

การประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ของการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1*

Confidence interval estimation of parameters for type-I censored extreme value distribution

จิราภรณ์ สิงห์พงษ์ (Jiraporn Singpong)**

มณฑิรา ดวงสาพล (Monthira Duangsaphon)**

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาข้อมูลระยะเวลาการใช้งานที่มีการแจกแจงค่าสุดขีดและเป็นข้อมูลที่
ถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 รวมถึงการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และนำตัวประมาณภาวะ
น่าจะเป็นสูงสุด มาสร้างช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ โดยใช้เมทริกซ์ข้อสนเทศค่าสังเกตของพิชเชอร์ในการสร้าง
ช่วงความเชื่อมั่นซึ่งอาศัยวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ และสร้างช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีบูตสเตรปแบบใช้พารามิเตอร์ 2 วิธี
ที่ต่างกัน ได้แก่ วิธีบูตสเตรปพีและวิธีบูตสเตรปที นอกจากนั้นยังใช้วิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น และเปรียบเทียบ
ประสิทธิภาพจากทั้ง 4 วิธี ด้วยค่าความน่าจะเป็นคัมรวมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นจากการจำลอง
ข้อมูล รวมถึงนำวิธีที่น่าเสนอมาประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์โดยใช้ข้อมูลจริง

คำสำคัญ: การประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด, เชิงเส้นกำกับปกติ, บูตสเตรปพี, บูตสเตรปที, อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

* เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ของการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อข้อมูลถูก
เซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ภายใต้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด จากทั้ง 4 วิธี ข้างต้น

** สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
เบอร์โทรศัพท์ 02-564-4440-59 ต่อ 2101-3 กด 315 E-mail: monthira.stat@gmail.com

Department of Mathematics and Statistics, Thammasat University, Call: 02-564-4440-59 ต่อ 2101-3 กด 315
E-mail: monthira.stat@gmail.com

Abstract

The objective of this research is to study the lifetime data, which are the Extreme value distribution based on type-I censored samples. The maximum likelihood estimators (MLEs) are considered. The confidence interval estimation under the MLEs is constructed. The observed Fisher information matrix is used to construct the asymptotic confidence intervals. The confidence intervals are constructed using the two different parametric bootstrap methods, the bootstrap-p and the bootstrap-t. Moreover, we propose the likelihood ratio method. A simulation study was conducted to compare the appraise performance of four different interval estimation method by coverage probability and expected lengths. Finally, all methods are illustrated through a real data set.

Keyword: Maximum likelihood estimation, Asymptotic normality, Bootstrap-p, Bootstrap-t, Likelihood ratio

1. บทนำ

การศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับระยะเวลาการใช้งาน (Lifetime) พบได้ในงานวิจัยด้านต่างๆ ได้แก่ ด้านการแพทย์และสาธารณสุข ด้านธุรกิจประกันภัย ด้านอุตสาหกรรม เป็นต้น ซึ่งลักษณะของข้อมูลระยะเวลาดังกล่าวสามารถจัดให้อยู่ในรูปของการแจกแจงได้หลายรูปแบบ เช่น การแจกแจงไวบูล การแจกแจงเลขชี้กำลัง และการแจกแจงค่าสุดขีด เป็นต้น

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจศึกษาข้อมูลระยะเวลามีการแจกแจงค่าสุดขีด (Extreme Value Distribution) ซึ่งถูกพัฒนามาจากการแจกแจงไวบูล นั่นคือ ลอการิทึมของการแจกแจงไวบูลเท่ากับการแจกแจงค่าสุดขีด (Lawless, 2011) กำหนดให้ T เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงค่าสุดขีด ซึ่งมีพารามิเตอร์ μ และ σ โดยที่ μ เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (Location Parameter) และ σ เป็นพารามิเตอร์แสดงขนาด (Scale Parameter) จะเขียนแทนด้วย $T \sim EVD(\mu, \sigma)$ จะได้ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function: PDF) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function : CDF) ของการแจกแจงค่าสุดขีด มีรูปแบบตามลำดับดังนี้

$$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{t - \mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{t - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad -\infty < t < \infty \quad (1)$$

$$\text{และ} \quad F(t; \mu, \sigma) = 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{t - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad -\infty < t < \infty \quad (2) \text{ เมื่อ}$$

$$-\infty < \mu < \infty \text{ และ } \sigma > 0$$

และฟังก์ชันการอยู่รอด (Survival Function) มีรูปแบบดังนี้

$$S(t; \mu, \sigma) = \exp \left[- \exp \left(\frac{t - \mu}{\sigma} \right) \right] \quad (3)$$

ในการศึกษาเกี่ยวกับระยะเวลาใช้งานจากการทดลองทั้งหมดจำนวน n หน่วย หากหน่วยทดลองมีจำนวนมาก อาจเป็นไปได้ว่าผู้ทดลองจะเก็บข้อมูลจำนวนการเกิดเหตุการณ์ที่ล้มเหลวครบทุกหน่วยตัวอย่าง อาจจะ

ต้องใช้ระยะเวลานานในการรอให้เกิดความล้มเหลวและมีค่าใช้จ่ายที่สูงในการเก็บรวบรวมข้อมูล ดังนั้นทางเลือกหนึ่งที่จะสามารถใช้ข้อมูลทั้ง n หน่วย มาวิเคราะห์เพื่อสร้างตัวแบบที่เหมาะสมและทดสอบความน่าเชื่อถือ นั่นคือข้อมูลบางส่วนจะเป็นข้อมูลที่ถูกระงับ (Censored Data) ซึ่งข้อมูลที่ได้จะมี 2 กลุ่ม คือ กลุ่มข้อมูลที่ไม่ถูกระงับ โดยที่ผู้ทดลองจะเก็บข้อมูลระยะเวลาใช้งานได้จริง และกลุ่มข้อมูลที่ถูกกระงับ โดยที่ผู้ทดลองจะไม่สามารถเก็บข้อมูลระยะเวลาใช้งานได้จริง ประเภทของการกระงับข้อมูลถูกแบ่งเป็นหลายประเภทแต่ที่พบบ่อยในงานวิจัย ได้แก่ การกระงับประเภทที่ 1 (Type I Censoring) ซึ่งจะกำหนดเวลาที่สิ้นสุดการเก็บข้อมูลไว้ล่วงหน้า (Fixed Censoring Time) และการกระงับประเภทที่ 2 (Type II Censoring) โดยจะกำหนดจำนวนค่าสังเกตที่จะเกิดความล้มเหลวไว้ล่วงหน้า (Fixed Number of Uncensored Failure) เมื่อพิจารณาการกระงับประเภทที่ 2 อาจจะเป็นไปได้ว่าผู้ทดลองยังคงต้องใช้ระยะเวลารอนานกว่าข้อมูลจะครบตามจำนวนที่กำหนดข้อมูลที่ถูกระงับหรือไม่ถูกระงับไว้ ดังนั้นผู้ทดลองอาจจะเลือกพิจารณาการกระงับข้อมูลประเภทที่ 1 เพื่อให้ได้ข้อมูลมาวิเคราะห์ได้ง่ายขึ้นและเพื่อนำมาวิเคราะห์ วางแผนและปรับปรุงจนนำไปสู่การตัดสินใจที่ถูกต้อง

การสร้างตัวแบบที่เหมาะสมในแต่ละการแจกแจง ต้องอาศัยการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ระบุในการแจกแจงนั้นๆ การประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญของการอนุมานเชิงสถิติ (Statistical Inference) เนื่องจากเป็นระเบียบวิธีทางสถิติที่ดำเนินการเพื่อหาข้อสรุปเกี่ยวกับประชากร การประมาณค่าพารามิเตอร์ประกอบด้วยวิธีการประมาณแบบจุดและการประมาณแบบช่วง

มีหลายๆ งานวิจัยที่ได้ประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ภายใต้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงต่างๆ ภายใต้ข้อมูลที่สมบูรณ์และข้อมูลที่ถูกระงับ Lin และ Ke (2013) ได้เสนอการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ของการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อข้อมูลถูกระงับทางขวาประเภทที่ 2 ด้วยวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ วิธีบูตสแตรป และวิธีบูตสแตรปที่ จากการศึกษพบว่าในทุกสถานการณ์ที่ผู้วิจัยศึกษาวิธีบูตสแตรปที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด Kundu และ Gupta (2006) ได้เสนอการแจกแจงไวบูล โดยประมาณค่าด้วยวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ วิธีบูตสแตรป และวิธีบูตสแตรปที่ จากการศึกษพบว่าวิธีบูตสแตรป และวิธีบูตสแตรปที่ให้ประสิทธิภาพดีกว่าวิธีอื่นๆ เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นวิธีเชิงเส้นกำกับปกติให้ประสิทธิภาพดีกว่าวิธีอื่นๆ Gasmi และ Berzig (2011) ได้เสนอการแจกแจงไวบูลแบบปรับปรุง เมื่อข้อมูลถูกระงับประเภทที่ 1 โดยประมาณค่าด้วยวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ และวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น จากการศึกษพบว่าวิธีเชิงเส้นกำกับปกติและวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นจะมีประสิทธิภาพเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ Shen และ Yang (2015) ได้เสนอการเกิดความเอนเอียงสำหรับรูปแบบทั่วไปของการแจกแจงไวบูล เมื่อข้อมูลสมบูรณ์ ข้อมูลถูกระงับประเภทที่ 1 และข้อมูลถูกระงับประเภทที่ 2 โดยประมาณค่าด้วยวิธีบูตสแตรป จากการศึกษพบว่าวิธีบูตสแตรปมีประสิทธิภาพ จากการทบทวนวรรณกรรมข้างต้นทำให้พบว่างานวิจัยนี้มีความแตกต่างจากงานวิจัยอื่นโดยการนำวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ วิธีบูตสแตรป วิธีบูตสแตรป และวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นมาประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อข้อมูลถูกระงับประเภทที่ 1

ดังนั้นในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ของการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อข้อมูลถูกระงับประเภทที่ 1 จากทั้ง 4 วิธีข้างต้นที่สร้างจากตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยจะแสดงผลลัพธ์จากการจำลองสถานการณ์และประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงเพื่อหาข้อสรุปและประมวลผล

2.วิธีการวิจัย

การวิจัยนี้เป็นการศึกษาการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ของการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ภายใต้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดโดยศึกษาทั้งหมด 4 วิธี และวัดประสิทธิภาพด้วยความน่าจะเป็นคัมรวมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น โดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo Technique) บนโปรแกรม R เวอร์ชัน 3.3.2 ในการประมวลผล ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยตามลำดับดังนี้

2.1 กำหนดขนาดตัวอย่างที่ศึกษา คือ 25 50 100 และ 150

2.2 กำหนดเวลาศึกษาไว้ล่วงหน้า คือควอนไทล์ที่ 0.5 และ 0.7 ของข้อมูล

2.3 ข้อมูลมีการแจกแจงค่าสุดขีดที่มีพารามิเตอร์ $\mu=10$ และ $\sigma=1$

2.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1

การถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 เป็นอีกหนึ่งรูปแบบของข้อมูลที่ถูกเซ็นเซอร์ ซึ่งนิยมใช้ทดสอบความน่าเชื่อถือและทดสอบระยะเวลาการใช้งาน โดยอธิบายได้ดังนี้

ให้ T เป็นเวลาที่ผู้ทดลองกำหนดไว้ล่วงหน้าและผู้ทดลองทำการทดลองทั้งหมด n หน่วย ให้ T_i เป็นตัวแปรสุ่มแทนระยะเวลาใช้งานของหน่วยทดลองที่ i เมื่อ $i=1,2,...,n$ ซึ่งมีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระกัน (Identically and Independent Distributed: iid) จากนั้นจะทำการเก็บค่าสังเกต T_i เมื่อ $T_i \leq T$ ถ้ามีจำนวนค่าสังเกตจำนวน p หน่วย ที่สามารถเก็บได้จะเรียกว่าเป็นข้อมูลที่ไม่ถูกเซ็นเซอร์ ส่วนข้อมูลที่เหลือ จะเรียกว่าเป็นข้อมูลที่ถูกเซ็นเซอร์ ซึ่งจะประมาณค่าสังเกตเหล่านี้ด้วยค่า T

กำหนดให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่ม โดยที่

$$X_i = \begin{cases} T_i & ; T_i \leq T \\ T & ; T_i > T \end{cases}$$

เมื่อ $i=1,2,3,...,n$ จะได้ว่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) จากค่าสังเกต n ค่า ของการแจกแจงค่าสุดขีดเมื่อข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 มีรูปแบบดังนี้ (Klein & Moeschberger, 2005)

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma; \underline{x}) &= \left\{ \prod_{i=1}^p f(x_i; \mu, \sigma) \right\} (S(T; \mu, \sigma))^{n-p} \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right\} \left(\exp\left(-\exp\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right)\right) \right)^{n-p} \\ &= \left\{ \frac{1}{\sigma^p} \prod_{i=1}^p \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right\} \left(\exp\left(-\exp\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right)\right) \right)^{n-p} \quad (4) \end{aligned}$$

ดังนั้น ล็อกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma; \underline{x}) &= \ln \left\{ \frac{1}{\sigma^p} \prod_{i=1}^p \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right\} \left(\exp\left(-\exp\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right)\right) \right)^{n-p} \\ &= -p \ln \sigma + \sum_{i=1}^p \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right) - (n-p) \exp\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right) \quad (5) \end{aligned}$$

ผู้วิจัยประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยใช้ฟังก์ชัน nlminb บนโปรแกรม R เวอร์ชัน 3.3.2 ซึ่งจะหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่ต้องการศึกษา ดังนั้นผู้วิจัยจะต้องหาค่าต่ำสุด μ และ σ กำหนดโดย $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ ซึ่งเรียกว่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ μ และ σ ตามลำดับ

2.5 การประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่มีการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นทั้งหมด 4 วิธี ภายใต้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ได้แก่ วิธีเชิงเส้นกำกับปกติ วิธีบูตสเตรปปีและวิธีบูตสเตรปที ซึ่งเป็น วิธีบูตสเตรปแบบใช้พารามิเตอร์ (Efron, 1982) และวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น โดยมีรายละเอียด ดังนี้

2.5.1 วิธีเชิงเส้นกำกับปกติ (Asymptotic Normality Method)

จากหัวข้อที่ 2.4 ผู้วิจัยไม่สามารถเขียนตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ ได้ในรูปชัดเจน จึงไม่สามารถหาการแจกแจงที่แท้จริงของตัวประมาณได้ ดังนั้นในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ μ และ σ จะพิจารณาจากการแจกแจงเชิงเส้นกำกับของ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ ซึ่งเรียกว่าวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ (Pawitan, 2001) โดยจะอาศัยเมทริกซ์ข้อสนเทศค่าสังเกตของฟิชเชอร์ (Observed Fisher Information Matrix) เพื่อประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$

กำหนดให้ $I(\mu, \sigma)$ แทนเมทริกซ์ข้อสนเทศค่าสังเกตของฟิชเชอร์ของพารามิเตอร์ μ และ σ ที่มีขนาด 2×2 ซึ่งมีสมาชิกเป็นค่าลบของอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับพารามิเตอร์ μ และ σ ของ $L(\mu, \sigma; \underline{x})$ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$I(\mu, \sigma) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 L(\mu, \sigma; \underline{x})}{\partial \mu^2} & -\frac{\partial^2 L(\mu, \sigma; \underline{x})}{\partial \mu \partial \sigma} \\ -\frac{\partial^2 L(\mu, \sigma; \underline{x})}{\partial \sigma \partial \mu} & -\frac{\partial^2 L(\mu, \sigma; \underline{x})}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

โดยที่

$$\frac{\partial}{\partial \mu} L(\mu, \sigma; \underline{x}) = -\frac{p}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^p \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) + \frac{n-p}{\sigma} \exp\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} L(\mu, \sigma; \underline{x}) = -\frac{p}{\sigma} - \sum_{i=1}^p \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) + \sum_{i=1}^p \left[\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right] + (n-p) \left(\frac{T-\mu}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 L(\mu, \sigma; \underline{x})}{\partial \mu^2} = \left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) \left[\sum_{i=1}^p \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) + (n-p) \exp\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)\right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 L(\mu, \sigma; \underline{x})}{\partial \mu \partial \sigma} = \frac{\partial^2 L(\mu, \sigma; \underline{x})}{\partial \sigma \partial \mu} \quad (10)$$

$$= \frac{p}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^p \left[\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) \left(\exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} + 1\right) \right] - \left(\frac{n-p}{\sigma^2}\right) \left[\exp\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right) \left(\frac{T-\mu}{\sigma} + 1\right)\right] \quad (11)$$

และ

$$\frac{\partial^2 L(\mu, \sigma; \underline{x})}{\partial \sigma^2} = \frac{p}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^p (x_i - \mu) - \sum_{i=1}^p \left[\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^3}\right) \exp\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} + 2\right) \right] - (n-p) \left[\left(\frac{T-\mu}{\sigma^3}\right) \exp\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right) \left(\frac{T-\mu}{\sigma} + 2\right) \right] \quad (12)$$

การแจกแจงร่วมเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Joint Distribution) ของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ ประมาณได้ด้วยการแจกแจงปกติสองตัวแปร (Approximately Bivariate Normal Distribution) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \right)$$

เมื่อ $\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix}$ คือเวกเตอร์ของค่าเฉลี่ย และ $\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ คือเมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ เนื่องจากเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ข้อสันเทศค่าสังเกตของฟิชเชอร์ สามารถนำไปใช้ประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดได้ เมื่อขนาดตัวอย่างใกล้เคียงกัน ดังนั้นในงานวิจัยนี้สามารถประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดได้ ดังนี้ $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = I^{-1}(\mu, \sigma)$

เพื่อที่จะหาค่าประมาณ V เราจะแทนค่าพารามิเตอร์ μ และ σ ด้วยตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ ตามลำดับและกำหนดให้เป็น

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{v}_{11} & \hat{v}_{12} \\ \hat{v}_{21} & \hat{v}_{22} \end{pmatrix}$$

จากทฤษฎีขนาดตัวอย่างใกล้เคียงกันของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะได้อะไรจากการแจกแจงของ $(\hat{\mu} - \mu) / \sqrt{\hat{v}_{11}}$ และ $(\hat{\sigma} - \sigma) / \sqrt{\hat{v}_{22}}$ สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐาน (Miller Jr, 2011) ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ μ มีรูปแบบดังนี้

$$\left(\hat{\mu} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{v}_{11}}, \hat{\mu} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{v}_{11}} \right) \quad (13)$$

และในทำนองเดียวกันช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ σ มีรูปแบบดังนี้

$$\left(\hat{\sigma} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{v}_{22}}, \hat{\sigma} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{v}_{22}} \right) \quad (14)$$

เมื่อ $Z_{1-\alpha/2}$ คือค่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha/2$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน $\hat{v}_{11}$ คือค่าประมาณความแปรปรวนของตัวประมาณ $\hat{\mu}$ และ $\hat{v}_{22}$ คือค่าประมาณความแปรปรวนของตัวประมาณ $\hat{\sigma}$

2.5.2 วิธีบูตสแตรปปี (Bootstrap-p Method)

การสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบบูตสแตรปปี (Hall, 1988) สำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จำลอง $T_i \sim EVD(\mu, \sigma)$, $i=1,2,\dots,n$

กำหนดให้ T เป็นเวลาที่กำหนดไว้ล่วงหน้าซึ่งเท่ากับควอนไทล์ที่ r ของข้อมูล T_i , $i=1,2,\dots,n$

$$X_i = \begin{cases} T_i & ; T_i \leq T \\ T & ; T_i > T \end{cases}$$

จะได้ตัวอย่างสุ่มชุดใหม่คือ X_i , $i=1,2,\dots,n$

คำนวณตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดรอบบูตสเตรปเท่ากับ B_1

ให้ p คือ จำนวนข้อมูลที่ไม่ถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ซึ่งมีค่าเท่ากับจำนวนข้อมูลทั้งหมดที่มี คำน้อยกว่าหรือเท่ากับ T จากข้อมูลในขั้นตอนที่ 1

จำลอง $T_{ji}^* \sim EVD(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$, $j=1,2,\dots,B_1, i=1,2,\dots,n$

กำหนดให้ T เป็นเวลาที่กำหนดไว้ล่วงหน้าซึ่งเท่ากับควอนไทล์ที่ $\frac{p}{n}$

กำหนดให้ $X_{ji}^* = \begin{cases} T_{ji}^* & ; T_{ji}^* \leq T \\ T & ; T_{ji}^* > T \end{cases}$

จะได้ตัวอย่างสุ่มชุดใหม่คือ X_{ji}^* , $j=1,2,\dots,B_1$ ซึ่งเรียกว่าตัวอย่างสุ่มบูตสเตรปที่ j

คำนวณตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}_j^*$ และ $\hat{\sigma}_j^*$, $j=1,2,\dots,B_1$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีบูตสเตรปพี สำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ

ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ μ มีรูปแบบดังนี้

$$\left(\hat{\mu}_{B_1}^{*(\alpha/2)}, \hat{\mu}_{B_1}^{*(1-\alpha/2)} \right) \quad (15)$$

โดยที่ $\hat{\mu}_{B_1}^{*(\alpha/2)}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $(\alpha/2)$ ของตัวประมาณ $\hat{\mu}_j^*$, $j=1,2,\dots,B_1$

และ $\hat{\mu}_{B_1}^{*(1-\alpha/2)}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $(1-\alpha/2)$ ของตัวประมาณ $\hat{\mu}_j^*$, $j=1,2,\dots,B_1$

และช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ σ มีรูปแบบดังนี้

$$\left(\hat{\sigma}_{B_1}^{*(\alpha/2)}, \hat{\sigma}_{B_1}^{*(1-\alpha/2)} \right) \quad (16)$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_{B_1}^{*(\alpha/2)}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $(\alpha/2)$ ของตัวประมาณ $\hat{\sigma}_j^*$, $j=1,2,\dots,B_1$

และ $\hat{\sigma}_{B_1}^{*(1-\alpha/2)}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $(1-\alpha/2)$ ของตัวประมาณ $\hat{\sigma}_j^*$, $j=1,2,\dots,B_1$

2.5.3 วิธีบูตสเตรปที (Bootstrap-t Method)

การสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบบูตสเตรปที (Hall, 1988) สำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จำลอง $T_i \sim EVD(\mu, \sigma)$, $i=1,2,\dots,n$

กำหนดให้ T เป็นเวลาที่กำหนดไว้ล่วงหน้าซึ่งเท่ากับควอนไทล์ที่ r ของข้อมูล $T_i, i=1,2,\dots,n$

กำหนดให้ $X_i = \begin{cases} T_i & ; T_i \leq T \\ T & ; T_i > T \end{cases}$

จะได้ตัวอย่างสุ่มชุดใหม่คือ $X_i, i=1,2,\dots,n$

คำนวณตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$

ขั้นตอนที่ 2 ให้ p คือ จำนวนข้อมูลที่ไม่ถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ซึ่งมีค่าเท่ากับจำนวนข้อมูลทั้งหมดที่มี คำน้อยกว่าหรือเท่ากับ T จากข้อมูลในขั้นตอนที่ 1

จำลอง $T_i^* \sim EVD(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$, $i=1,2,\dots,n$

กำหนดให้ T เป็นเวลาที่กำหนดไว้ล่วงหน้าซึ่งเท่ากับควอนไทล์ที่ $\frac{p}{n}$

$$\text{กำหนดให้} \quad X_i^* = \begin{cases} T_i^* & ; T_i^* \leq T \\ T & ; T_i^* > T \end{cases}$$

จะได้ตัวอย่างสุ่มชุดใหม่คือ $X_i^*, i=1,2,\dots,n$ ซึ่งเรียกว่า ตัวอย่างสุ่มบูตสเตรป

คำนวณตัวประมาณภาวจะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}^*$ และ $\hat{\sigma}^*$

ขั้นตอนที่ 3 ให้ p^* คือ จำนวนข้อมูลที่ไม่ถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ซึ่งมีค่าเท่ากับจำนวนข้อมูล ทั้งหมดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ T จากข้อมูลในขั้นตอนที่ 2

$$\text{จำลอง} \quad T_i^{**} \sim EVD(\hat{\mu}^*, \hat{\sigma}^*) \quad , i=1,2,\dots,n$$

กำหนดให้ T เป็นเวลาที่กำหนดไว้ล่วงหน้าซึ่งเท่ากับควอนไทล์ที่ $\frac{p^*}{n}$

$$\text{กำหนดให้} \quad X_i^{**} = \begin{cases} T_i^{**} & ; T_i^{**} \leq T \\ T & ; T_i^{**} > T \end{cases}$$

จะได้ตัวอย่างสุ่มชุดใหม่คือ $X_i^{**}, i=1,2,\dots,n$ ซึ่งเรียกว่า ตัวอย่างสุ่มบูตสเตรป

คำนวณตัวประมาณภาวจะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}^{**}$ และ $\hat{\sigma}^{**}$

ขั้นตอนที่ 4 ทำขั้นตอนที่ 3 ซ้ำ แบบบูตสเตรปจำนวน B_2 รอบ

$$\text{ขั้นตอนที่ 5} \quad \text{คำนวณ} \quad se(\hat{\mu}^*) = \sqrt{\frac{1}{B_2-1} \sum_{k=1}^{B_2} (\hat{\mu}_k^{**} - \bar{\mu}^{**})^2} \quad \text{โดยที่} \quad \bar{\mu}^{**} = \sum_{k=1}^{B_2} \frac{\hat{\mu}_k^{**}}{B_2}$$

$$\text{และ} \quad se(\hat{\sigma}^*) = \sqrt{\frac{1}{B_2-1} \sum_{k=1}^{B_2} (\hat{\sigma}_k^{**} - \bar{\sigma}^{**})^2} \quad \text{โดยที่} \quad \bar{\sigma}^{**} = \sum_{k=1}^{B_2} \frac{\hat{\sigma}_k^{**}}{B_2}$$

$$\text{ขั้นตอนที่ 6} \quad \text{คำนวณ} \quad T_\mu^* = \frac{\hat{\mu}^* - \hat{\mu}}{se(\hat{\mu}^*)} \quad \text{และ} \quad T_\sigma^* = \frac{\hat{\sigma}^* - \hat{\sigma}}{se(\hat{\sigma}^*)}$$

ขั้นตอนที่ 7 ทำขั้นตอนที่ 2-6 ซ้ำ แบบบูตสเตรปจำนวน B_1 รอบ

$$\text{ขั้นตอนที่ 8} \quad \text{คำนวณ} \quad se(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{1}{B_1-1} \sum_{j=1}^{B_1} (\hat{\mu}_j^* - \bar{\mu}^*)^2} \quad \text{โดยที่} \quad \bar{\mu}^* = \sum_{j=1}^{B_1} \frac{\hat{\mu}_j^*}{B_1}$$

$$\text{และ} \quad se(\hat{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{B_1-1} \sum_{j=1}^{B_1} (\hat{\sigma}_j^* - \bar{\sigma}^*)^2} \quad \text{โดยที่} \quad \bar{\sigma}^* = \sum_{j=1}^{B_1} \frac{\hat{\sigma}_j^*}{B_1}$$

ขั้นตอนที่ 9 คำนวณช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีบูตสเตรปที่ สำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ

ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ μ มีรูปแบบดังนี้

$$\left(\hat{\mu} - T_{\mu B_1}^{*(1-\alpha/2)} \cdot se(\hat{\mu}) , \hat{\mu} - T_{\mu B_1}^{*(\alpha/2)} \cdot se(\hat{\mu}) \right) \quad (17)$$

โดยที่ $T_{\mu B_1}^{*(\alpha/2)}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $(\alpha/2)$ ของ T_μ^*

และ $T_{\mu B_1}^{*(1-\alpha/2)}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $(1-\alpha/2)$ ของ T_μ^*

และช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ σ มีรูปแบบดังนี้

$$\left(\hat{\sigma} - T_{\sigma B_1}^{*(1-\alpha/2)} \cdot se(\hat{\sigma}) , \hat{\sigma} - T_{\sigma B_1}^{*(\alpha/2)} \cdot se(\hat{\sigma}) \right) \quad (18)$$

โดยที่ $T_{\sigma B_1}^{*(\alpha/2)}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $(\alpha/2)$ ของ T_σ^*

และ $T_{\sigma B_1}^{*(1-\alpha/2)}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $(1-\alpha/2)$ ของ T_σ^*

2.5.4 วิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Ratio Method)

ในการทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นนั้น นอกจากจะใช้ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์แล้ว ยังสามารถใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ได้ ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสร้างช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ μ และ σ ของการแจกแจงค่าสุดขีดเมื่อข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1

กำหนดให้ $q = 2\{L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}; x) - L(\mu, \sigma; x)\}$ จะได้ว่า q ลู่เข้าสู่การแจกแจงไคกำลังสอง ที่มีองศาเสรีเท่ากับ 2 ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ μ โดยการแทนค่า σ ด้วย $\hat{\sigma}$ และเช่นเดียวกันช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ σ จะแทนค่า μ ด้วย $\hat{\mu}$ ดังนั้น q ลู่เข้าสู่การแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1 ซึ่งจะเรียกวิธีในลักษณะนี้ว่าเป็นการสร้างช่วงความเชื่อมั่นภายใต้อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ (Estimated Likelihood Ratio)

การสร้างช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ μ อธิบายได้ดังนี้

$$\begin{aligned} q &\leq \chi_{1-\alpha,1}^2 \\ 2\{L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}; x) - L(\mu, \hat{\sigma}; x)\} &\leq \chi_{1-\alpha,1}^2 \\ \{L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}; x) - L(\mu, \hat{\sigma}; x)\} &\leq \frac{\chi_{1-\alpha,1}^2}{2} \\ L(\mu, \hat{\sigma}; x) &\geq L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}; x) - \frac{\chi_{1-\alpha,1}^2}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

ในทำนองเดียวกัน การสร้างช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ σ ได้ดังนี้

$$L(\hat{\mu}, \sigma; x) \geq L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}; x) - \frac{\chi_{1-\alpha,1}^2}{2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } L(\mu, \hat{\sigma}; x) &= \left\{ -p \ln \hat{\sigma} + \sum_{i=1}^p \left[\left(\frac{x_i - \mu}{\hat{\sigma}} \right) - \exp \left(\frac{x_i - \mu}{\hat{\sigma}} \right) \right] - (n-p) \exp \left(\frac{T - \mu}{\hat{\sigma}} \right) \right\} \\ L(\hat{\mu}, \sigma; x) &= \left\{ -p \ln \sigma + \sum_{i=1}^p \left[\left(\frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma} \right) - \exp \left(\frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma} \right) \right] - (n-p) \exp \left(\frac{T - \hat{\mu}}{\sigma} \right) \right\} \\ L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}; x) &= \left\{ -p \ln \hat{\sigma} + \sum_{i=1}^p \left[\left(\frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) - \exp \left(\frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] - (n-p) \exp \left(\frac{T - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right\} \end{aligned}$$

และ $\chi_{1-\alpha,1}^2$ คือควอนไทล์ที่ $1-\alpha$ ของการแจกแจงไคกำลังสอง ที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1

จะเห็นว่าขวามือของสมการ (19) และ (20) คือค่าคงที่ ดังนั้นเราจะสร้างช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ μ และ σ ตามลำดับ จากการคำนวณเชิงตัวเลขโดยประยุกต์ใช้ฟังก์ชัน approx บนโปรแกรม R

2.6 ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 90% และ 95%

2.7 เปรียบเทียบการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่น 4 วิธี โดยพิจารณาจากภาวะน่าจะเป็นคัมรวมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น

2.8 จำนวนรอบของบูตสแตรป คือ $B_1 = 1,000$ และ $B_2 = 50$

2.9 จำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลโดย กระทำซ้ำ 1,000 รอบ ในแต่ละสถานการณ์

2.10 ประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

3. ผลการวิจัย

ในส่วนนี้จะแสดงผลลัพธ์จากการจำลองสถานการณ์ และประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง เพื่อหาข้อสรุปและประมวลผล สำหรับการนำเสนอผลการศึกษาคู่วิจัยได้เสนอในรูปแบบตารางโดยการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นคู่รวมกับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ได้จากการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนประชากร โดยใช้ตัวสถิติทดสอบ Z ในการทดสอบทางเดียว เมื่อพิจารณาที่ระดับความเชื่อมั่น 90% สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.8878 และที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.9387

3.1 ผลลัพธ์จากการจำลองสถานการณ์

ตารางที่ 3.1.1 แสดงค่าเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ค่าเฉลี่ยความกว้าง และร้อยละของค่าความน่าจะเป็นคู่รวมของพารามิเตอร์ μ และ σ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% เมื่อ $T = 0.5$ และ $\mu = 10, \sigma = 1$

$\mu = 10, \sigma = 1$	วิธีการ	μ			σ		
		CI_μ	EL_μ	CP_μ	CI_σ	EL_σ	CP_σ
$n = 25$	Asym	(9.4495,10.3777)	0.9282	81.8	(0.5354,1.3143)	0.7789	80.0
	Boot-p	(9.3561,10.2923)	0.9362	78.7	(0.5200,1.2667)	0.7466	75.8
	Boot-t	(9.5451,10.7088)	1.1637	89.1*	(0.6702,1.6618)	0.9916	88.8*
	LR	(9.5222,10.3698)	0.8476	79.2	(0.6487,1.3989)	0.7502	81.9
$n = 50$	Asym	(9.5991,10.3125)	0.7134	86.4	(0.6729,1.2632)	0.5903	85.6
	Boot-p	(9.5489,10.2634)	0.7146	84.3	(0.6624,1.2390)	0.5765	83.3
	Boot-t	(9.6639,10.4706)	0.8067	91.4*	(0.7524,1.4248)	0.6724	89.8*
	LR	(9.6547,10.2922)	0.6375	83.7	(0.7491,1.2907)	0.5416	83.4
$n = 100$	Asym	(9.7293,10.2413)	0.5120	89.2*	(0.7710,1.1944)	0.4234	88.2
	Boot-p	(9.7042,10.2162)	0.5120	87.9	(0.7649,1.1832)	0.4183	87.6
	Boot-t	(9.7642,10.3137)	0.5494	90.6*	(0.8130,1.2685)	0.4555	90.0*
	LR	(9.7664,10.2223)	0.4560	85.2	(0.8182,1.1997)	0.3814	85.2
$n = 150$	Asym	(9.7834,10.2046)	0.4212	89.1*	(0.8156,1.1640)	0.3484	90.0*
	Boot-p	(9.7665,10.1876)	0.4211	87.5	(0.8113,1.1566)	0.3453	89.2*
	Boot-t	(9.8075,10.2515)	0.4440	91.1*	(0.8443,1.2122)	0.3679	91.7*
	LR	(9.8130,10.1871)	0.3741	85.3	(0.8519,1.1632)	0.3113	86.9

* หมายถึง ร้อยละค่าความน่าจะเป็นคู่รวมไม่ต่ำกว่า 88.78

หมายถึง ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด

จากตารางที่ 3.1.1 เมื่อพิจารณาช่วงความเชื่อมั่น 90% ของ μ และ σ สามารถอธิบายได้ดังนี้

สำหรับพารามิเตอร์ μ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 และ 50 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 และ 150 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ

สำหรับพารามิเตอร์ σ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 50 และ 100 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 150 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที

ตารางที่ 3.1.2 ค่าเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ค่าเฉลี่ยความกว้าง และร้อยละของค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของพารามิเตอร์ μ และ σ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% เมื่อ $T = 0.5$ และ $\mu = 10, \sigma = 1$

$\mu = 10, \sigma = 1$	วิธีการ	μ			σ		
		CI_μ	EL_μ	CP_μ	CI_σ	EL_σ	CP_σ
$n = 25$	Asym	(9.3661,10.4834)	1.1172	88.8	(0.4657,1.4031)	0.9374	86.4
	Boot-p	(9.2578,10.3887)	1.1309	85.0	(0.4749,1.3731)	0.8982	85.0
	Boot-t	(9.4751,10.9372)	1.4621	95.0*	(0.6277,1.8641)	1.2364	96.3*
	LR	(9.4596,10.4829)	1.0233	87.7	(0.6153,1.5424)	0.9271	91.4
$n = 50$	Asym	(9.5231,10.3712)	0.8481	89.3	(0.6155,1.3170)	0.7016	89.6
	Boot-p	(9.4674,10.3187)	0.8513	86.9	(0.6190,1.3044)	0.6854	88.6
	Boot-t	(9.5987,10.5795)	0.9809	94.9*	(0.7091,1.5232)	0.8141	94.7*
	LR	(9.5923,10.3519)	0.7596	86.9	(0.7137,1.3666)	0.6530	88.8
$n = 100$	Asym	(9.6712,10.2870)	0.6157	92.9	(0.7371,1.2463)	0.5092	93.5
	Boot-p	(9.6438,10.2594)	0.6155	91.9	(0.7381,1.2402)	0.5021	93.7
	Boot-t	(9.7133,10.3819)	0.6687	95.1*	(0.7881,1.3410)	0.5530	95.2*
	LR	(9.7173,10.2666)	0.5494	89.9	(0.7979,1.2606)	0.4627	91.8
$n = 150$	Asym	(9.7337,10.2349)	0.5012	94.1*	(0.7811,1.1956)	0.4145	92.8
	Boot-p	(9.7156,10.2161)	0.5005	93.0	(0.7814,1.1913)	0.4100	92.8
	Boot-t	(9.7624,10.2954)	0.5329	95.4*	(0.8152,1.2568)	0.4415	95.0*
	LR	(9.7699,10.2159)	0.4461	91.8	(0.8269,1.1998)	0.3729	91.0

* หมายถึง ร้อยละค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่า 93.87

หมายถึง ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด

จากตารางที่ 3.1.2 เมื่อพิจารณาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของ μ และ σ สามารถอธิบายได้ดังนี้

สำหรับพารามิเตอร์ μ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 50 และ 100 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 150 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ

สำหรับพารามิเตอร์ σ เมื่อทุกขนาดตัวอย่างที่ศึกษาวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที

ตารางที่ 3.1.3 ค่าเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ค่าเฉลี่ยความกว้าง และร้อยละของค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของพารามิเตอร์ μ และ σ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% เมื่อ $T=0.7$ และ $\mu=10, \sigma=1$

$\mu=10, \sigma=1$	วิธีการ	μ			σ		
		CI_μ	EL_μ	CP_μ	CI_σ	EL_σ	CP_σ
$n=25$	Asym	(9.5793,10.3303)	0.7510	84.9	(0.6352,1.2957)	0.6605	84.7
	Boot-p	(9.5234,10.2812)	0.7578	83.7	(0.6205,1.2626)	0.6421	82.6
	Boot-t	(9.5963,10.4639)	0.8676	89.9*	(0.7343,1.5147)	0.7805	89.8*
	LR	(9.6040,10.3545)	0.7506	85.0	(0.7020,1.3897)	0.6878	88.2
$n=50$	Asym	(9.7066,10.2541)	0.5476	87.0	(0.7368,1.2197)	0.4829	88.7*
	Boot-p	(9.6774,10.2272)	0.5499	86.8	(0.7285,1.2037)	0.4752	87.1
	Boot-t	(9.7223,10.317)	0.5947	89.1*	(0.7917,1.2212)	0.4295	91.2*
	LR	(9.7213,10.2649)	0.5436	86.9	(0.7752,1.2644)	0.4892	90.2*
$n=100$	Asym	(9.7918,10.1822)	0.3904	88.2	(0.8144,1.1584)	0.3441	88.8*
	Boot-p	(9.7778,10.1677)	0.3899	87.3	(0.8097,1.1506)	0.3408	88.3
	Boot-t	(9.8020,10.2107)	0.4086	90.6*	(0.8429,1.2061)	0.3632	89.7*
	LR	(9.8005,10.1865)	0.3861	88.6	(0.8359,1.1791)	0.3432	89.6*
$n=150$	Asym	(9.8321,10.1539)	0.3218	89.8*	(0.8542,1.1377)	0.2835	89.3*
	Boot-p	(9.8224,10.1447)	0.3223	89.2*	(0.8511,1.1322)	0.2812	88.2
	Boot-t	(9.8378,10.1732)	0.3355	91.3*	(0.8740,1.1691)	0.2951	90.2*
	LR	(9.8388,10.1561)	0.3173	89.9*	(0.8699,1.1506)	0.2808	89.6*

* หมายถึง ร้อยละค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่า 88.78

หมายถึง ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด

จากตารางที่ 3.1.3 เมื่อพิจารณาช่วงความเชื่อมั่น 90% ของ μ และ σ สามารถอธิบายได้ดังนี้

สำหรับพารามิเตอร์ μ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 50 และ 100 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 150 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

สำหรับพารามิเตอร์ σ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 และ 50 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 150 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

ตารางที่ 3.1.4 ค่าเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ค่าเฉลี่ยความกว้าง และร้อยละของค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของพารามิเตอร์ μ และ σ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% เมื่อ $T = 0.7$ และ $\mu = 10, \sigma = 1$

$\mu = 10, \sigma = 1$	วิธีการ	μ			σ		
		CI_μ	EL_μ	CP_μ	CI_σ	EL_σ	CP_σ
$n = 25$	Asym	(9.5298,10.4105)	0.8808	91.4	(0.5630,1.3375)	0.7745	89.0
	Boot-p	(9.4645,10.3529)	0.8884	89.9	(0.5637,1.3180)	0.7543	88.2
	Boot-t	(9.5410,10.5877)	1.0468	95.2*	(0.6777,1.6215)	0.9437	95.1*
	LR	(9.5632,10.4453)	0.8821	92.0	(0.6525,1.4754)	0.8229	92.7
$n = 50$	Asym	(9.6600,10.3103)	0.6503	93.2	(0.6889,1.2615)	0.5726	92.0
	Boot-p	(9.6259,10.2786)	0.6527	92.0	(0.6884,1.2523)	0.5640	91.4
	Boot-t	(9.6744,10.3946)	0.7202	94.8*	(0.7538,1.3929)	0.6390	96.4*
	LR	(9.6798,10.3266)	0.6468	93.1	(0.7407,1.3273)	0.5866	94.1*
$n = 100$	Asym	(9.7531,10.2176)	0.4645	94.4*	(0.7805,1.1896)	0.4092	93.2
	Boot-p	(9.7368,10.2008)	0.4640	93.2	(0.7799,1.1852)	0.4053	92.6
	Boot-t	(9.7626,10.2561)	0.4934	95.6*	(0.8141,1.2512)	0.4371	94.7*
	LR	(9.7643,10.2247)	0.4604	94.6*	(0.8091,1.2203)	0.4112	93.8*
$n = 150$	Asym	(9.8043,10.1867)	0.3824	93.2	(0.8246,1.1615)	0.3369	93.6
	Boot-p	(9.7935,10.1748)	0.3813	93.6	(0.8244,1.1585)	0.3341	92.4
	Boot-t	(9.8114,10.2113)	0.3998	94.2*	(0.8478,1.2013)	0.3535	95.5*
	LR	(9.8127,10.1908)	0.3780	93.0	(0.8452,1.1810)	0.3358	94.6*

* หมายถึง ร้อยละค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่า 93.87

หมายถึง ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด

จากตารางที่ 3.1.4 เมื่อพิจารณาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของ μ และ σ สามารถอธิบายได้ดังนี้

สำหรับพารามิเตอร์ μ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 50 และ 150 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

สำหรับพารามิเตอร์ σ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 100 และ 150 วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

จากตารางที่ 3.1.1 - 3.1.4 สรุปได้ว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 และ 50 เกือบทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 และ 150 โดยพิจารณา $T = 0.5$ เกือบทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด สำหรับพารามิเตอร์ μ คือวิธีเชิงเส้นกำกับปกติ และสำหรับพารามิเตอร์ σ คือวิธีบูตสเตรปที เมื่อพิจารณา $T = 0.7$ เกือบทุกสถานการณ์ที่กำหนดวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ คือวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

3.2 ตัวอย่างจากข้อมูลจริง

ตัวอย่างข้อมูลจริงจาก (Aarset, 1987) ได้ศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับระยะเวลาการใช้งานของอะไหล่เครื่องจักรที่มีการแจกแจงไวบูล โดยมีข้อมูลอายุการใช้งาน 50 ตัวอย่าง ดังนั้นผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์และวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงที่มีการแจกแจงค่าสุดขีด เมื่อเป็นข้อมูลที่ถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 โดยใช้ลอการิทึมของการแจกแจงไวบูลเท่ากับการแจกแจงค่าสุดขีด ดังนี้

ข้อมูลสมบูรณ์

0.1 0.2 1 1 1 1 1 2 3 6 7 11 12 18 18 18 18 18 21 32 36 40 45 46 47 50 55
60 63 63 67 67 67 67 72 75 79 82 82 83 84 84 84 85 85 85 85 85 86 86

ลอการิทึมข้อมูลสมบูรณ์

-2.3025 -1.6094 0 0 0 0 0 0.6931 1.098 1.7917 1.9459 2.3978 2.4849 2.8903
2.8903 2.8903 2.8903 2.8903 3.0445 3.4657 3.5835 3.6888 3.8066 3.8286 3.8501
3.9120 4.0073 4.0943 4.1431 4.1431 4.2046 4.2046 4.2046 4.2046 4.2766 4.3174
4.3694 4.4067 4.4067 4.4188 4.4308 4.4308 4.4308 4.4426 4.4426 4.4426 4.4426
4.4426 4.4543 4.4543

ข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ที่ควอนไทล์ 0.5 ของลอการิทึมข้อมูลสมบรูณ์ 3.8501

-2.3025 -1.6094 0 0 0 0 0 0.6931 1.098 1.7917 1.9459 2.3978 2.4849 2.8903
2.8903 2.8903 2.8903 2.8903 3.0445 3.4657 3.5835 3.6888 3.8066 3.8286 3.8501
3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501
3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501 3.8501
3.8501 3.8501 3.8501

ข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ที่ควอนไทล์ 0.7 ของลอการิทึมข้อมูลสมบรูณ์ 4.2766

-2.3026 -1.6094 0 0 0 0 0 0.6931 1.0986 1.7917 1.9459 2.3978 2.4849 2.8903
2.8903 2.8903 2.8903 2.8903 3.0445 3.4657 3.5835 3.6888 3.8066 3.8286 3.8501
3.9120 4.0073 4.0943 4.1431 4.1431 4.2046 4.2046 4.2046 4.2046 4.2766 4.2766
4.2766 4.2766 4.2766 4.2766 4.2766 4.2766 4.2766 4.2766 4.2766 4.2766 4.2766
4.2766 4.2766 4.2766

ผู้วิจัยได้สร้างช่วงความเชื่อมั่นและความกว้างของพารามิเตอร์ μ และ σ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% เมื่อข้อมูลถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 ที่ควอนไทล์ 0.5 และ 0.7 ดังแสดงในตารางที่ 3.2.2 และตารางที่ 3.2.3 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.2.2 แสดงค่าของช่วงความเชื่อมั่นและความกว้างของพารามิเตอร์ μ และ σ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% เมื่อ $T = 0.5$ จะได้ $\hat{\mu} = 4.5042$ และ $\hat{\sigma} = 1.7262$

ขนาด ตัวอย่าง	วิธีการ	μ		σ	
		CI_{μ}	EL_{μ}	CI_{σ}	EL_{σ}
n = 50	Asym	(3.7482, 5.2602)	1.5120	(1.0998, 2.3526)	1.2527
	Boot- P	(3.6356, 5.1204)	1.4847	(1.0624, 2.3348)	1.2723
	Boot-t	(3.9043, 5.2233)	1.3190	(1.2609, 2.4114)	1.1505
	LR	(3.8695, 5.2278)	1.3582	(1.2724, 2.4421)	1.1696

จากตารางที่ 3.2.2 จะเห็นได้ว่าสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ วิธีที่มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที่

ตารางที่ 3.2.3 แสดงค่าของช่วงความเชื่อมั่นและความกว้างของพารามิเตอร์ μ และ σ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% เมื่อ $T = 0.7$ จะได้ $\hat{\mu} = 4.1442$ และ $\hat{\sigma} = 1.4445$

ขนาด ตัวอย่าง	วิธีการ	μ		σ	
		CI_μ	EL_μ	CI_σ	EL_σ
$n = 50$	Asym	(3.6620, 4.6264)	0.9643	(1.0108, 1.8781)	0.8673
	Boot- p	(3.6288, 4.5835)	0.9546	(1.0040, 1.8710)	0.8669
	Boot-t	(3.6713, 4.7326)	1.0613	(1.0865, 2.1002)	1.0136
	LR	(3.6962, 4.6507)	0.9545	(1.0887, 1.9472)	0.8585

จากตารางที่ 3.2.3 จะเห็นได้ว่าสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ วิธีที่มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

4. สรุปผลและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาข้อมูลระยะเวลาการใช้งานที่มีการแจกแจงค่าสุดขีดและเป็นข้อมูลที่ถูกเซ็นเซอร์ประเภทที่ 1 รวมถึงการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และนำตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ นอกจากนั้นยังเลือกใช้เมทริกซ์คอซันเทคค่าสังเกตของพีชเชอร์ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นโดยอาศัยวิธีเชิงเส้นกำกับปรกติ วิธีบูตสเตรปที วิธีบูตสเตรปที และวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น และวัดประสิทธิภาพวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นด้วยความน่าจะเป็นคัมรวมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น ซึ่งวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด แสดงว่าวิธีนั้นเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้น จากการศึกษพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเล็กถึงปานกลาง นั่นคือ $n = 25, 50$ วิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด คือวิธีบูตสเตรปที แต่เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่นั้นคือ $n = 100, 150$ โดยพิจารณาเวลาศึกษาไว้ล่วงหน้าควอนไทล์ที่ 0.5 วิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดสำหรับพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง คือวิธีเชิงเส้นกำกับปรกติ และสำหรับพารามิเตอร์แสดงขนาด คือวิธีบูตสเตรปที เมื่อพิจารณาเวลาศึกษาไว้ล่วงหน้าควอนไทล์ที่ 0.7 วิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดสำหรับพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งและพารามิเตอร์แสดงขนาด คือวิธีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น เมื่อนำข้อมูลจริงมาประยุกต์ใช้ผลที่ได้มีความสอดคล้องกับการจำลอง ยกเว้นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง นอกจากนั้นสังเกตได้ว่าผลที่ได้แตกต่างจากงานวิจัยของ Lin และ Ke อาจเป็นเพราะลักษณะของการเซ็นเซอร์ข้อมูลและจำนวนรอบบูตสเตรปที่ต่างกัน

ผู้วิจัยจึงมีข้อเสนอแนะเพื่อเป็นแนวทางให้ผู้สนใจจะศึกษาเพิ่มเติม นั่นคือควรขยายผลการศึกษาออกไปให้เกิดประโยชน์ยิ่งขึ้น โดยทำการศึกษาในสถานการณ์อื่นๆ เช่น การกำหนดเวลาที่ศึกษาไว้ล่วงหน้า จำนวนข้อมูลตัวอย่าง พารามิเตอร์แสดงตำแหน่งและพารามิเตอร์แสดงขนาด จำนวนรอบบูตสเตรป แต่ถ้ากำหนดจำนวนรอบบูตสเตรปมากจะทำให้ใช้เวลานานในการประมวลผล รวมถึงการเพิ่มจำนวนรอบกระทำซ้ำมอนติคาร์โล เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

ภาษาไทย

- Aarset, M. V. (1987). How to identify a bathtub hazard rate. *IEEE Transactions on Reliability*, 36(1), 106-108.
- Efron, B. (1982). The jackknife, the bootstrap and other resampling plans. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 38. *Philadelphia: Siam*.
- Gasmi, S., & Berzig, M. (2011). Parameters estimation of the modified Weibull distribution based on type I censored samples. *Applied Mathematical Sciences*, 59(5), 2899-2917.
- Hall, P. (1988). Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals. *The Annals of Statistics*, 927-953.
- Klein, J. P., & Moeschberger, M. L. (2005). *Survival analysis: techniques for censored and truncated data*: Springer Science & Business Media.
- Kundu, D., & Gupta, R. D. (2006). Estimation of $P[Y < X]$ for Weibull distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 55(2), 270.
- Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data* (Vol. 362): John Wiley & Sons.
- Lin, C.-T., & Ke, S.-J. (2013). Estimation of $P(Y)$. *Quality Technology & Quantitative Management*, 10(3), 339-352.
- Miller Jr, R. G. (2011). *Survival analysis* (Vol. 66): John Wiley & Sons.
- Pawitan, Y. (2001). *In all likelihood: statistical modelling and inference using likelihood*: Oxford University Press.
- Shen, Y., & Yang, Z. (2015). Bias-correction for Weibull common shape estimation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(15), 3017-3046.