right) & \text{if } C_i > k \end{cases} \quad (5)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\mu}_0$ คือเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม, $\boldsymbol{\Sigma}$ คือเมทริกซ์ความแปรปรวน, ค่า $\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{0}$ และค่าอ้างอิง $k > 0$

ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรหาได้จาก

$$Y_i = \left[\boldsymbol{S}_i' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{S}_i \right]^{1/2} ; i = 1, 2, \ldots, n \quad (6)$$

เมื่อ n คือจำนวนกลุ่มย่อยของข้อมูล กระบวนการนี้จะส่งสัญญาณอยู่นอกเหนือการควบคุมเมื่อ $Y_i > h$ โดยที่ h คือขีดจำกัดบนของแผนภูมิควบคุม ค่าของ h สามารถหาได้จากการจำลองข้อมูล

Pignatiello และ Runger (1990) ได้เสนอแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร 2 แบบ คือ MC1 และ MC2 ค่าสถิติของแผนภูมิ MC1 สำหรับกลุ่มย่อยที่ i คือ

$$MC1_i = \max\left[\left(\boldsymbol{C}_i' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{C}_i \right)^{1/2} - kn_i, 0 \right]; \; i = 1, 2, \ldots, n \quad (7)$$

โดยที่ $MC1_0 = 0$, $\boldsymbol{C}_i = \sum_{l=i-n_i+1}^{i} (\boldsymbol{X}_l - \mu_0)$ ค่าอ้างอิง $k > 0$ และ n_i คือจำนวนกลุ่มย่อยที่กำหนดไว้ดังนี้

$$n_i = \begin{cases} n_{i-1} + 1 \;, MC1_{i-1} > 0 \\ 1 \qquad , \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

ค่าสถิติของแผนภูมิ MC2 สำหรับกลุ่มย่อยที่ i คือ

$$MC2_i = \max\left[0, \left(MC2_{i-1} + T_i^2 - k \right) \right]; \; i = 1, 2, \ldots, n \quad (9)$$

โดยที่ $MC2_0 = 0$, $T_i^2 = (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)$, $\boldsymbol{\mu}$ คือเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม และ $\boldsymbol{\Sigma}$ คือเมทริกซ์ความแปรปรวน ทั้งนี้ขีดจำกัดบนของแผนภูมิ MC1 และ MC2 หาได้โดยการจำลองข้อมูล

2. **คุณสมบัติของ run length (run length properties)**

สำหรับแผนภูมิควบคุม run length คือตัวแปรสุ่มที่แทนจำนวนกลุ่มย่อยที่ถูกพล๊อตบนแผนภูมิควบคุม (หรือจำนวนแผนภูมิควบคุมที่ถูกพล๊อต) จะกระทั่งพบสัญญาณการออกนอกเหนือการควบคุมเป็นครั้งแรก ค่า average run length (ARL) และค่า standard deviation of run length (SDRL) คือค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนกลุ่มย่อยที่ถูกพล๊อตบนแผนภูมิควบคุม (หรือจำนวนแผนภูมิควบคุมที่ถูกพล๊อต) จะกระทั่งพบสัญญาณการออกนอกเหนือการควบคุมเป็นครั้งแรก (Chakraborti, 2007)

Veridian E-Journal, Science and Technology Silpakorn University
Volume 6 Number 3 May – June 2019 ISSN 2408 - 1248

วิธีการศึกษา

การวิจัยครั้งนี้ทำการศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรสำหรับตรวจจับกระบวนการที่ของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยมีการเปลี่ยนแปลง มีขอบเขตและวิธีการศึกษาดังนี้

1. กำหนดขนาดของกลุ่มย่อยเป็น 1
2. กำหนดจำนวนตัวแปรหรือลักษณะทางคุณภาพที่สนใจศึกษาเป็น 2, 3 และ 5 ตัวแปร
3. กำหนดค่าอ้างอิง (k) = 0.5, 1.0 และ 1.5 ค่าอ้างอิงนี้จะมีอิทธิพลต่อการเกิดความผิดพลาดประเภทที่ 1 (type I error) ถ้าค่าอ้างอิงเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ความผิดพลาดประเภทที่ 1 มีค่าลดลง
4. ค่าสถิติและขีดจำกัดบน (h) ของของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร เป็นดังนี้

4.1 แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 1 ค่าสถิติดังดังแสดงในสมการที่ (3) ซึ่งจะส่งสัญญาณอยู่นอกเหนือการควบคุมเมื่อ $S_i > H$ โดยค่า H ได้จากการจำลองข้อมูล ตารางที่ 1 แสดงค่า H เมื่อกำหนด ARL ขณะกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุมเป็น 200

ตารางที่ 1 ค่าขีดจำกัดบน (H) ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 1 เมื่อ ARL = 200

	ค่าอ้างอิง (k)		
	0.5	1.0	1.5
2 ตัวแปร	150.05	50.63	3.16
3 ตัวแปร	218.38	118.75	20.65
5 ตัวแปร	324.57	225.00	125.00

4.2 แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 2 ค่าสถิติดังดังแสดงในสมการที่ (4)– (6) ซึ่งจะส่งสัญญาณอยู่นอกเหนือการควบคุมเมื่อ $Y_i > h$ โดยค่า h ได้จากการจำลองข้อมูล ตารางที่ 2 แสดงค่า h เมื่อกำหนด ARL ขณะกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุมเป็น 200

ตารางที่ 2 ค่าขีดจำกัดบน (h) ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 2 เมื่อ ARL = 200

	ค่าอ้างอิง (k)		
	0.5	1.0	1.5
2 ตัวแปร	5.49	3.01	1.93
3 ตัวแปร	6.88	3.77	2.42
5 ตัวแปร	9.38	5.20	3.36

5. เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม กำหนดเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยเป็น $\boldsymbol{\mu}$ = (5,5), (5,5,5) and (5,5,5,5) และเมทริกซ์ความแปรปรวน $\sum$ เป็น diag (5,5), diag (5,5,5) and diag (5,5,5,5) (เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมเป็น 5) สำหรับ 2, 3 และ 5 ตัวแปร ตามลำดับ

6. กำหนดให้ค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลง ดังนี้

- (1, 0), (2.25, 0), (2.5, 2.5), (3, 3.5) และ (4.74, 4.75) สำหรับ 2 ตัวแปร
- (1, 0, 0), (1.5, 1.75, 0), (2, 2.75, 0), (2, 3, 3) และ (4, 4, 4) สำหรับ 3 ตัวแปร
- (1, 0, 0, 0, 0), (1.5, 1.75, 0, 0, 0), (2, 2, 2, 0, 0), (2, 2, 2.5, 2.5, 0) และ (3, 3, 3, 3, 3) สำหรับ 5 ตัวแปร

7. ในแต่ละสถานการณ์กำหนดมีการทำซ้ำ 10,000 ครั้ง คำนวณค่า ARLและ SDRLเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร

ผลการศึกษา

จากการจำลองข้อมูลและสร้างแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร เมื่อจำนวนตัวแปรที่สนใจศึกษาเป็น 2, 3 และ 5 ตัวแปร จากการทำซ้ำจำนวน 10,000 ครั้ง ได้ข้อมูลค่า ARL และ SDRL ดังตารางที่ 3–8

ตารางที่ 3 ค่า ARL และ SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 1 เมื่อ จำนวนตัวแปร = 2

		Shift in mean					
		(0, 0)	(1, 0)	(2.25, 0)	(2.5, 2.5)	(3, 3.5)	(4.75, 4.75)
ARL	k=0.5	199.94	185.04	143.48	105.29	82.94	56.64
	k=1.0	199.32	160.67	92.67	54.96	38.91	23.84
	k=1.5	200.46	102.33	22.01	7.82	4.63	2.54
SDRL	k=0.5	12.25	11.37	8.74	6.25	4.59	2.71
	k=1.0	36.06	27.34	13.57	6.92	4.34	2.18
	k=1.5	198.53	96.00	17.61	4.55	2.21	0.89

ตารางที่ 4 ค่า ARL และ SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 2 เมื่อ จำนวนตัวแปร = 2

		Shift in mean					
		(0, 0)	(1, 0)	(2.25, 0)	(2.5, 2.5)	(3, 3.5)	(4.75, 4.75)
ARL	k=0.5	200.57	35.59	9.77	5.42	3.97	2.70
	k=1.0	199.50	60.48	11.78	4.89	3.22	2.02
	k=1.5	200.05	89.90	19.38	6.10	3.39	1.79
SDRL	k=0.5	192.96	27.96	4.71	1.89	1.18	0.67
	k=1.0	195.68	58.03	8.91	2.63	1.37	0.69
	k=1.5	199.79	89.84	17.79	4.54	2.06	0.80

Veridian E-Journal, Science and Technology Silpakorn University
Volume 6 Number 3 May – June 2019 ISSN 2408 - 1248

ตารางที่ 5 ค่า ARL และ SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 1 เมื่อ จำนวนตัวแปร = 3

		Shift in mean					
		(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1.50, 1.75, 0)	(2, 2.75, 0)	(2, 3, 3)	(4, 4, 4)
ARL	k=0.5	199.86	190.69	160.71	133.08	106.07	75.36
	k=1.0	200.21	184.10	138.24	103.95	76.26	49.62
	k=1.5	199.82	134.32	57.38	32.65	20.06	11.39
SDRL	k=0.5	8.75	8.38	7.16	5.78	4.45	2.83
	k=1.0	16.00	14.55	10.21	7.26	4.95	2.75
	k=1.5	89.02	50.50	15.76	7.23	3.65	1.66

ตารางที่ 6 ค่า ARL และ SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 2 เมื่อ จำนวนตัวแปร = 3

		Shift in mean					
		(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1.50, 1.75, 0)	(2, 2.75, 0)	(2, 3, 3)	(4, 4, 4)
ARL	k=0.5	200.71	37.81	10.76	6.60	4.58	3.09
	k=1.0	199.41	60.85	11.80	5.70	3.57	2.24
	k=1.5	199.96	91.94	17.77	6.84	3.49	1.91
SDRL	k=0.5	190.73	27.85	4.58	2.20	1.22	0.68
	k=1.0	198.37	56.72	8.18	2.90	1.38	0.66
	k=1.5	196.51	89.93	15.51	4.85	1.90	0.76

ตารางที่ 7 ค่า ARL และ SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 1 เมื่อ จำนวนตัวแปร = 5

		Shift in mean					
		(0,0,0,0,0)	(1,0,0,0,0)	(1.50,1.75,0,0,0)	(2,2,2,0,0)	(2,2,2.5,2.5,0)	(3,3,3,3,3)
ARL	k=0.5	200.02	195.00	176.32	155.15	136.07	104.31
	k=1.0	200.20	193.03	167.96	141.22	119.33	86.15
	k=1.5	200.00	187.53	148.56	114.48	90.12	59.31
SDRL	k=0.5	5.98	5.93	5.37	4.78	4.17	2.99
	k=1.0	8.55	8.27	7.22	5.95	4.80	3.22
	k=1.5	15.55	14.15	10.76	7.78	5.72	3.27

ตารางที่ 8 ค่า ARL และ SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 2 เมื่อ จำนวนตัวแปร = 5

		Shift in mean					
		(0,0,0,0,0)	(1,0,0,0,0)	(1.50,1.75,0,0,0)	(2,2,2,0,0)	(2,2,2.5,2.5,0)	(3,3,3,3,3)
ARL	k=0.5	199.67	41.24	12.97	8.06	6.01	4.03
	k=1.0	201.45	62.99	12.60	6.45	4.47	2.81
	k=1.5	200.98	91.69	17.70	6.87	4.21	2.37
SDRL	k=0.5	183.61	27.49	4.87	2.28	1.46	0.78
	k=1.0	193.97	57.59	7.61	2.76	1.54	0.74
	k=1.5	197.94	88.40	14.66	4.21	2.00	0.81

จากตารางที่ 3–8 พบว่า เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 1 และ 2 มีค่าใกล้เคียงกับ 200 ในทุกกรณี และเมื่อกระบวนการออกนอกเหนือการควบคุมหรือเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีค่าเฉลี่ยเปลี่ยนแปลงไป ค่า ARL จะลดลง คือเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นมาก ค่า ARL จะยิ่งลดลงมากขึ้น

เมื่อจำนวนตัวแปร เป็น 2 และ 3 ตัวแปร จากตารางที่ 3 และ 5 ซึ่งแสดงค่า ARL และ SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 1 พบว่า เมื่อ k เพิ่มขึ้น ค่า ARL มีค่าลดลง ส่วนค่า SDRL จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ k เพิ่มขึ้น ในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการเป็น (1, 0), (2.25, 0), (1, 0, 0), (1.50, 1.75, 0) และค่า SDRL จะมีค่าลดลงเมื่อ k เพิ่มขึ้น ในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีค่าเป็น (3, 3.5), (4.75, 4.75), (4, 4, 4) ตามลำดับ

เมื่อจำนวนตัวแปรเป็น 5 ตัวแปร จากตารางที่ 7 แสดงค่า ARL และ SDRL ของ MCUSUM จาก Crosier วิธีที่ 1 พบว่า เมื่อ k เพิ่มขึ้น ค่า ARL มีค่าลดลง ส่วนค่า SDRL จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ k เพิ่มขึ้น เมื่อการค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลง

จากตารางที่ 4, 6 และ 8 แสดงค่า ARL และ SDRL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 2 พบว่า ค่า ARL จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ k มากขึ้น ในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการเป็น (1, 0), (2.25, 0), (1, 0, 0), (1.50, 1.75, 0), (1, 0, 0, 0, 0) ส่วนค่า ARL จะมีค่าลดลง เมื่อ k มากขึ้น ในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการเป็น (4.75, 4.75), (2, 3, 3), (4, 4, 4), (2, 2, 2.5, 2.5, 0) และ (3, 3, 3, 3, 3) ตามลำดับ

เมื่อเปรียบเทียบค่า ARL ที่ได้จากแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 1 และ 2 พบว่าค่า ARL ที่ได้จากวิธี Crosier วิธีที่ 1 มีค่ามากกว่า Crosier วิธีที่ 2 ทุกกรณีแสดงให้เห็นว่าแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 2 สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้เร็วกว่าเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการเปลี่ยนแปลงไป

จากตารางที่ 3–8 พบว่า ค่า SDRL มีลักษณะการเพิ่มขึ้นหรือลดลงไปในทิศทางเดียวกันกับค่า ARL และในทุกกรณี และค่า SDRL ของ Crosier วิธีที่ 2 จะสูงกว่า Crosier วิธีที่ 1 แสดงให้เห็นว่าค่า Run Length ขอ’แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปร ของ Crosier วิธีที่ 2 มีการกระจายมากกว่า ของ Crosier วิธีที่ 1

สรุปผล

การศึกษาวิจัยเรื่อง การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรด้วยวิธีของ Crosier (1988) วิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 พบว่าค่า ARL ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 1 มีค่ามากกว่า วิธีที่ 2 ทุกกรณีแสดงให้เห็นแผนภูมิควบคุมสะสมหลายตัวแปรของ Crosier วิธีที่ 2 สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ไวกว่า Crosier วิธีที่ 1 เมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการเปลี่ยนแปลงไป

References

Carson, P.K. & Al–Ghamdi, K.S. (2016). Control Charts for Monitoring Test Method Performance. ASTM Standardization News, 38–39.

Chakraborti, S. (2007). Run Length Distribution and Percentiles: The Shewhart $\overline{X}$ Chart with Unknown Parameters. Quality Engineering, 19(2), 119–127.

Crosier, R.B. (1988). Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality–Control Schemes, Technometrics, 30(3), 291–303.

Healy, J.D. (1987). A note on multivariate CUSUM procedures. Technometrics, 29(4), 409–412.

Hotelling, H. (1947). Multivariate Quality Control–Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights. Techniques of Statistical Analysis, Eisenhart C., Hastay M.W. & Wallis W. A., (eds.). New York: McGraw–Hill, 111–184.

Lowry, C.A., & Montgomery, D.C. (1995). A Review of Multivariate Control Charts. IIE Transactions, 27(6), 800–810.

Montgomery, D.C. (2009). Introduction to Statistical Quality Control (6th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Nidsunkid, S., Borkowski, J.J. & Budsaba, K. (2017). The effects of violations of the multivariate normality assumption in multivariate Shewhart and MEWMA control charts. Quality and Reliability Engineering International, 33(8), 2563–2576.

Pignatiello, J.J., & Runger, G.C. (1990). Comparisons of Multivariate CUSUM Charts. Journal of Quality Technology, 22(3), 173–186.

Rungruang, S. (2013). Kān̄prīāpthīāpprasitthiphāp̄khoṇ̄gphǣnphūm̄khūāpkhumsatsūān̄khoṇ̄gsīa [An Efficiency Comparison of Fraction Nonconforming Control Charts], Veridian E–Journal, Silpakorn University 6, 3 (September–December): 860-876.

Woodall, W.H. & Ncube, M.M. (1985). Multivariate CUSUM quality control procedures. Technometrics, 27(3), 285–292.