

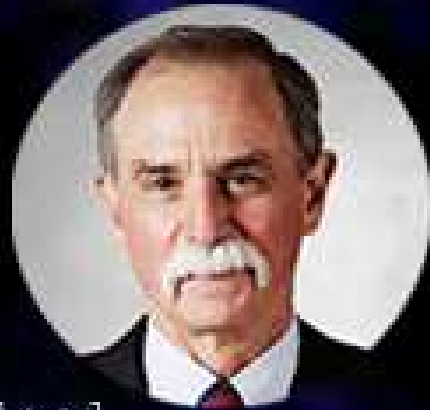
วารสารฟิสิกส์ไทย

Thai Journal of Physics

วารสารสำหรับผู้รักและสนใจในแวดวงฟิสิกส์

ISSN 0857-1449

ปีที่ 29 ฉบับที่ 3 : กันยายน 2555 – พฤศจิกายน 2555



David J. Wineland



Serge Haroche

Nobel Prize in Physics 2012

รางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ประจำปี 2555

แม่เหล็กเซรามิกกับการประยุกต์ใช้งาน

ความรักจะลงเอยเช่นไร

ว่าด้วยฟิสิกส์ของการประหยัคพลังงานในการเดินทาง

การสร้างระบบตรวจจับการเคลื่อนที่ควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์



ขอแสดงความยินดีอีกครั้งกับท่านอดีตนายกสมาคมฟิสิกส์ไทย รศ. ดร.วีระพงษ์ แพสุวรรณ กับตำแหน่งปลัดกระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ตำแหน่งงานปัจจุบัน:

- ปลัดกระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
- ประธานคณะกรรมการบริหารสถาบันเทคโนโลยีนิวเคลียร์แห่งชาติ (องค์การมหาชน)
- ประธานคณะกรรมการบริหารองค์การพิพิธภัณฑ์วิทยาศาสตร์แห่งชาติ

ประวัติการทำงาน :

- ข้าราชการพลเรือน ตำแหน่งรองศาสตราจารย์ ภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (พ.ศ.2523-2536)
- ผู้อำนวยการศูนย์คอมพิวเตอร์ ศูนย์คอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี (พ.ศ. 2536-2544)
- พนักงานองค์กรของรัฐ ตำแหน่งรองศาสตราจารย์ สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี (พ.ศ. 2536-2551)

- รักษาการผู้อำนวยการศูนย์ปฏิบัติการวิจัยเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอนแห่งชาติ กระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พ.ศ.2540-2544)
- ผู้อำนวยการศูนย์ปฏิบัติการวิจัยเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอนแห่งชาติ กระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พ.ศ. 2544-2551)
- รองปลัดกระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พ.ศ.2551-2555)

เครื่องราชอิสริยาภรณ์

- ทวีติยาภรณ์ช้างเผือก (ท.ช.) 5 ธันวาคม 2542
- ประถมาภรณ์มงกุฎไทย (ป.ม.) 5 ธันวาคม 2548
- ประถมาภรณ์ช้างเผือก (ป.ช.) 5 ธันวาคม 2555



รૂปรูปปริญญาวิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิตกิตติมศักดิ์ สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

หมายเหตุ รูปพื้นหลังของปกหน้าเป็นการควบคุมสถานะทางควอนตัมของอนุภาคเดี่ยว รูปภาพจาก R. Blatt, Univ. Innsbruck

สารบัญ

สวัสดิ์	1
รางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ประจำปี 2555 สำหรับการควบคุม	2
สถานะทางควอนตัมของอนุภาคเดี่ยว	
จิรกานต์ นันแก้ว	
แม่เหล็กเซรามิกกับการประยุกต์ใช้งาน	8
นัคดา เวชชากุล	
ว่าด้วยฟิสิกส์ของการประหยัดพลังงานในการเดินทาง	12
ปิยนุตร บุรีคำ	
ความรักจะลงเอยเช่นไร	19
สิทธิโชค อำนวยพล	
การสร้างระบบตรวจจับการเคลื่อนที่ควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์	25
สำหรับการทดลองในรายวิชากลศาสตร์	
ฐิติ สุทธิวงศ์	



สวัสดิ์

กลับมาพบกันอีกครั้งกับวารสารฟิลิสไทยหลังจากห่างหายกันไปนานนะครับ ตอนนี้วารสารออกล่าช้าเกือบจะครบปีแล้วต้องขออภัยด้วยครับ พวกผมจะพยายามออกวารสารตามมาให้เร็วขึ้น ทั้งนี้ผมเลียดโอกาสเชิญชวนว่าท่านใดมีเรื่องราวเกี่ยวกับฟิสิกส์ที่อยากเล่าสู่กันฟังช่วยส่งบทความกันมาด้วยนะครับสามารถส่งตรงมาทางอีเมลด้านล่างได้เลยครับ

สำหรับบทความในฉบับนี้เริ่มด้วยรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ประจำปี 2555 และเรื่องราวเกี่ยวกับการควบคุมอนุภาคทางควอนตัม ต่อมาเป็นเรื่องเกี่ยวกับเซรามิกที่มีสภาพทางแม่เหล็กและตามมาด้วยการหารูปแบบการเคลื่อนที่ช่วยพลังงานตามหลักฟิสิกส์ซึ่งอาจมาใช้เป็นแนวทางในการขับรถที่ประหยัดน้ำมัน

“ความรักจะลงเอยเช่นไร” เป็นบทความที่น่าเอาทฤษฎีจุดตรึง (fixed point) มาสร้างแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับความรักของหนุ่มสาวกัน (ความรักของคุณดูเหมือนแบบไหน) และท้ายสุดเป็นบทความเกี่ยวกับฟิสิกส์ศึกษาที่เน้นในส่วนของการพัฒนาเครื่องมือการสอนในราคาที่ประหยัด

กองบรรณาธิการ

กองบรรณาธิการ ชาญกิจ กันถ่อง, พวงรัตน์ ไพเราะ, พรรณี วัฒนกลวิชัย, ชิตณรงค์ ศิริสถิตย์กุล, สมศักดิ์ แดงดี, สตรีรัตน์ ไรต์, นววรรณ สงวนศักดิ์, เข้ม พุ่มสะอาด, ณัฐพร ฉัตรเกษม, อัครวิน สันทรัพย์, วรพงศ์ รักเรืองเดช, สุรเชษฐ์ หลิมกำเนิด, สุปรีย์ พินิจสุนทร, ชุตินทร พันธุ์วงศ์ หัวหน้ากองบรรณาธิการ วรวัฒน์ มีวาสนา ที่ปรึกษากองบรรณาธิการ ประพงษ์ คล้ายสุบรรณ์ ภาพและออกแบบปก วรวัฒน์ มีวาสนา เลขานุการกองบรรณาธิการ นิชชาวัลย์ แก่นจักร จำนวนพิมพ์ 1,000 เล่ม

ติดต่อกองบรรณาธิการ วารสารฟิลิสไทย สมาคมฟิสิกส์ไทย สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี 111 ถนนมหาวิทยาลัย ต. สุรนารี อ. เมือง จ. นครราชสีมา 30000 โทรศัพท์: 044-224549 โทรศัพท์: 044-224651 อีเมล: worawat@g.sut.ac.th วารสารฟิลิสไทย เป็นวารสารราย 3 เดือน มีวัตถุประสงค์เพื่อเผยแพร่สาระ ข่าวสาร และเป็นสื่อสัมพันธ์ในมวลหมู่สมาชิกและผู้ที่เกี่ยวข้องในแวดวงฟิสิกส์ ส่งเสริมให้เกิดการแลกเปลี่ยนข้อมูลและประสบการณ์เกี่ยวกับฟิสิกส์ในวงกว้างที่สร้างสรรค์ โดยความคิดเห็นและทักษะที่ปรากฏอยู่ในบทความต่างๆ เป็นเฉพาะของผู้เขียนแต่ละท่าน สมาคมฟิสิกส์ไทยไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป Website: www.thps.org

คณะกรรมการสมาคมฟิสิกส์ไทย ประจำปี 2554 – 2556 นายกสมาคมฯ รศ. ดร. วิทยา อมรกิจบำรุง อุปนายก รศ. ดร. วีระพงษ์ แพสุวรรณ เลขานุการ ผศ. ดร. เอกพรรณ สวัสดิ์ชิตัง เหรียญฤกษ์ ศ. ดร. ชูกิจ ภูมิปัญญาญ์ นายทะเบียน ศ. ดร. สันติ แม้นศิริ ปฏิคม ผศ. ดร. รัตติกร ยืนนิรัญ บรรณาธิการวารสารฟิลิสไทย ดร. วรวัฒน์ มีวาสนา ประธานสัมพันธ์ ดร. อนเนก เจริญภักดี รองเลขานุการ ผศ. ดร. ทศวรรษ สีตะวัน กรรมการ รศ. ดร. ประยูร ส่งศิริฤทธิกุล, ดร. สาโรช รุจิรวรรณ, ดร. ประพงษ์ คล้ายสุบรรณ์, ผศ. ดร. ศุภกร รักใหม่, ผศ. ดร. ขจรยศ อยู่ดี, ผศ. รังนา ชินพิทักษ์, รศ. ดร. ชีววรรณ บุญญวรรณ, ผศ. ดร. ธนากร โอสดจันทร, ผศ. ดร. นิรันดร์ วิทิตอนันต์, ดร. สิริพัฒน์ ประโทนเทพ, ดร. ณัฐพร ฉัตรเกษม

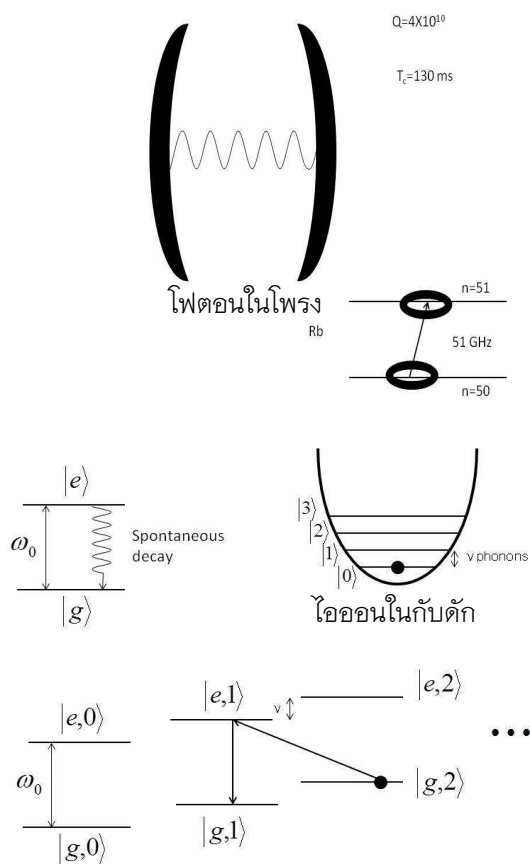
รางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ประจำปี 2555

สำหรับการควบคุมสถานะทางควอนตัมของอนุภาคเดียว

จิรกันต์ นันแก้ว¹

บุคคลที่ได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ประจำปี 2555 คือ **Serge Haroche** แห่ง Collège de France, Paris, France, École Normale Supérieure, Paris, France และ **David J. Wineland** แห่ง National Institute of Standards and Technology (NIST) และ University of Colorado at Boulder, Boulder, CO, USA ทั้งสองท่านไม่ได้ทำงานวิจัยร่วมกัน แต่เป็นงานวิจัยในด้าน Atomic, Molecular และ Optical Physics (AMO) สองแบบที่มีรูปแบบการทดลองที่ต่างกันแต่ได้ผลลัพธ์ที่คล้ายกัน โดยผลงานสำคัญที่ทำให้ท่านทั้งสองได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์คือ พัฒนาระบบการวัด และการควบคุมอนุภาค แต่ละตัว โดยที่ไม่ทำลายธรรมชาติทางควอนตัมของอนุภาคนั้นๆ ซึ่งเมื่อก่อนนักฟิสิกส์คิดกันว่าเป็นเรื่องที่ไม่สามารถทำได้ กล่าวง่ายๆ ว่า ผลงานของ Haroche เป็นการกักอนุภาคโฟตอนและตรวจวัดด้วยอะตอมที่ส่งเข้าไปในโพรงที่เก็บกัก ส่วนผลงานของ Wineland เป็นการกักไอออนหรืออะตอมที่มีประจุ แล้วตรวจวัดด้วยโฟตอน ผลงานนี้ทำให้เกิดประโยชน์อย่างยิ่งยวด และถือเป็นบันไดสำคัญขั้นแรกต่อการพัฒนาควอนตัมคอมพิวเตอร์ที่สามารถประมวลผลได้รวดเร็วกว่าซูเปอร์คอมพิวเตอร์ที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันหลายเท่า และผลงานการทดลองของ Wineland ยังนำไปสู่ นาฬิกาอะตอม (atomic clock) แบบใหม่ ที่มีความแม่นยำมากกว่า นาฬิกาอะตอมซีเซียมมาตรฐาน (caesium clocks) ที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน หลักการสำคัญของผลงานวิจัยรางวัลโนเบลทั้งสองแบบได้ถูกแสดงไว้ใน รูปที่ 1

ทฤษฎีทางควอนตัมฟิสิกส์สามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติในสเกลขนาดเล็กสำหรับอนุภาคระดับจุลภาค ในอดีตการทำทดลองเพื่อที่จะพิสูจน์ทฤษฎีทางควอนตัมฟิสิกส์นั้นไม่สามารถทำได้ เนื่องจากเทคโนโลยีที่จำกัดไม่สามารถเข้าถึงธรรมชาติทางควอนตัมของอนุภาคเดี่ยวๆ นักฟิสิกส์ที่ศึกษา



รูปที่ 1 หลักการวิทยาศาสตร์ของผลงานวิจัยรางวัลโนเบล 2 แบบ **รูปด้านบน** เป็นหลักการในผลงานวิจัยของ Haroche แสดงให้เห็นถึงไมโครเวฟโฟตอนที่ถูกกักไว้ในโพรงกระจกไมโครเวฟที่มีค่า Q สูง มีรีดเบอร์กอะตอมซึ่งเป็นรูปเดิม (Rb) ถูกใช้ในการควบคุมและวัดสถานะของโฟตอน **รูปด้านล่าง** เป็นหลักการในผลงานของ Wineland แสดงให้เห็นไอออนที่ถูกกักไว้ในกับดักแบบฮาร์มอนิก สถานะควอนตัมของไอออนถูกควบคุมโดยเลเซอร์ [1,2,3]

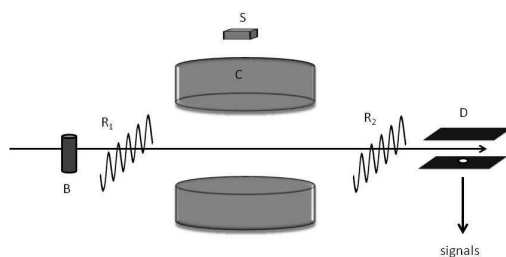
¹อาจารย์ (ดร.) ภาควิชาฟิสิกส์และวัสดุศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ทางด้านนี้จึงมักจะใช้การทดลองที่สมมุติขึ้น (thought experiment) การทดลองสมมุติที่โด่งดังที่สุดนั้นก็คือ **แมวของชโรดิงเจอร์ (Schrödinger's Cat)** ซึ่งกล่าวไว้ว่า ถ้าแมวของชโรดิงเจอร์ ถูกใส่ในกล่องที่ถูกตัดขาดกับโลกภายนอกโดยสิ้นเชิง และข้างในกล่องมียาพิษที่จะถูกปล่อยออกมาเมื่อมีการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีที่อยู่ในกล่อง เนื่องจากความน่าจะเป็นของการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี เช่น 50% เป็นไปตามกฎกลศาสตร์ควอนตัม สารกัมมันตรังสีอยู่ใน **สถานะซ้อนทับ (superposition state)** ระหว่างการสลายตัวกับการไม่สลายตัว ซึ่งเป็นคุณสมบัติของสถานะควอนตัม ดังนั้นแมวในกล่องที่โคเดเดี่ยวที่สัมพันธ์กับระบบควอนตัมจึงอยู่ในสถานะซ้อนทับระหว่างความตายและการมีชีวิตอยู่ หากเราต้องการจะตรวจสอบว่าแมวยังมีชีวิตอยู่หรือตายแล้ว เราก็ต้องเปิดกล่องออกมาดู ซึ่งการเปิดกล่องทำให้ระบบควอนตัมทำอันตรกิริยากับสิ่งแวดล้อม มีผลทำให้สถานะซ้อนทับถูกทำลาย และเกิดผลการวัดอย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งในที่นี้ก็จะมีผลลัพธ์อยู่ 2 อย่างก็คือ แมวตายหรือมีชีวิตอยู่เท่านั้น การสังเกตและการวัดระบบควอนตัมจึงเป็นไปได้ยากเนื่องจากสถานะควอนตัมของระบบจะถูกทำลายเมื่อสัมผัสกับสิ่งแวดล้อม ดังนั้นผลงานของนักฟิสิกส์รางวัลโนเบลทั้งสองท่านที่สามารถวัดจัดการ และควบคุมอนุภาค แต่ละตัว โดยที่ไม่ทำลายธรรมชาติทางควอนตัมของอนุภาค จึงเป็นเรื่องที่น่าทึ่งและเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของอนุภาคเป็นอย่างมาก

สาขาการวิจัยของ **Haroche** เรียกว่า Cavity quantum electrodynamics (CQED) โดยการวิจัยของ Haroche เป็นการแสดงให้เห็นถึงการวัดจำนวนโฟตอนโดยที่ไม่ทำลายมัน (quantum non-demolition measurement) ซึ่งจะแตกต่างจากการตรวจจับโฟตอนโดยทั่วไปที่โฟตอนจะถูกทำลาย ตัวอย่างเช่น เครื่องไกเกอร์เคาน์เตอร์ที่สัญญาณได้มาจากการไอออนไนซ์เกิดโดยโฟตอน ซึ่งทำให้โฟตอนถูกทำลาย หรือการใช้ฉากที่มีฟิล์มรับโฟตอนซึ่งโฟตอนจะถูกดูดกลืนทำให้ตรวจวัดได้ แต่โฟตอนก็จะหายไป เป็นต้น งานวิจัยของ Haroche ได้นำไปสู่การพัฒนาประตูสัญญาณตรรกะเชิงควอนตัมโดยใช้เฟส (quantum phase gate) ที่สามารถนำไปใช้ในการประมวลผลในควอนตัมคอมพิวเตอร์ได้

การวัดจำนวนโฟตอนโดยที่ไม่ทำลายโฟตอน สามารถทำได้ดังนี้ ถ้าให้ไมโครเวฟโฟตอนตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไปถูกกักไว้ใน

โพรงกระจกไมโครเวฟ (microwave Fabry-Perot cavity, C) ดังแสดงในรูปที่ 2 โพรงกระจกนี้เป็นโพรงกระจกแบบตัวนำยิ่งยวด (superconducting mirrors) เพื่อที่จะลดโอกาสการดูดกลืนโฟตอน และถูกทำให้เย็นลงจนอุณหภูมิอยู่ที่ 1 K เพื่อที่จะลดสัญญาณรบกวนจากรังสีความร้อน (thermal radiation noise) ไมโครเวฟโฟตอนที่ถูกกักอยู่ในโพรงกระจกสามารถถูกกักไว้ในช่วงเวลาประมาณ 1 มิลลิวินาที ก่อนที่จะถูกดูดกลืนหรือสูญหายไป ซึ่งช่วงเวลานี้ถือว่ายาวนานในระบบธรรมชาติของควอนตัม การวัดและจัดการกับไมโครเวฟโฟตอนจะทำได้ในเวลาที่สั้นกว่านั้นมาก โดยจะอยู่ที่ประมาณหน่วยไมโครวินาที โดยการส่ง **ริดเบิร์กอะตอม (Rydberg atom)** เข้าไปเชื่อมต่อและทำอันตรกิริยากับไมโครเวฟโฟตอน ริดเบิร์กอะตอมคืออะตอมใดๆที่อยู่ในสถานะกระตุ้นสูง (highly excited state) กล่าวคือ มีอิเล็กตรอนตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไปที่มีเลขควอนตัม n ที่มีค่าสูง ดังนั้นริดเบิร์กอะตอมจะมีรัศมีกว้างประมาณหนึ่งพันเท่าของอะตอมทั่วๆไป การที่ริดเบิร์กอะตอมอยู่ในสถานะกระตุ้นสูงทำให้เกิดคุณสมบัติหลายอย่างที่พิเศษกว่าอะตอมทั่วๆไป ตัวอย่างเช่น มีความอ่อนไหวอย่างมากต่อสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก จากภายนอก เป็นต้น คุณสมบัติเหล่านี้ทำให้ริดเบิร์กอะตอมโดดเด่นในการนำมาใช้เป็นตัววัด (meter) คุณสมบัติควอนตัมของระบบดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 การติดตั้งเครื่องมือในงานวิจัยของ Haroche ที่ใช้ในการศึกษาสถานะของไมโครเวฟโฟตอน; B คือ แหล่งเตรียมริดเบิร์กอะตอมตามความเร็วที่ต้องการโดยใช้เลเซอร์, คลื่นวิทยุ S คือแหล่งจ่ายไมโครเวฟโฟตอน, โพรงกระจก C ใช้กักไมโครเวฟโฟตอน, โพรงกระจกที่มีไมโครเวฟ R_1 และ R_2 ใช้ในการเตรียมสถานะซ้อนทับของริดเบิร์กอะตอม อะตอมจะถูกไอออนไนซ์ที่ D และสัญญาณจะถูกส่งผ่านไปที่เครื่องตรวจจับสัญญาณ

สถานะของริดเบิร์กอะตอมที่เกี่ยวข้องกับการทดลองนี้มีอยู่ 3 สถานะคือ $|e\rangle$, $|g\rangle$, $|i\rangle$ ซึ่ง $|i\rangle$ คือสถานะอ้างอิง, $|g\rangle$ คือสถานะพื้น และ $|e\rangle$ คือสถานะกระตุ้น ในการวัดว่าโฟตอนมี 0 หรือ 1 ตัวในโพรงกระจก ริดเบิร์กอะตอมที่ถูกคัดความเร็วตามที่ต้องการในสถานะ $|i\rangle$ จะถูกส่งผ่านโพรงกระจก R_1 ซึ่งในโพรงกระจกนี้ริดเบิร์กอะตอมจะถูกสร้างให้อยู่ในสถานะซ้อนทับระหว่าง $|i\rangle$ และ $|g\rangle$ โดยการใช้ไมโครเวฟ $\pi/2$ pulse กล่าวคือ

$$|i\rangle \xrightarrow{R_1} \frac{|i\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}}$$

โดยไมโครเวฟ $\pi/2$ pulse จะทำให้ความน่าจะเป็นของสถานะ $|i\rangle$ และ $|g\rangle$ ณ เวลาใดๆ เกิดการสั่นแบบราบิ (Rabi oscillation) [3] เมื่อเวลาที่ความน่าจะเป็นของสถานะเท่ากับ 50% การสั่นจะถูกหยุดโดยการขยับเส้นการสั่นพ้องระหว่างสถานะของอะตอมให้ห่างความถี่ของไมโครเวฟ อะตอมในสถานะซ้อนทับนี้จะเคลื่อนที่เข้าสู่โพรงกระจก C และถ้าหากในโพรงกระจกมีโฟตอนอยู่หนึ่งตัวที่เส้นสั่นพ้องระหว่างสถานะ $|g\rangle$ และ $|e\rangle$ กล่าวคือ ถ้าโฟตอนดังกล่าวมีความถี่ $\omega = \omega_{eg}$ โดยที่ $\hbar\omega_{eg} = E_e - E_g$ ซึ่ง E_g และ E_e เป็นระดับพลังงานของริดเบิร์กอะตอมที่สถานะพื้น $|g\rangle$ และสถานะถูกกระตุ้น $|e\rangle$ ตามลำดับ สถานะของอะตอมในส่วนที่เป็น $|g\rangle$ จะดูดและคายโฟตอนในช่วงเวลาที่เดินทางอยู่ในโพรงกระจก C ทำให้เกิดการสั่นแบบราบิของความน่าจะเป็นระหว่างสถานะ $|g\rangle$ และ $|e\rangle$ หากการสั่นของความน่าจะเป็นถูกหยุดเมื่อเวลาในการทำปฏิกิริยาผ่านไปเท่ากับ $2\pi/\Omega$ (2π pulse) โดยที่ Ω คือความถี่เชิงมุมระหว่างสถานะ $|g\rangle|1\rangle$ และ $|e\rangle|0\rangle$ (ซึ่งเป็นสถานะ $|g\rangle$ ที่มี 1 โฟตอนอยู่ใน C และ สถานะ $|e\rangle$ ที่มี 0 โฟตอนอยู่ใน C ตามลำดับ) เฟสของอะตอมที่สถานะ $|g\rangle$ จะถูกเปลี่ยนไป π ทำให้สถานะซ้อนทับของอะตอมเปลี่ยนไปเป็น $\frac{|i\rangle + e^{i(\varphi=\pi)}|g\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|i\rangle - |g\rangle}{\sqrt{2}}$ และเมื่ออะตอมเดินทางออกจากโพรงกระจก C เข้าสู่โพรงกระจก R_2 ที่มีไมโครเวฟ $\pi/2$ pulse ที่เหมือนกับของ R_1 ทำให้อะตอมถูกเปลี่ยนสถานะกลับมามี $|i\rangle$ แต่ถ้าในโพรงกระจกไม่มีโฟตอนอยู่ สถานะซ้อนทับของอะตอมจะไม่เปลี่ยนแปลงซึ่งหมายความว่าเราจะได้สถานะซ้อนทับ $\frac{|i\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}}$ เหมือนเดิม และที่โพรงกระจก

R_2 ไมโครเวฟ $\pi/2$ pulse จะทำให้อะตอมมาอยู่ที่สถานะ $|g\rangle$ [4] สรุปลำดับการเปลี่ยนสถานะของริดเบิร์กอะตอมดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{|i\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} &\xrightarrow{C} \frac{|i\rangle + e^{i\varphi}|g\rangle}{\sqrt{2}}; \\ \frac{|i\rangle + e^{i\varphi}|g\rangle}{\sqrt{2}} &= \begin{cases} \frac{|i\rangle - |g\rangle}{\sqrt{2}} & ; 1 \text{ photon in C for } 2\pi \text{ pulse.} \\ \frac{|i\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} & ; 0 \text{ photon in C.} \end{cases} \end{aligned}$$

และต่อมาเมื่อผ่านโพรงกระจก R_2

$$\begin{aligned} 1 \text{ photon in C; } &\frac{|i\rangle - |g\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{R_2} |i\rangle \\ 0 \text{ photon in C; } &\frac{|i\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{R_2} |g\rangle \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าวิธีการนี้สามารถนับจำนวนโฟตอนว่า

เท่ากับ 0 หรือ 1 โดยที่ไม่ทำลายโฟตอน และยังสามารถสร้างควอนตัมระหว่างอะตอมกับโฟตอนอีกด้วย (entangled atom-field state) นั่นเป็นเพราะว่าเฟสของสถานะ $|g\rangle$ ของอะตอมขึ้นอยู่กับการมีจำนวนโฟตอนในโพรงกระจก

เราสามารถมองว่า ถ้าไม่มีโฟตอนอยู่ใน C คือ บิต 0 โฟตอน 1 ตัวที่อยู่ใน C คือ บิต 1 และอะตอมในสถานะ $|i\rangle$ คือ บิต 0 อะตอมในสถานะ $|g\rangle$ คือ บิต 1 นั่นหมายความว่าเราสามารถสร้างประตูสัญญาณตรรกะเชิงควอนตัม ที่เรียกว่า เกต quantum CNOT (quantum controlled NOT gate) ซึ่งเปรียบได้กับเกต XOR ในคอมพิวเตอร์ที่ใช้ทั่วไป โดยโฟตอนเป็นบิตควบคุม (control bit) และอะตอมเป็นบิตที่ถูกกระทำ (target bit) โดยที่บิตที่ถูกกระทำจะถูกเปลี่ยนจากสถานะเดิม เมื่อบิตควบคุมเป็น 1 และจะคงเดิม เมื่อบิตควบคุมเป็น 0 ในการทดลองนี้จะใช้ประตูสัญญาณตรรกะเชิงควอนตัมโดยใช้เฟส (quantum phase gate) โดยที่เฟส $\varphi = \pi$ เนื่องจากการกระตุ้นของโฟตอน รวมทั้ง การหมุนของบิตที่ถูกกระทำ (สถานะของอะตอม) โดยการเปลี่ยนเฟสสัมพัทธ์ของคลื่นไมโครเวฟ R_1 และ R_2 โดย R_2 สามารถกลับสถานะของอะตอมที่ผ่าน C ให้ไปสู่สถานะเดิมหรือสถานะที่ตรงกัน ทำให้บิตที่ถูกกระทำอยู่ในสถานะที่ต้องการ [4] นอกจากประตูสัญญาณตรรกะเชิงควอนตัม CNOT ซึ่งเป็น ประตูสัญญาณตรรกะเชิงควอนตัมในเฟส $\varphi = \pi$ แล้ว ประตูสัญญาณตรรกะเชิงควอนตัมที่เฟสต่างๆก็สามารถทำได้โดยการเปลี่ยนค่าความถี่ของโฟตอนจากเส้นสั่นพ้องระหว่างสถานะ $|g\rangle$ และ $|e\rangle$ ไปเล็กน้อย, ($\omega = \omega_{eg} + \delta$) ดังนั้นอะตอมจะไม่ดูดหรือคายโฟตอนที่ความถี่

เหล่านี้ ปฏิสัมพันธ์ระหว่างโฟตอนกับอะตอมจะทำให้เฟสของอะตอมเปลี่ยนไปเป็นค่าต่างๆ ขึ้นอยู่กับค่าการเปลี่ยนแปลงความถี่ δ ทำให้เกิดประตูลักษณะการกระจายของโฟตอน [4]

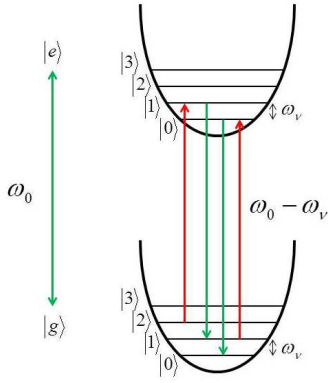
นอกจากความพัวพันเชิงควอนตัมของโฟตอนและอะตอม Haroche ยังสามารถสร้างความพัวพันเชิงควอนตัมของอะตอมและอะตอม (atom-atom entanglement) โดยการส่งรีดเบิร์กอะตอมตัวที่สองเข้าไปในโพรงกระจกหลังจาก $\pi/2$ pulse กระทำต่ออะตอมตัวแรก อะตอมตัวที่สองจะเข้าไปเชื่อมและทำปฏิกิริยากับโฟตอนที่พัวพันอยู่กับอะตอมตัวแรกอยู่แล้ว ดังนั้นอะตอมทั้งสองตัวจึงมีความพัวพันทางควอนตัมต่อกัน (two-atom entanglement via real photon exchange) นอกจากนั้นการพัวพันทางควอนตัมของสองอะตอมสามารถเกิดขึ้นได้จากการชนกันของอะตอมสองตัว โดยที่ไม่เกี่ยวกับโฟตอน (two-atom entanglement induced by a controlled collision in the cavity) Haroche ยังแสดงให้เห็นความพัวพันเชิงควอนตัมที่มากกว่าสองอะตอม (multi-particle entanglement) ซึ่งมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาควอนตัมคอมพิวเตอร์ [3]

ผลงานวิจัยของ Wineland เริ่มต้นจากการกักอนุภาคที่มีประจุ ในปี 2532 Paul และ Dehmelt ได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ จากการพัฒนาเทคนิคในการกักไอออน (ion trap technique) Wineland และ Dehmelt และ Hansch และ Schawlow เป็นผู้ริเริ่มความคิดที่จะทำให้อะตอมเย็นลงโดยใช้เลเซอร์ (laser cooling) โดย Wineland และ Dehmelt เสนอที่จะทำ laser cooling โดยใช้กับอนุภาคที่มีประจุ (ion trapping) ส่วน Hansch และ Schawlow เสนอที่จะทำโดยใช้กับอนุภาคที่ไม่มีประจุ (neutral atom trapping) Wineland เป็นคนแรกที่ทำสำเร็จโดยใช้ Doppler cooling กับแมกนีเซียมไอออน Doppler cooling เป็นการทำให้อะตอมเย็นลงโดยการยิงเลเซอร์เข้าไปในช่องเก็บอะตอมที่มีสภาพใกล้เคียงกับสุญญากาศ (ultrahigh vacuum chamber) ใน 3 แกน 6 ทิศทางคือ (-x, x, -y, y, -z, z) โดยที่เลเซอร์ทั้ง 6 ทิศทางมีความถี่ต่ำกว่า (red detune) ความถี่ในการเปลี่ยนแปลงของสถานะระดับพลังงานไอออน ไอออนที่เคลื่อนที่เข้าหาเลเซอร์ จะเห็นความถี่ของเลเซอร์ต่ำกว่าความถี่ในการเปลี่ยนแปลงของสถานะไอออน ไอออนจะถูกคลื่นโฟตอนเข้าไปและทำให้การเคลื่อนที่ของไอออนช้าลง (radiation pressure) อุณหภูมิของไอออนจะต่ำลงจากการใช้ Doppler cooling จนทำให้เห็นพลังงานการเคลื่อนที่

ของไอออนกลับไปที่กลับมาภายในกับดักที่ประมาณเป็นบ่อศักย์ฮาร์โมนิกมีลักษณะเป็นระดับ (quantized) ตามรูปที่ 1 เรียกว่าระดับพลังงานการสั่นของไอออน (quantized vibrational modes) ซึ่งบ่อศักย์ของกับดักไอออนมาจากสนามไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็กภายนอกนั่นเอง ดังนั้นระดับพลังงานของไอออนในบ่อศักย์ จึงมีอยู่สองชนิด ชนิดแรกคือระดับพลังงานที่เกิดจากการสั่น (vibrational modes) ซึ่งเป็นสถานะควอนตัมที่ขึ้นอยู่กับปัจจัยภายนอก (external states) และกลุ่มที่สองคือระดับพลังงานของอิเล็กตรอน (electronic levels) ซึ่งเป็นสถานะควอนตัมภายในของไอออน (internal quantum states) ระดับพลังงานทั้งสองชนิดเชื่อมโยงกันผ่านกระบวนการดูดหรือคายโฟตอน และกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับโฟตอนสองตัวที่เรียกว่า การเปลี่ยนสถานะแบบรามาน (Raman Transition) [2]

หลักการสำคัญในการควบคุมสถานะควอนตัมของไอออนคือการทำให้ไอออนเย็นลงจนถึงจุดที่พลังงานของไอออนในกับดักน้อยที่สุด โดยใช้วิธีที่เรียกว่า sideband cooling ดังแสดงในรูปที่ 3 ในรูปที่ 3 แสดงให้เห็นพลังงานของอิเล็กตรอนสองสถานะ $|e\rangle$ และ $|g\rangle$ ในกับดัก ซึ่ง $|e\rangle$ แสดงสถานะที่ถูกกระตุ้น และ $|g\rangle$ แสดงสถานะพื้น โดยที่ในแต่ละสถานะของอิเล็กตรอน จะมีกลุ่มของระดับพลังงานการสั่นจากการเคลื่อนที่ของตัวไอออนในบ่อศักย์ร่วมด้วย จุดประสงค์หลักก็คือการทำให้อิออนอยู่ในระดับพลังงานที่ต่ำที่สุด ซึ่งจะทำให้ได้โดยใช้เลเซอร์ที่มีความถี่แม่นยำ (narrow-bandwidth laser) ที่ความถี่เท่ากับ $\omega_0 - \omega_\nu$ โดยที่ ω_0 คือ ความถี่ระหว่างระดับพลังงานอิเล็กตรอนของไอออนสองระดับ กล่าวคือ $\hbar\omega_0 = E_e - E_g$ และ ω_ν คือ ความถี่ระหว่างระดับพลังงานการสั่นสองระดับ ไอออนจะถูกกระตุ้นโดยดูดกลืนโฟตอนจากเลเซอร์ให้ขึ้นไปอยู่ในระดับพลังงาน $|e\rangle$ โดยมีระดับพลังงานการสั่นลดลงเท่ากับ $\nu - 1$ เนื่องจากต่อมาไอออนจะสลายตัวลงมาอยู่ในระดับ $|g\rangle$ ที่มีระดับพลังงานการสั่น $\nu - 1$ เดียวกันกับก่อนการสลายตัว เมื่อมีการกระตุ้นต่อเนื่องดังแสดงในรูปที่ 3 ระดับพลังงานการสั่นจึงลดลงจนในที่สุดระดับการสั่นจะอยู่ที่ $\nu = 0$ ซึ่งก็คือจุดที่มีพลังงานการเคลื่อนที่ของไอออนต่ำที่สุดในกับดัก

Wineland ได้ใช้เทคนิคการถ่ายเทสถานะซ้อนทับเชิงควอนตัมของการสั่นของกับดัก ไปยัง ไอออนอีกชนิดหนึ่งที่ใช้สถานะการสั่นร่วมกันกับไอออนชนิดแรก เพื่อศึกษา การสลายตัว



รูปที่ 3 การทำไอออนให้เย็นลงโดยใช้หลักการ sideband cooling

ของความสอดคล้อง (decoherence) และ การสร้างนาฬิกาอะตอม การถ่ายเทสถานะซ้อนทับเชิงควอนตัมของการสั่นที่วุ่นนี้ เกิดขึ้น ดังนี้ พิจารณาไอออนในกับดักที่อยู่ในสถานะพลังงานอิเล็กทรอนิกส์ที่ต่ำที่สุด $|g\rangle$ และอยู่ในสถานะการสั่นที่ต่ำที่สุด $|0\rangle$ สถานะควอนตัมของไอออนจึงเขียนได้เป็น $|\varphi_0\rangle = |g\rangle|0\rangle$ ไอออนสามารถถูกกระตุ้นให้อยู่ในสถานะซ้อนทับโดยเลเซอร์หรือรังสีที่มีความถี่ใกล้เคียงกับเส้นสั่นพ้องของสถานะ $|g\rangle$ และ $|e\rangle$ สถานะควอนตัมของไอออนจะเปลี่ยนไปเป็น $|\varphi_1\rangle = (\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle)|0\rangle$ จากนั้นเลเซอร์ที่มีความถี่เท่ากับ $\omega_0 - \omega_\nu$ จะถูกใช้ทำปฏิกิริยากับไอออน เนื่องจากไอออนอยู่ในสถานะการสั่นที่ต่ำที่สุด ดังนั้น $\omega_0 - \omega_\nu$ เลเซอร์ซึ่งมีความถี่ต่ำกว่าความถี่สั่นพ้อง ω_0 จะไม่สามารถกระตุ้นสถานะ $|g\rangle|0\rangle$ ให้ขึ้นไปอยู่สถานะกระตุ้นได้ สถานะ $|e\rangle|0\rangle$ จึงเป็นสถานะเดียวที่สามารถเกิดการเปลี่ยนแปลงได้โดย $\omega_0 - \omega_\nu$ เลเซอร์จะกระตุ้นทำให้เกิดการคายโฟตอนความถี่ $\omega_0 - \omega_\nu$ นั่นคือ สถานะในส่วนของ $|e\rangle|0\rangle$ จะเปลี่ยนไปเป็น $|g\rangle|1\rangle$ ทำให้สถานะควอนตัมของไอออนเปลี่ยนไปเป็น $|\varphi_2\rangle = |g\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ ดังนั้นสถานะซ้อนทับของระดับพลังงานอิเล็กทรอนิกส์จะถูกถ่ายเทไปที่ระดับการสั่นของไอออน เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้นสรุปลำดับการถ่ายเทสถานะซ้อนทับของไอออนดังนี้

$$|g\rangle|0\rangle \xrightarrow{\text{laser pulse}} (\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle)|0\rangle$$

$$(\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle)|0\rangle \xrightarrow{\omega_0 - \omega_\nu \text{ laser}} |g\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

ถ้าหากกับดักไอออนมีไอออน 2 ชนิดอยู่ ไอออนทั้งสองชนิดจะใช้ระดับการสั่นร่วมกัน ดังนั้นสามารถใช้หลักการถ่ายเทสถานะเหมือนดังที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อถ่ายเทสถานะซ้อนทับของการสั่นไปสู่สถานะซ้อนทับของระดับพลังงานอิเล็กทรอนิกส์ของไอออนอีก

ชนิดหนึ่งได้

กับดักไอออนของ Wineland ถูกนำมาพัฒนานาฬิกาอะตอมที่มีช่วงการเปลี่ยนแปลงสถานะในช่วงแสง (optical transition) ซึ่งมีช่วงการเปลี่ยนแปลงของระดับพลังงานที่สูงกว่านาฬิกาซีเซียมมาตรฐานที่อยู่ในช่วงไมโครเวฟหลายเท่า ไอออนซึ่งสามารถนำมาใช้เป็นนาฬิกาอะตอมจะมีสเปกตรัมการเปลี่ยนแปลงระหว่างสถานะของนาฬิกาที่แคบ (spectrally narrow clock transitions) และไม่อ่อนไหวต่อสนามจากภายนอก คุณสมบัติเหล่านี้ทำให้ยากต่อการทำให้เย็นโดยเลเซอร์ซึ่งต้องการการเปลี่ยนแปลงสถานะที่ค่อนข้างกว้าง Wineland แสดงให้เห็นว่าสามารถที่จะทำให้ไอออนเย็นลงได้ด้วยวิธี sympathetic cooling ซึ่งก็คือการนำเอาไอออนที่แตกต่างกันสองชนิดมาไว้ในกับดักอะตอม ชนิดที่หนึ่งถูกทำให้เย็นโดยตรงด้วยเลเซอร์ โดยชนิดแรกมีการเปลี่ยนแปลงของสถานะที่แข็งแรง (strong allowed transition) ทำให้สามารถทำให้เย็นลงง่าย ซึ่ง Wineland ใช้แมกนีเซียมไอออน ชนิดที่สองจะต้องมีการเปลี่ยนแปลงของสถานะที่แคบ (spectrally narrow clock transition) เพื่อจะทำให้มีนาฬิกาที่มีความแม่นยำ ซึ่ง Wineland ใช้ลูมิเนียมไอออน ลูมิเนียมไอออนถูกทำให้เย็นทางอ้อมโดยปฏิกิริยาที่เกิดจากแรงคูลอมป์ (Coulomb interaction) ระหว่างไอออนทั้งสอง sympathetic cooling ทำให้ไอออนที่ถูกใช้เป็นนาฬิกาเย็นลง แต่เนื่องจากลูมิเนียมไอออนไม่มีการเปลี่ยนแปลงสถานะในช่วงแสงทำให้ยากต่อการตรวจวัดโดยเครื่องมือที่มีอยู่โดยทั่วไป [11] ปัญหานี้แก้ได้โดยการใช้สัญญาณตรรกะเชิงควอนตัม (quantum logic) โดยที่ไอออนทั้งสองชนิดใช้ระดับการสั่นร่วมกันในกับดัก ไอออนชนิดแรกก็คือ ไอออนนาฬิกา (clock ion) ไอออนชนิดที่สองเรียกว่า ไอออนตรรกะ (logic ion) ไอออนตรรกะจะถูกใช้ตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงสถานะของไอออนนาฬิกา วิธีการนี้ทำให้ Wineland สามารถสร้างความถี่มาตรฐานในช่วงแสงที่ละเอียดมากที่สุดเท่าที่นักฟิสิกส์เคยสร้างมาโดยมีความคลาดเคลื่อน ($\Delta\nu/\nu$) เท่ากับ 1 ใน 10^{17} [11] โดยใช้อลูมิเนียมไอออนเป็นไอออนนาฬิกาและแมกนีเซียมไอออนเป็นไอออนตรรกะ วิธีการควบคุมแบบเดียวกันนี้ในระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ของสถานะควอนตัมภายในของไอออนและในระดับขั้นความเสรีของสถานะควอนตัมของการเคลื่อนที่ของไอออน ซึ่งสำคัญต่อนาฬิกาอะตอม นำไปสู่ความสำเร็จในการสร้าง

ประตูสัญญาณตรรกะเชิงควอนตัม

(quantum gate) เป็นครั้งแรก ซึ่งกระตุ้นให้เกิดความสนใจในการพัฒนาการประมวลผลเชิงควอนตัมและความคมชัดคอมพิวเตอร์อย่างกว้างขวาง โดย Wineland เป็นผู้ดำเนินการคิดค้นวิจัยในด้านนี้

ความสามารถในการควบคุมอนุภาคระดับควอนตัมนำไปสู่การทดลองจริงมากมายหลายอย่างที่นักฟิสิกส์ไม่สามารถเข้าถึงได้มาก่อนเนื่องจากเทคนิคและเทคโนโลยีที่มีจำกัด ทั้งกลุ่มวิจัยของ Haroche และ Wineland ได้ทำการทดลองที่มีลักษณะคล้ายกับแมวของชโรดิงเจอร์ [3] โดยกลุ่มวิจัยของ Haroche ทำการส่ง ริดเบิร์กอะตอมในสถานะซ้อนทับ ในทำนองเดียวกับสถานะซ้อนทับของแมว (cat state ระหว่าง แมวตายกับมีชีวิตอยู่) เข้าไปในโพรงกระจกที่มีโฟตอนไม่สั่นพ้องกับอะตอม (non-resonant) จึงไม่มีการแลกเปลี่ยนพลังงาน แต่มีความพัวพันเชิงควอนตัมซึ่งเกิดจาก ปรากฏการณ์การเปลี่ยนของพลังงานของแสงที่มีการกระจายตัวในตัวกลาง (dispersive light-shift) ซึ่งตัวกลางในที่นี้ก็คืออะตอมที่ถูกส่งเข้าไป เนื่องจากปฏิกิริยาการเชื่อมต่อนี้ระหว่างริดเบิร์กอะตอมกับโฟตอนในโพรงกระจกแข็งแรงมาก จึงทำให้ความถี่ของโฟตอนถูกเปลี่ยนไปหลายกิโลเฮิร์ตซ์ โดยที่เครื่องหมายและขนาดของการเปลี่ยนแปลงของพลังงานขึ้นอยู่กับสถานะของอะตอม เมื่ออะตอมที่ถูกเตรียมไว้ในสถานะซ้อนทับ (cat state) ถูกส่งเข้าไปในโพรงกระจก ได้เชื่อมต่อกับโฟตอนที่มีจำนวนไม่มากในโพรงกระจก จะทำให้ความถี่ของโฟตอนเปลี่ยนไปและสามารถวัดได้ เมื่ออะตอมเดินทางออกจากโพรงกระจกแล้วความถี่ของโฟตอนจะมีอยู่สองค่าและมีเฟสต่างกัน ทำให้ Haroche สามารถศึกษารายละเอียดต่างๆเกี่ยวกับหลักการซ้อนทับที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับแมวของชโรดิงเจอร์ได้

นอกจากนี้ Haroche ยังสามารถเฝ้าสังเกต การสลายตัวของความสอดคล้อง (decoherence) ระหว่างโฟตอนที่มีพลังงานต่างกัน โดยส่งริดเบิร์กอะตอมอีกตัวเข้าไปวัดในโพรงกระจก และจากการสังเกตพบว่าการสลายตัวของความสอดคล้องจะเกิดเร็วขึ้นเรื่อยๆหากความถี่ของโฟตอนทั้งสองห่างกันมากขึ้น [3,6] ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการทดสอบทฤษฎีการสลายตัวของความสอดคล้อง (decoherence theories) ได้ ส่วนกลุ่มวิจัยของ Wineland ได้ทำการทดลองที่มีลักษณะคล้ายกันกับดักไอออน โดยใช้ความพัวพันระหว่างไอออนที่ถูกกักและสถานะสอดคล้องของการเคลื่อนไหวของไอออนเพื่อศึกษาการสลายตัวของความสอดคล้อง [3]

ผลงานวิจัยของทั้ง Haroche และ Wineland ในการพัฒนาเทคนิคการควบคุมอนุภาคระดับควอนตัมที่แม่นยำ นำไปสู่การสาธิตให้เห็นถึงการทดลองแมวของชโรดิงเจอร์ การดำเนินไปของสถานะซ้อนทับของแมว และการสลายตัวของความสอดคล้อง ซึ่งเป็นก้าวสำคัญของการพัฒนาควอนตัมคอมพิวเตอร์และนาฬิกาอะตอมที่มีความแม่นยำเป็นอย่างมาก

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ Prof. Dr. Thomas F. Gallagher ผู้ให้คำแนะนำและชี้แจงหลักการทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย อาจารย์ ชานุกิจ กันล่อง และ อาจารย์ ดร. นฤพนธ์ ธีตราภิบาล ผู้ให้คำแนะนำและตรวจทานงานเขียน

เอกสารอ้างอิง

- [1] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2012/popular-physicsprize2012.pdf
- [2] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2012/advanced-physicsprize2012.pdf
- [3] http://www.nobelprize.org/nobel_organizations/nobel_foundation/symposia/physics/ncs-2001-1/haroche.pdf
- [4] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 5166 (1999).
- [5] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Nature*, **400**, 239 (1999).
- [6] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maier, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4887 (1996).
- [7] D. J. Wineland, R. E. Drullinger, and F. L. Walls, *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 1639 (1978).
- [8] F. Deidrich, J. C. Berquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 403 (1989).
- [9] D. J. Larson, J. C. Berquist, J. J. Bollinger, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 70 (1986).
- [10] P. O. Schmidt, T. Rosenband, C. Langer, W. M. Itano, J. C. Berquist, and D. J. Wineland, *Science* **309**, 749 (2005).
- [11] C. W. Chou, D. B. Hume, J. C. J. Koelemeij, D. J. Wineland, and T. Rosenband, *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 070802 (2010).
- [12] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4714 (1995).
- [13] D. Leibfried, E. Krill, S. Sedelin, J. Britton, R. B. Blakestead, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Rost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, and D. J. Wineland, *Nature* **438**, 639 (2005).

แม่เหล็กเซรามิกกับการประยุกต์ใช้งาน

นิตดา เวชชากุล¹

เป็นเวลานานนับพันปีมาแล้วที่มนุษย์รู้จักใช้ประโยชน์จากแม่เหล็กในรูปของเข็มทิศนำทาง จนกระทั่งปี ค.ศ. 1740 โกวินไนท์ (Gowin Knight) ค้นพบกระบวนการสร้างวัสดุแม่เหล็กในรูปเหล็กกล้าที่มีสภาพแม่เหล็กสูงที่สามารถใช้เพื่อการทดลองทางวิทยาศาสตร์หรือใช้เป็นเข็มทิศที่แม่นยำอวกว้างจำหน่ายเป็นครั้งแรก เมื่อความก้าวหน้าทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีทางด้านไฟฟ้าและแม่เหล็กพัฒนามากขึ้น ทำให้มีการพัฒนาผลิตภัณฑ์อำนวยความสะดวกเพื่อเสริมปัจจัยพื้นฐานของการดำรงชีวิตมากขึ้น โดยเฉพาะในด้านการสื่อสาร อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เป็นส่วนสำคัญที่ทำให้การพัฒนาด้านการสื่อสารมีประสิทธิภาพมากขึ้น เช่น อุปกรณ์ไมโครเวฟ อุปกรณ์รับส่งสัญญาณโทรศัพท์ เสาอากาศรับคลื่นวิทยุ เทปบันทึกแม่เหล็ก เทปบันทึกวิดีโอ แถบแม่เหล็กบนบัตรเครดิต เป็นต้น อุปกรณ์เหล่านี้จะไม่สามารถทำงานได้เลยหากขาดวัสดุแม่เหล็กที่นำมาประยุกต์ใช้งาน

ในการนำวัสดุแม่เหล็กไปใช้งานจำเป็นต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการจัดจำแนกประเภทของวัสดุแม่เหล็ก โดยเกี่ยวข้องกับสมบัติทางแม่เหล็กที่มีผลต่อค่าความเป็นแม่เหล็ก ซึ่งอธิบายได้จากการเกิด โมเมนต์แม่เหล็ก (magnetic moment) ในวัสดุ ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากอิเล็กตรอนได้ 2 แบบ คือ โมเมนต์แม่เหล็กที่เกิดจาก ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนที่โคจรรอบนิวเคลียสของอะตอม และ สปินของอิเล็กตรอน (electron spin) โมเมนต์แม่เหล็กจากสปินมีทิศทางได้ 2 ทิศทาง คือ ทิศ “ขึ้น” หรือ “ลง” ที่ขนานกันแต่ทิศตรงข้ามกัน โดยในอะตอมที่มีอิเล็กตรอนเต็มเต็มในชั้นพลังงานหลัก (shell) จะมี เลขควอนตัมหลัก n (principal quantum number) ที่บอกถึงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนตัวนั้นๆ นอกจากนี้ระดับชั้นพลังงานในแบบจำลองอะตอม สามารถแยกละเอียดเป็นระดับชั้นพลังงานย่อย (subshell) ซึ่งสามารถแทนด้วย เลขควอนตัมตัวที่สอง คือ l และจำนวนชั้นพลังงานในแต่ละระดับชั้นพลังงานย่อย l จะสามารถแทนด้วย เลข

ควอนตัมตัวที่สาม คือ m_l ค่าโมเมนต์แม่เหล็กที่เป็นพื้นฐานที่สุดในระดับควอนตัม เรียกว่า บอห์ร์แมกนีตอน (Bohr magneton) ใช้สัญลักษณ์ μ_B มีขนาดเท่ากับ 9.27×10^{-24} A-m² ซึ่งใช้เป็นหน่วยระดับจุลภาคของโมเมนต์แม่เหล็ก สำหรับอิเล็กตรอนแต่ละตัวในอะตอมมีค่าโมเมนต์แม่เหล็กจากสปินเป็น $\pm \mu_B$ (ค่าบวกสำหรับทิศขึ้น และลบสำหรับทิศลง หรือเขียนเป็น $m_s \mu_B$ โดยที่ $m_s = \pm 1$) นอกจากนั้นโมเมนต์แม่เหล็กจากการที่อิเล็กตรอนโคจรรอบนิวเคลียสมีค่าเท่ากับ $m_l \mu_B$ โดยโมเมนต์แม่เหล็กนี้ของอิเล็กตรอนบางคู่ที่มีสถานะ n, l เดียวกันจะหักล้างกันเอง และในกรณีของโมเมนต์จากสปินก็เช่นกัน ยกตัวอย่างเช่น โมเมนต์แม่เหล็กจากสปินของอิเล็กตรอนตัวหนึ่งในชั้น n, l, m_l หนึ่งๆ ที่มีค่าขึ้นจะหักล้างกับ โมเมนต์ค่าลงของอิเล็กตรอนอีกตัวหนึ่งในชั้น n, l, m_l เดียวกันตามการบรรจุอิเล็กตรอนลงในแต่ละระดับชั้น n, l, m_l, m_s ของอะตอมจนกระทั่งถึงระดับชั้นที่มีพลังงานสูงสุด ค่าโมเมนต์แม่เหล็กสุทธิของอะตอมหนึ่งๆ จึงเท่ากับผลรวมของโมเมนต์แม่เหล็กของอิเล็กตรอนที่เกี่ยวข้องทั้งหมด โดยรวมโมเมนต์แม่เหล็กทั้งจากอิเล็กตรอนโคจรรอบนิวเคลียสกับแบบอิเล็กตรอนสปินและคิดผลของการหักล้างเป็นคู่ๆ ดังนั้นวัสดุที่มีอะตอมที่มีการบรรจุอิเล็กตรอนเต็มชั้นจึงไม่สามารถถูกเหนี่ยวนำให้เป็นแม่เหล็กอย่างถาวรได้ วัสดุในกลุ่มนี้ ได้แก่ พวกแก๊สเฉื่อย (He, Ne, Ar เป็นต้น) รวมทั้ง วัสดุไอออนิก วัสดุทุกชนิดจะแสดงสภาพความเป็นแม่เหล็กโดยขึ้นกับลักษณะการตอบสนองของไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กจากอิเล็กตรอนและอะตอมของวัสดุนั้นที่มีต่อสนามแม่เหล็กที่มากระทำจากภายนอก สภาพแม่เหล็กของวัสดุแสดงได้ด้วยปริมาณ สภาพแม่เหล็ก ($\vec{M}$: magnetization) ซึ่งเป็นจำนวนไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กในวัสดุต่อปริมาตร ซึ่งค่า $\vec{M}$ ของวัสดุตอบสนองต่อความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ดังสมการ

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (1)$$

¹อาจารย์ (ดร.) ภาควิชาฟิสิกส์และวัสดุศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ เช่น $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}, \mu, \chi_m$ ที่มีต่อสมบัติทางแม่เหล็กของวัสดุ สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \\ &= \mu_0\mu_r\vec{H} \\ &= \mu\vec{H}\end{aligned}\quad (2)$$

โดยที่

$\vec{B}$ คือ ความหนาแน่นเส้นสนามแม่เหล็กหรือฟลักซ์แม่เหล็ก (magnetic flux density)

$\vec{H}$ คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity)

$\vec{M}$ คือ สภาพแม่เหล็ก (magnetization)

χ_m คือ สภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็ก (magnetic susceptibility)

μ_0 คือ สภาพซึมซับทางแม่เหล็กในสุญญากาศ (vacuum permeability) มีค่าเท่ากับ $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

μ คือ สภาพซึมซับทางแม่เหล็ก (permeability)

μ_r คือ สภาพซึมซับทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ (relative permeability)

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง สภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็ก กับสภาพซึมซับทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ ดังสมการ (3)

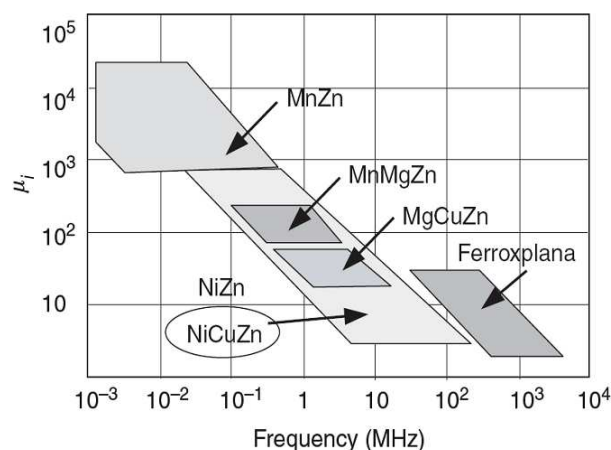
$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (3)$$

โลหะและโลหะผสมสามารถนำมาใช้เป็นวัสดุแม่เหล็กในงานทางด้านอิเล็กทรอนิกส์และอื่นๆ เนื่องจากโลหะและโลหะผสมมีสมบัติเด่น คือ มีค่าสภาพซึมซับทางแม่เหล็ก μ สูง ซึ่งทำให้สามารถมีค่าความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ ในเนื้อวัสดุสูง แต่อย่างไรก็ตามการนำโลหะและโลหะผสมมาประยุกต์ใช้

ทางด้านแม่เหล็กมีข้อจำกัด คือ จะมีการสูญเสียพลังงานโดยเกิดความร้อนเนื่องจากสามารถเกิดกระแสเหนี่ยวนำหรือกระแสไฟฟ้ายึดี้ (eddy current) จำนวนมาก ดังนั้นจึงมีการประดิษฐ์และปรับปรุงให้วัสดุโลหะและโลหะผสมเป็นแผ่นบางๆ หลายแผ่นมาต่อกันเพื่อลดกระแสเหนี่ยวนำ ทางหนึ่งที่สามารถแก้ไขการสูญเสียพลังงานเนื่องจากกระแสเหนี่ยวนำก็คือการใช้วัสดุเซรามิกที่มีคุณสมบัติเด่นทางแม่เหล็ก เช่น สารประกอบออกไซด์เชิงซ้อนที่ประกอบด้วยไอออนของเหล็กที่มีประจุ $3+ (Fe^{3+})$ ซึ่งโดยทั่วไป

จะเรียกว่า เฟร์ไรต์ (ferrite) วัสดุเฟร์ไรต์จะมีสภาพแม่เหล็กแบบเฟร์รี (ferrimagnetism) กล่าวคือ วัสดุเซรามิกชนิดนี้ประกอบด้วยไอออนของโลหะและไอออนของโลหะ ซึ่งมีขนาดไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กไม่เท่ากันและมีทิศตรงข้ามกัน เป็นผลให้มีอำนาจแม่เหล็กเหลืออยู่ แม้จะไม่มีสนาม $\vec{H}$ แล้วก็ตาม และสามารถปรับแนวให้ขนานกันได้โดยมีไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กสุทธิอยู่ในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง ซึ่งสารเซรามิกต่างชนิดสามารถมีสมบัติทางแม่เหล็กต่างกัน วัสดุเฟร์ไรต์สามารถแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ เฟร์ไรต์อ่อน (soft ferrites) และ เฟร์ไรต์แข็ง (hard ferrites) โดยอาจจำแนกสมบัติแม่เหล็กจากพื้นที่ลูปหรือพื้นที่วงฮิสเทอรีซิส (hysteresis loop) ซึ่งหาได้จากผลคูณของ $\vec{B} \cdot \vec{H}$ ที่แสดงค่าของพลังงานแม่เหล็กที่สูญเสีย/หนึ่งหน่วยปริมาตร หรือ พลังงานที่ใช้หักล้างสภาพแม่เหล็กนั่นเอง อันเป็นลักษณะเฉพาะที่สำคัญในการจำแนกวัสดุแม่เหล็ก ถ้าผลคูณ $\vec{B} \cdot \vec{H}$ มาก วัสดุนั้นมีความสามารถเป็นแม่เหล็กแข็ง ในทางตรงข้าม ถ้าพื้นที่ $\vec{B} \cdot \vec{H}$ มีน้อยวัสดุนั้นมีความสามารถเป็นแม่เหล็กอ่อน

เฟร์ไรต์แข็งมีสมบัติเป็นแม่เหล็กถาวรซึ่งต้องใช้สนามแม่เหล็กภายนอกแรงสูงเพื่อทำเป็นแม่เหล็กและการลบล้างอำนาจแม่เหล็กทำได้ยากเนื่องจากพฤติกรรมของวงฮิสเทอรีซิสที่มีค่ามาก ส่วนการนำเฟร์ไรต์แข็งไปประยุกต์ใช้งานก็อย่างเช่นมอเตอร์และลำโพง ในขณะที่เฟร์ไรต์อ่อนเป็นวัสดุที่ง่ายต่อการทำเป็นแม่เหล็กหรือลบล้างอำนาจแม่เหล็ก จัดเป็นแม่เหล็กชั่วคราวซึ่งมีลักษณะวงฮิสเทอรีซิสบางและแคบ ส่งผลให้วัสดุมีค่าสภาพซึมซับทางแม่เหล็กเริ่มต้น (initial permeability, μ_i) สูง ซึ่งถูกใช้ในอุปกรณ์ที่ต้องอยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงกลับไปกลับมาและต้องการสูญเสียพลังงานต่ำที่สุด ดังนั้น ลักษณะเด่นของวัสดุนี้คือการตอบสนองต่อการใช้งานที่ความถี่สูงได้ดีมาก วัสดุเฟร์ไรต์อ่อนมีสูตรโครงสร้าง 2 แบบ คือ แบบสปินเนล (spinel-type (MFe_2O_4)) และแบบการ์เนต (garnet-type $(M_3Fe_5O_{12})$) เมื่อ M คือ อะตอมของธาตุโลหะ เช่น โคบอลต์ (Co) นิกเกิล (Ni) สังกะสี (Zn) ทองแดง (Cu) เป็นต้น ตัวอย่างวัสดุเฟร์ไรต์อ่อนที่นิยมนำไปใช้งานอย่างกว้างขวางในช่วงความถี่สูง ได้แก่ $MnZn$, $MnMgZn$, $MnMgAl$, $NiZn$ และ $MnCuZn$ เป็นต้น โดยมีสภาพซึมซับทางแม่เหล็กเริ่มต้นขึ้นกับความถี่และการนำไปใช้งานแสดงดังรูปที่ 1 และ ตารางที่ 1



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และสภาพซึมซับทางแม่เหล็กเริ่มต้นในวัสดุเซรามิกแม่เหล็กชนิดต่างๆ [1]

ตารางที่ 1 การประยุกต์ของแม่เหล็กเซรามิกชนิดต่างๆ ที่สัมพันธ์กับค่าความถี่ในการใช้งาน [1]

การประยุกต์ใช้งาน	ความถี่	ชนิดของเฟอร์ไรต์
วัสดุแกน (core)	1 kHz~1 MHz	MnZn
หม้อแปลง (transformer)	~300 kHz	MnZn
โยก (yoke)	15.75 kHz	MnZn, MnMgZn
สายอากาศ (antenna)	0.4~50 MHz	NiZn
หัวอ่านแม่เหล็ก (magnetic head)	1 kHz~1 MHz	MnZn
ไอโซเลเตอร์ (isolator)	30 MHz~30 GHz	MnMgAl
สวิตช์อุณหภูมิ (temperature switch)	30 MHz~30 GHz	MnCuZn

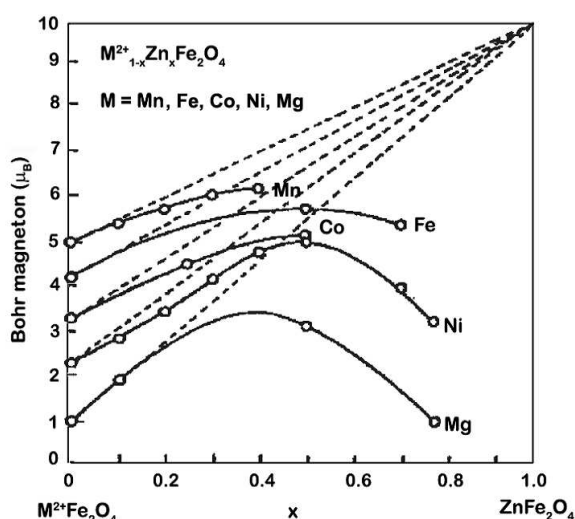
ลักษณะเฉพาะของเฟอร์ไรต์ที่สำคัญต่อการนำไปใช้งานที่ความถี่สูง ได้แก่ 1) ค่าสภาพซึมซับทางแม่เหล็กสูง, 2) ค่าสภาพซึมซับทางแม่เหล็กมีความเสถียรต่ออุณหภูมิและเวลา, และ 3) มีการสูญเสียทางแม่เหล็กต่ำ ซึ่งลักษณะเฉพาะทั้งหมดนี้อาจเกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้ แต่จะขึ้นกับลักษณะการนำไปใช้งานและชนิดของวัสดุเฟอร์ไรต์ อย่างไรก็ตามในการนำวัสดุเซรามิกแม่เหล็กไปใช้งานอาจมีการสูญเสียทางแม่เหล็ก (magnetic loss) เกิดขึ้นโดยสาเหตุของการสูญเสียทางแม่เหล็ก สามารถแบ่งออกเป็น 3 สาเหตุหลัก คือ การสูญเสียฮิสเทอรีซิส (hysteresis loss) การสูญเสียจากกระแสเหนี่ยวนำ (eddy current loss) และการสูญเสียคงค้าง

(residual loss) ซึ่งเกิดเนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างสนามแม่เหล็กและฟลักซ์แม่เหล็กเหนี่ยวนำคงค้างในวัสดุหรือผลึก ดังนั้นในการลดความสูญเสียทางแม่เหล็กและเพิ่มประสิทธิภาพที่เกี่ยวข้องกับสมบัติทางแม่เหล็กนั้นทำได้โดยการเจือด้วยอะตอมโลหะและการปรับปรุงกระบวนการผลิตเพื่อให้ได้ขนาดเกรนและโครงสร้างทางจุลภาคที่เหมาะสม เป็นต้น

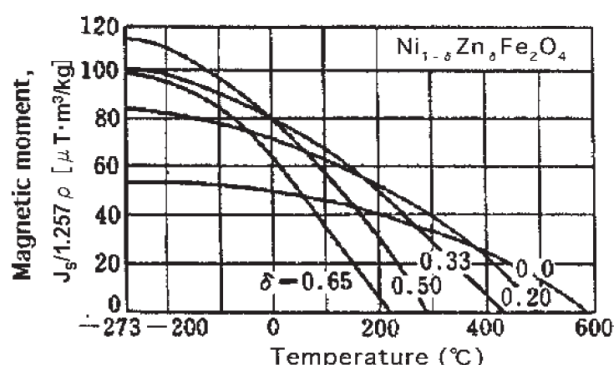
ในการเพิ่มประสิทธิภาพและปรับปรุงวัสดุเฟอร์ไรต์อ่อนเพื่อลดค่าความสูญเสียทางแม่เหล็กและเพิ่มสภาพซึมซับทางแม่เหล็กเริ่มต้น μ_i เพื่อนำไปใช้ที่ความถี่สูงทำได้โดยการเจือด้วยอะตอมโลหะ ยกตัวอย่างเช่น ซิงก์เฟอร์ไรต์ (ZnFe_2O_4) หากมีการเจือด้วยอะตอมของโลหะแมงกานีส (Mn) เหล็ก (Fe) โคบอลต์ (Co) นิกเกิล (Ni) แมกนีเซียม (Mg) ในปริมาณต่างๆ ที่ตำแหน่ง A-site นั้นคือการแทนที่อะตอมของสังกะสี จะทำให้มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงโมเมนต์แม่เหล็กดังแสดงใน รูปที่ 2 นอกจากอะตอมของโลหะและปริมาณการเจือจะมีผลต่อความเป็นแม่เหล็กแล้วอุณหภูมิก็มีผลต่อสมบัติทางแม่เหล็กเช่นกัน จาก รูปที่ 3 แสดงถึงโมเมนต์แม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงโดยขึ้นกับอุณหภูมิของวัสดุเฟอร์ไรต์ชนิด NiZn

นอกจากนั้นอิทธิพลที่มีผลต่อค่าสภาพซึมซับทางแม่เหล็ก ได้แก่ 1) องค์ประกอบทางเคมีและโครงสร้างทางจุลภาคของสารประกอบเซรามิก, 2) ขนาดเกรน กล่าวคือเมื่อขนาดเกรนมีขนาดใหญ่ทำให้ค่าสภาพซึมซับทางแม่เหล็กมีค่ามาก เนื่องจากมีโดเมนโมเมนต์แม่เหล็กมาก, 3) ความไม่เป็นเนื้อเดียวกันในสารเซรามิกจะขัดขวางการเคลื่อนที่ของผนังโดเมน เช่น หากมีรูพรุนหรือเกิดความไม่สมบูรณ์ของผลึกขึ้น เช่น ดิสโลเคชันแบบขอบ (edge dislocation) ดิสโลเคชันแบบเส้น (line dislocation) เป็นต้น ทำให้ข้อบกพร่องเหล่านี้ขัดขวางการเคลื่อนที่ของผนังโดเมนได้ ดังนั้นการเพิ่มประสิทธิภาพและการพัฒนาเซรามิกแม่เหล็กให้มีสมบัติทางแม่เหล็กแตกต่างกันไปนั้นทำได้โดยการปรับปรุงกระบวนการผลิต เช่น ถ้าปริมาณของเหล็กออกไซด์ชนิดเฮมาไทต์ (Fe_2O_3) เกิดขึ้นในกระบวนการผลิตมากเกินไปกว่าที่ควรจะมีตามปริมาณสัมพันธ์ (stoichiometry) จะทำให้วัสดุมีความเป็นแม่เหล็กสูง แต่ปริมาณ Fe_2O_3 ที่มีมากเกินไปจะอยู่ในรูป $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ หรือแมกนีไทต์ (Fe_3O_4) ได้ ในการควบคุมเหล็กออกไซด์ให้มีปริมาณเหมาะสมไม่น้อยหรือมากเกินไปสามารถทำได้โดยควบคุมความดันของออกซิเจนระหว่างการให้ความร้อนโดยการเผาเคลือบ

ตัวอย่างกระบวนการผลิตวัสดุเฟอร์ไรต์ชนิด MnZn ทำได้โดยใช้ ออกไซด์หรือคาร์บอนของแมงกานีสหรือสังกะสีเป็นวัสดุตั้งต้น ในกระบวนการผลิตโดยการผสมสารตั้งต้นเข้าด้วยกันจากนั้น ทำการเผา ขั้นตอนการเผาแคลไซต์และการบดเป็นขั้นตอนที่สำคัญ ในการกำหนดคุณสมบัติของเฟอร์ไรต์ โดยทั่วไปแล้วการเผาแคล ไซต์จะอยู่ในช่วงอุณหภูมิ 800-1000 องศาเซลเซียส ดังนั้นการเผา แคลไซต์วัสดุเฟอร์ไรต์ MnZn จะทำให้เกิดสารประกอบออกไซด์ อื่นๆ ขึ้น เช่น $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3(\text{ss})$, $\alpha\text{-MnO}_3(\text{ss})$, ZnFe_2O_4 , MnFe_2O_4 และ ZnFe_2O_4 ดังนั้นการควบคุมปริมาณความดันของออกซิเจน ระหว่างกระบวนการเผาเป็นสิ่งสำคัญ ซึ่งสามารถควบคุม โครงสร้างจุลภาคและสมบัติของเฟอร์ไรต์ได้อีกด้วย



รูปที่ 2 ผลของอะตอมโลหะที่มีต่อจำนวน Bohr magneton ของ ซิงก์เฟอร์ไรต์ที่เจือด้วยโลหะชนิดต่างๆ [1]



รูปที่ 3 โมเมนต์แม่เหล็กแปรผันตามอุณหภูมิของเฟอร์ไรต์ชนิด NiZn [1]

จากที่ได้กล่าวมาจะเห็นว่าวัสดุเซรามิกแม่เหล็กนิยมนำมาใช้ประโยชน์อย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรมทางด้านไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ เนื่องจากสามารถลดการสูญเสียทางแม่เหล็กและมีสภาพซึมซับทางแม่เหล็กสูง กระบวนการผลิตเพื่อให้ได้เซรามิกแม่เหล็กที่มีสมบัติแม่เหล็กต่างๆ ที่เหมาะสำหรับการประยุกต์ใช้งานนั้นมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการพัฒนาวัสดุเซรามิกแม่เหล็ก ยิ่งไปกว่านั้นเทคโนโลยีต่างๆ ที่เข้ามามีบทบาททำให้แนวโน้มในอนาคตการประดิษฐ์คิดค้นเซรามิกแม่เหล็กสูตรใหม่ๆ ด้วยเทคโนโลยีการผลิตวัสดุแบบใหม่ๆ ที่อาศัยความก้าวหน้าของเทคโนโลยีอื่นๆ เข้ามา จึงทำให้เป็นทางเลือกใหม่สำหรับการพัฒนาวัสดุเซรามิกแม่เหล็กเพื่ออำนวยความสะดวกสบายต่อการดำรงชีวิตของมนุษย์เป็นอย่างมาก นอกจากนี้ยังเสริมปัจจัยพื้นฐานในการดำรงชีวิตและยกระดับคุณภาพชีวิตของมนุษย์ให้ดียิ่งขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ อาจารย์ชาญกิจ กันล่อง อาจารย์ประจำภาควิชาฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ผู้ให้คำแนะนำทางด้านการเรียบเรียงเนื้อหาการใช้ภาษาและศัพท์บัญญัติวิทยาศาสตร์ที่ถูกต้องตามหลักวิชาการแก่ผู้เขียน และช่วยปรับปรุงบทความให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] S. Somiya, F. Aldinger, N. Claussen, R.M. Spriggs, K. Uchino, K. Koumoto, M. Kaneno, Handbook of Advanced Ceramics, Elsevier Inc., 2003.
- [2] H. Mostaghaci, in Advanced Ceramic Materials: Applications of Advanced Materials in High-Tech Society I, Trans Tech Publication, Switzerland, 1996.
- [3] W.D. Kingery, H.K. Bowen and D.R. Uhlmann, Introduction to Ceramic 2nd Edition, John Wiley&Sons, 1976.
- [4] M.N. Rahaman, Ceramic Processing and Sintering, Marcel Dekker Inc., New York, 1995.
- [5] D.W. Richerson, Modern Ceramic Engineering: Properties, Processing, and Use in Design, Marcel Inc., New York, 1992.

ว่าด้วยฟิสิกส์ของการประหยัดพลังงานในการเดินทาง

ปิยบุตร นุริคำ¹

โลกทุกวันนี้เป็นโลกที่ต้องใช้พลังงานในการขับเคลื่อนกิจกรรมต่างๆ ในทุกระดับ ตั้งแต่ การเดินทางของปัจเจก ระบบไฟฟ้าตามบ้านเรือน ระบบขนส่งมวลชน เครือข่ายโรงงานอุตสาหกรรม ระบบสื่อสารโทรคมนาคม ปกติแล้วกฎแห่งความเฉื่อยของการเคลื่อนที่บอกเราว่าการเคลื่อนที่เป็นสภาพที่ดำรงอยู่เองของวัตถุ ความเร็วของวัตถุจะคงตัวตลอดเวลาหากไม่มีแรงมากระทำ ทว่าการเดินทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งบนโลกจำเป็นต้องอาศัยพลังงานในการขับเคลื่อนอยู่ตลอดเวลาเพราะมีแรงต้านอากาศและแรงเสียดทาน เป็นสถานการณ์ที่แตกต่างจากการเคลื่อนที่ของจรวดในอวกาศที่ความเร็วแทบไม่เปลี่ยนแปลง (จะเปลี่ยนเพราะอิทธิพลเชิงความโน้มถ่วงของมวลก้อนอื่นๆ ที่เข้ามาใกล้)

ในขณะที่แรงต้านอากาศและแรงเสียดทานทำให้วัตถุที่เคลื่อนที่บนโลกเสียพลังงานจนไป การดำรงอยู่ของอากาศและแรงเสียดทานก็เป็นสิ่งที่ขาดไม่ได้ในการขับเคลื่อนที่พาหนะอย่างเครื่องบิน รถยนต์ รถไฟ (ยกเว้นรถไฟแบบลอยตัวเหนือรางด้วยแรงแม่เหล็กไม่จำเป็นต้องอาศัยแรงเสียดทาน) ปัญหาที่น่าสนใจที่เราควรถามคือด้วยเชื้อเพลิงที่กำหนดให้ปริมาณหนึ่ง เราควรวางแผนขับเคลื่อนยานพาหนะอย่างไรให้ประหยัดพลังงานที่สุดในการเดินทาง

ในบทความนี้ เราจะมาพิจารณาหาวิธีการขับเคลื่อนพาหนะที่ประหยัดพลังงานที่สุดในสถานการณ์ที่มีแรงต้านอากาศและแรงเสียดทานเมื่อกำหนดให้พาหนะต้องเดินทางเป็นระยะทางค่าหนึ่งภายในเวลาที่กำหนด เรานิยามปัญหาว่า “ในการเดินทางเป็นระยะทาง x ภายในเวลา t เราควรเร่งให้ยานพาหนะจนมีอัตราเร็วเป็น v_i ; $i = 1, 2, \dots, N$ (โดยที่ i แสดงครั้งที่เร่ง) เป็นกี่ครั้ง อย่างไร พลังงานที่ใช้ในการเร่งหรือการขับเคลื่อนทั้งหมดจึงจะมีค่าน้อยที่สุดเท่าที่เป็นไปได้?”

เราสมมติให้ในการขับเคลื่อนหรือการเร่งของเราทุกครั้งยานพาหนะจะถูกทำให้มีอัตราเร็วเป็น v_i ในฉับพลันทันใด นั้น

คือพลังงานจากเชื้อเพลิงจะถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ของยานพาหนะในช่วงเวลาที่น้อยมากจนละทิ้งได้ สมมติฐานดังกล่าวตั้งขึ้นมาเพื่อแยกประเด็นการประหยัดพลังงานจากประสิทธิภาพการเร่งของเครื่องยนต์ ณ จำนวนรอบต่างๆ ออกไป เพื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของพาหนะที่ขึ้นกับปัจจัยจากแรงต้านภายนอกเท่านั้น ปัจจัยจากภายใน เช่น การทำงานของเครื่องยนต์ซึ่งขึ้นกับการออกแบบ อายุการใช้งาน ฯลฯ จึงจะไม่ถูกนำมาพิจารณาในบทความนี้เรายังจะพิจารณาเฉพาะการเคลื่อนที่บนพื้นราบที่แรงโน้มถ่วงไม่ทำงานในการจุดเร่งหรือหน่วงยานพาหนะอีกด้วย ซึ่งถือได้ว่าเป็นการประมาณการเดินทางบนพื้นโลกที่ดีเนื่องจากการเดินทางส่วนใหญ่กินระยะทางในแนวนอนมากกว่าระยะความเปลี่ยนแปลงทางความสูงอยู่มาก¹ นอกจากนี้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ของแรงต้านจะสมมติให้อยู่ในรูป

$$F_{\text{air}} = -mv^2$$

$$F_{\text{friction}} = -\mu mg = \text{constant}$$

โดยแรงเสียดทานจะสมมติให้ด้านการเคลื่อนที่เสมอ ในความเป็นจริงแรงเสียดทานจะเป็นตัวผลักดันให้ยานพาหนะเคลื่อนที่ด้วยความเร่งจนมีอัตราเร็วสูงขึ้นไปตอนที่ยานพาหนะถูกเร่ง แต่เนื่องจากในที่นี้เราสมมติให้การเร่งของยานพาหนะเกิดขึ้นอย่างฉับพลัน แรงเสียดทานโดยทั่วไปจึงเกิดขึ้นนอกเหนือจากช่วงการเร่งนั้นและจึงอยู่ในทิศด้านการเคลื่อนที่ตลอดเวลา

สมการการเคลื่อนที่ของยานพาหนะจึงอยู่ในรูป

$$\ddot{x} = -a\dot{x}^2 - \mu g$$

เขียน $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$ แล้วอินทิเกรตแยกตัวแปรเวลากับอัตราเร็ว

¹ผู้ช่วยศาสตราจารย์ (ดร.) ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\int_0^t dt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{av^2 + \mu g}$$

จะได้

$$t = \frac{1}{\sqrt{a\mu g}} (\tan^{-1} u_0 - \tan^{-1} u)$$

โดยที่ $u_0 \equiv \sqrt{\frac{a}{\mu g}} v_0$ และ $u \equiv \sqrt{\frac{a}{\mu g}} v$ แล้วจัดรูปได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\mu g}{a}} \tan(-t\sqrt{a\mu g} + \tan^{-1} u_0)$$

อินทิเกรตต่อเพื่อหาระยะทาง จะได้

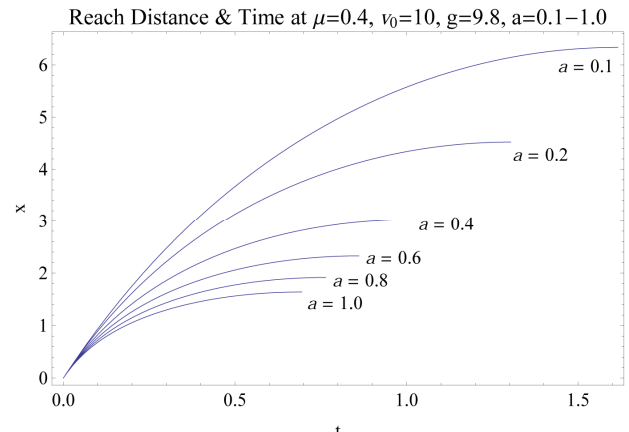
$$x = \frac{1}{a} \ln \left[\frac{\cos(-t\sqrt{a\mu g} + \tan^{-1} u_0)}{\cos(\tan^{-1} u_0)} \right]$$

เบื้องต้น เราอาจคิดว่ากรณีที่ประหยัดพลังงานที่สุดคือกรณีที่ใช้อัตราเร็วตั้งต้นเป็น v_0 (ภายหลังการเร่ง) และอัตราเร็วสุดท้ายเป็นศูนย์พอดี ซึ่งหมายถึงยานพาหนะถูกขับเคลื่อนให้มีอัตราเร็วตั้งต้นค่าหนึ่งแล้วเดินทางไปจนได้ระยะทาง x โดยใช้เวลา t และถึงจุดหมายพอดีกับที่ยานพาหนะหยุดนิ่ง กรณีพอดีถึงที่ $v=0$ นี้ ระยะทางและเวลาทั้งหมดในการเดินทางจะกลายเป็น

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{a\mu g}} \tan^{-1} u_0 \\ x &= -\frac{1}{a} \ln[\cos(\tan^{-1} u_0)] \\ &= \frac{1}{a} \ln(\sqrt{1+u_0^2}) \end{aligned} \quad (1)$$

เราจะตั้งชื่อการขับเคลื่อนที่ทำให้พาหนะพอดีไปถึงระยะทาง x โดยมีความเร็วสุดท้ายเป็นศูนย์ว่า **การขับเคลื่อนพอดีถึง (minimally driven journey, MDJ)**

ตัวอย่างกราฟระหว่างระยะทางกับเวลาของกรณีขับเคลื่อนแบบพอดีถึงเป็นดัง รูปที่ 1 คำถามคือ การขับเคลื่อนแบบพอดีถึงนี้ประหยัดพลังงานที่สุดหรือไม่ ภายใต้เงื่อนไขใด จะเห็นว่าต่อการขับเคลื่อนหนึ่งครั้งจนหยุดที่ระยะทาง x ต้องใช้พลังงาน $E_{MDJ} = \frac{1}{2} m v_0^2$ จึงจะได้ระยะทางดังกล่าวโดยใช้



รูปที่ 1: แสดงถึงระยะทางกับเวลาในการเคลื่อนที่แบบพอดีถึงที่มีสัมประสิทธิ์แรงต้าน a ค่าต่างๆ หน่วยที่ใช้เป็นหน่วยในระบบ SI คือระยะทางเป็นเมตรและเวลาเป็นวินาที

ระยะเวลาที่กำหนดและอัตราเร็วตั้งต้น v_0 ที่กำหนดด้วยเช่นกัน หากเราขับเคลื่อนด้วยอัตราเร็วตั้งต้นมากกว่านี้ ยานพาหนะจะไปถึงระยะทางเท่ากันภายในเวลาที่สั้นกว่า (และยังเหลือความเร็วที่มากกว่าศูนย์) เพราะฉะนั้นหากไม่มีกำหนดเวลาในการเดินทางสำหรับการขับเคลื่อนแค่หนึ่งครั้งนี้ กรณีพอดีถึงนี้อาจดูเหมือนว่าจะประหยัดพลังงานที่สุด

คราวนี้สมมติว่าในการเดินทางระยะทางเท่ากัน เราทำการขับเคลื่อนสองครั้งโดยให้การขับเคลื่อนครั้งที่สองทำเมื่อพาหนะหยุดนิ่งจากการขับเคลื่อนครั้งแรกแล้ว กล่าวคือ ขับเคลื่อนครั้งแรกได้อัตราเร็วตั้งต้น v_1 เดินทางได้ระยะทาง x_1 แล้วหยุดขับเคลื่อนครั้งที่สองได้อัตราเร็วตั้งต้น v_2 เดินทางต่อด้วยระยะทาง x_2 แล้วหยุด เราจะมีความสัมพันธ์ $x = x_1 + x_2$ โดยที่

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a} \ln(\sqrt{1+u_0^2}), \\ x_i &= \frac{1}{a} \ln(\sqrt{1+u_i^2}); \quad i=1,2 \end{aligned}$$

เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} 1+u_0^2 &= (1+u_1^2)(1+u_2^2), \\ u_i &\equiv \sqrt{\frac{a}{\mu g}} v_i; \quad i=0,1,2 \end{aligned} \quad (2)$$

ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $u_0^2 > u_1^2 + u_2^2$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง $\frac{1}{2}mv_0^2 > \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$ พลังงานที่ใช้ขับเคลื่อนสองครั้งในกรณีหลังมีค่าน้อยกว่ากรณีแรกที่มีการเคลื่อนที่ครั้งเดียว! นี่เป็นผลที่สำคัญมาก เพราะเราสามารถขยายผลนี้กับการเคลื่อนที่จากการขับเคลื่อนย่อยอีกหลายๆ ครั้งได้ นั่นคือหากเราทำการขับเคลื่อนอีกสองครั้งเพื่อให้ยานพาหนะเคลื่อนที่ในระยะทาง x_1 และทำแบบเดียวกันกับการเคลื่อนที่ต่อมาในระยะทาง x_2 รวมเป็นการขับเคลื่อนทั้งหมดสี่ครั้งในระยะทาง x พลังงานที่ใช้ทั้งหมดจะเป็น $\frac{1}{2}m\left(\sum_{i=1}^4 v_i^2\right)$ ซึ่งน้อยกว่า $\frac{1}{2}m\left(\sum_{i=1}^2 v_i^2\right)$ และน้อยกว่า $\frac{1}{2}mv_0^2$ ด้วย นั่นหมายถึงเรายังแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นการเคลื่อนที่แบบขับเคลื่อนพอดิจึง MDJ ยิ่งมากครั้งเท่าไร ก็ยิ่งประหยัดพลังงานเชื้อเพลิงในการขับเคลื่อนมากเท่านั้น เราสามารถขยายผลสมการ (2) ให้เป็นทั่วไปโดยแบ่งการขับเคลื่อนแบบพอดิจึงเป็น N ครั้ง แต่ละช่วงได้ระยะทาง $x_i ; i = 1, 2, \dots, N$ จากความสัมพันธ์ $x = \sum_{i=1}^N x_i$ เราจะได้

$$1 + u_0^2 = \prod_{i=1}^N (1 + u_i^2) \quad (3)$$

ซึ่งการันตีว่าพลังงานที่ต้องใช้ในการขับเคลื่อนทั้งหมด N ครั้งจะน้อยกว่าการขับเคลื่อนแค่ครั้งเดียวเพราะ $v_0^2 > \sum_{i=1}^N v_i^2$

หากเราทำการแบ่งย่อยระยะทางเป็นการเคลื่อนที่แบบขับเคลื่อนพอดิจึงจำนวนมาก ๆ ครั้งจนถึงอนันต์ ในที่สุดกราฟของการเคลื่อนที่ระหว่างระยะทางกับเวลาจะกลายเป็นเส้นทางที่

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ และ } t = \sum_{i=1}^{\infty} t_i$$

โดยช่วงเวลาของแต่ละการเคลื่อนที่ขยับเป็นไปตามสมการ (1) ข้อเสียของการแบ่งย่อยการขับเคลื่อนเช่นนี้คือเวลาที่ใช้ในการเดินทางทั้งหมดจะเพิ่มขึ้นตามจำนวนครั้งที่แบ่งย่อย และถ้าแบ่งย่อยเป็นอนันต์ครั้ง เวลาจะเป็นอนันต์เช่นกัน เช่น หากแบ่งเป็นช่วงระยะทางขยับให้เท่ากันทั้งหมด จากสมการ (3) อัตราเร็วการขับเคลื่อนแต่ละช่วง v_i จะสัมพันธ์กับ u_i ที่อยู่ในรูป

$$u_i = \sqrt{(1 + u_0^2)^{1/N} - 1} \text{ สังเกตว่าสำหรับค่า } u_0 \text{ หนึ่งๆ ค่า}$$

u_i ในการขับเคลื่อนพอดิจึงหลายช่วงจะลดลงเมื่อใช้จำนวนช่วง N มากขึ้น และโดยใช้ (1) สำหรับแต่ละ t_i จะต้องใช้เวลาดำเนินทางทั้งหมด

$$t = \frac{1}{\sqrt{a\mu g}} \lim_{N \rightarrow \infty} N \tan^{-1} \sqrt{(1 + u_0^2)^{1/N} - 1}$$

ซึ่งเป็นอนันต์

ในทางปฏิบัติมีเงื่อนไขทางเวลาดำเนินทาง t ที่จำกัด ซึ่งจะกำหนดว่าเราสามารถแบ่งการขับเคลื่อนเป็นช่วงย่อยได้กี่ช่วง

กล่าวคือ $\sum_{i=1}^{N+1} t_i > t > \sum_{i=1}^N t_i$ โดยที่ N เป็นจำนวนเต็มบวก หากสมมติเราแบ่งการเดินทางเป็นการขับเคลื่อนย่อยในระยะทางเท่ากันแล้ว เงื่อนไขเวลาดำเนินทางที่จำกัดก็จะกลายเป็น

$$t \geq \frac{1}{\sqrt{a\mu g}} N \tan^{-1} \sqrt{(1 + u_0^2)^{1/N} - 1}$$

ซึ่งเราต้องทำการแก้หาค่า N ออกมาสำหรับแต่ละค่าของพารามิเตอร์ u_0 และ t จะเห็นว่าช่วงเวลาการเดินทาง t ที่ได้จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มของจำนวนครั้งการขับเคลื่อนย่อยและจะเป็นอนันต์เมื่อจำนวนครั้งการขับเคลื่อนย่อยเป็นอนันต์ การขับเคลื่อนเช่นนี้แม้ประหยัดพลังงานกว่าการขับเคลื่อนครั้งเดียวแต่ก็ใช้เวลามากกว่าจึงไม่เหมาะกับการประหยัดพลังงานในแบบที่มีเงื่อนไขจำกัดเวลาในการเดินทาง

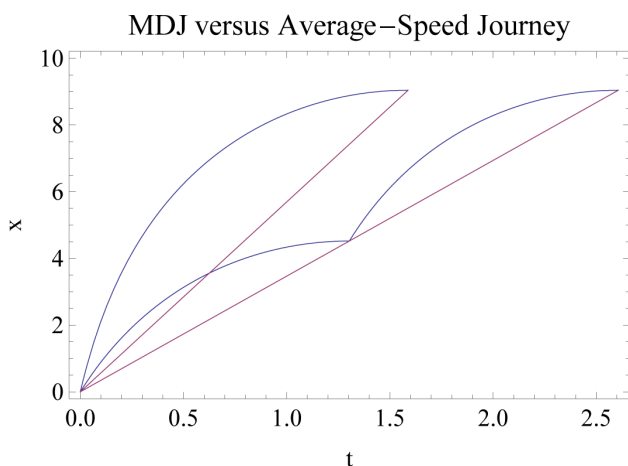
ที่จริงแล้วเราไม่จำเป็นต้องขับเคลื่อนแบบพอดิจึงทุกครั้งในการขับเคลื่อนย่อย เช่น เราอาจขับเคลื่อนอย่างต่อเนื่องให้ยานพาหนะมีอัตราเร็วคงที่เท่ากับอัตราเร็วเฉลี่ย $\langle v \rangle = x/t$ นั่นคือระยะทางทั้งหมดหารด้วยเวลาทั้งหมดก็ได้ ในกรณีนี้พลังงานที่ต้องใช้ในการขับเคลื่อนทั้งหมดจะเท่ากับงานที่แรงต้านอากาศกับแรงเสียดทานกระทำ นั่นคือเท่ากับ $E_{\langle v \rangle} = mx \left[\mu g + a(x/t)^2 \right]$

เราลองมาเปรียบเทียบดูว่า กรณีวิ่งด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยตลอดการเดินทาง กับ กรณีขับเคลื่อนพอดิจึงแบบครั้งเดียวอย่างไหนจะประหยัดพลังงานมากกว่ากันเมื่อเดินทางเป็นระยะทางเท่ากันด้วยเวลาเท่ากัน เนื่องจากพลังงานที่ใช้ขับเคลื่อนในกรณีขับเคลื่อนพอดิจึงเท่ากับ $E_{MDJ} = \frac{1}{2}m \left(\frac{\mu g}{a} \right) u_0^2$ ผลต่างของพลังงานทั้งสองกรณี $\Delta E \equiv E_{MDJ} - E_{\langle v \rangle}$ จึงเป็น

$$\Delta E = m \frac{\mu g}{a} F(u_0) ;$$

$$F(z) \equiv \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) - \frac{1}{8} \frac{[\ln(1+z^2)]^3}{(\tan^{-1} z)^2}$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าฟังก์ชัน $F(z) \geq 0$ สำหรับ $z \geq 0$ ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่าการเดินทางแบบอัตราเร็วคงที่ที่อัตราเร็วเฉลี่ยตลอดเวลาประหยัดพลังงานกว่าการเดินทางแบบพอดี้ถึง ผลอันนี้สามารถเข้าใจได้โดยแทบไม่ต้องพิจารณาฟังก์ชันซับซ้อนข้างต้น เพราะพลังงานที่ใช้ทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากับงานที่แรงต้านอากาศกับแรงเสียดทานกระทำตลอดการเดินทาง เนื่องจากแรงเสียดทานมีค่าคงที่ งานจากแรงเสียดทานจึงมีค่าเท่ากันทั้งสองกรณี งานจากแรงต้านอากาศจึงเป็นตัวตัดสินแต่เพียงปัจจัยเดียว แรงต้านอากาศขึ้นกับอัตราเร็วกำลังสองและจากกราฟใน รูปที่ 1 และ รูปที่ 2 เราจะเห็นจากความชันของเส้นกราฟว่าอัตราเร็วในกรณีการขับเคลื่อนพอดี้ถึงมีค่ามากกว่าของกรณีเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยคงที่อยู่เป็นส่วนใหญ่ของการเดินทางในช่วงระยะทาง x (แกนตั้ง) ดังนั้นงานที่แรงต้านอากาศกระทำในกรณีนี้จึงมากกว่าด้วยขอให้ระวังว่า ไม่ใช่ส่วนใหญ่ในช่วงเวลา t (แกนนอน) เพราะปัจจัยที่กำหนดงานจากแรงต้านอากาศเป็นระยะทางและอัตราเร็วไม่ใช่เวลา



รูปที่ 2: การขับเคลื่อนแบบพอดี้ถึงกับการขับเคลื่อนแบบอัตราเร็วคงที่ที่อัตราเร็วเฉลี่ยคงที่เมื่อระยะทางและเวลาในการเคลื่อนที่เท่ากัน สำหรับการขับเคลื่อนแบบพอดี้ถึง เราแสดงกราฟของสองกรณี คือ กรณีที่มีการขับเคลื่อนครั้งเดียว กับ กรณีที่มีการขับเคลื่อนสองครั้ง

เราสามารถขยายผลการคำนวณ ΔE ไปยังกรณีที่แบ่งเป็นการขับเคลื่อนย่อยแบบพอดี้ถึงหลายๆครั้ง โดยที่แต่ละการเคลื่อนที่ย่อยมีระยะทางเท่ากันภายในเวลาเท่ากัน เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบขับเคลื่อนด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยจะประหยัดพลังงานกว่าการขับเคลื่อนแบบพอดี้ถึงเสมอ ดังนั้นในช่วงย่อยแต่ละครั้งภายในระยะเวลาเท่ากัน การเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยคงที่ จึงประหยัดพลังงานกว่า การเคลื่อนที่แบบขับเคลื่อนพอดี้ถึง แต่เรายังต้องการพิจารณาว่า ถ้าไม่มีเงื่อนไขเวลาในการเดินทางที่เท่ากัน การเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยคงที่ จะประหยัดพลังงานกว่า การแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นกรณีการเคลื่อนที่ย่อยแบบพอดี้ถึงหลายๆครั้งหรือไม่ นั่นคือ เราต้องการเปรียบเทียบว่า

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 - m x [\mu g + a(x/t)^2]$$

$$= \frac{m}{2} \left(\frac{\mu g}{a} \right) \left[\sum_{i=1}^N u_i^2 - \ln(1+u_0^2) \right]$$

$$- \frac{1}{4} \frac{[\ln(1+u_0^2)]^3}{(\tan^{-1} u_0)^2}$$

ΔE นี้มีค่ามากหรือน้อยกว่าศูนย์เมื่อ N มีค่าเท่าไร สมมติในกรณีง่ายที่สุดที่แต่ละช่วงการขับเคลื่อนย่อยมีระยะทางและเวลาเท่ากันหมด ซึ่งมี $\sum_{i=1}^N u_i^2 = N \left[(1+u_0^2)^{1/N} - 1 \right]$ เราพบว่าผลต่างพลังงานข้างต้นจะเป็นบวกเมื่อ $N=1, 2$ และเป็นลบเมื่อ $N \geq 3$ ซึ่งหมายถึง การเคลื่อนที่แบบอัตราเร็วเฉลี่ยคงที่ จะประหยัดพลังงานกว่าการเดินทางด้วยการขับเคลื่อนย่อยพอดี้ถึงที่แบ่งเป็นการขับเคลื่อนย่อย 2 ครั้งเท่ากัน สำหรับการแบ่งการขับเคลื่อนย่อยเป็นการขับเคลื่อนแบบพอดี้ถึง 3 ครั้งเท่ากันขึ้นไป โดยไม่มีเงื่อนไขเวลานั้น จะประหยัดพลังงานกว่า การเคลื่อนที่แบบอัตราเร็วเฉลี่ยคงที่ตัวที่ใช้เวลาเดินทางเท่ากับการเดินทางแบบขับเคลื่อนพอดี้ถึงแบบครั้งเดียว ($N=1$) ตามสมการ (1)

เราลองมาอภิปรายว่า ถ้ากำหนดสถานการณ์ให้ระยะทางและเวลาในการเดินทางเท่ากัน เหตุใดการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยคงที่ตลอดการเดินทางจึงประหยัดพลังงานกว่าการเคลื่อนที่

แบบขับเคลื่อนพอดิจ และจะเป็นการเคลื่อนรูปแบบที่ประหยัดพลังงานที่สุดด้วย

โดยผิวผืนเราอาจจะคิดว่าการเร่งหรือขับเคลื่อนยานพาหนะครั้งเดียวโดยไม่เร่งอีกเลยจนยานพาหนะเคลื่อนไปถึงที่หมายพอดิ ที่เราเรียกว่าการขับเคลื่อนแบบพอดิจนั้น น่าจะใช้พลังงานน้อยกว่าการขับเคลื่อนยานพาหนะตลอดเวลาให้มีอัตราเร็วคงตัวที่ค่าหนึ่งๆ (ซึ่งเท่ากับอัตราเร็วเฉลี่ยตลอดการเดินทาง) เพราะอย่างแรกมีการเร่งหรือขับเคลื่อนเพียงแค่ครั้งเดียว ในขณะที่อย่างหลังต้องขับเคลื่อนตลอดเวลาเพื่อให้อัตราเร็วของยานพาหนะคงที่อยู่ได้ คณิตศาสตร์ของกฎการเคลื่อนที่แสดงให้เห็นแล้วว่าความเข้าใจผิวผืนนี้ไม่ถูกต้อง การเร่งหรือการขับเคลื่อนต่อเนื่องมีข้อดีคือพลังงานที่ใช้ในการเร่งแต่ละครั้งจะน้อยลงหากอัตราเร็วตั้งต้นมีค่าไม่เป็นศูนย์ เช่น สมมติว่าภายในระยะทางสั้นๆ เราเร่งยานพาหนะจากหยุดนิ่งจนมีความเร็ว v เราต้องใช้พลังงาน $\frac{1}{2}mv^2$ ในขณะที่หากเราเร่งจากอัตราเร็วที่มีอยู่แล้ว u จะใช้พลังงานเพียง $\frac{1}{2}m(v^2 - u^2)$ เนื่องจากอัตราเร็วที่มีอยู่แล้วกับอัตราเร็วที่จะเร่งขึ้นมาใหม่มีค่าใกล้เคียงกันมาก ทำให้การเร่งหรือการขับเคลื่อนต่อเนื่องที่อัตราเร็วคงที่จึงใช้พลังงานน้อยกว่าการเร่งพาหนะให้มีความเร็วสูงๆ แล้วปล่อยให้พาหนะช้าลงเพราะแรงต้านจนเกือบหยุดแล้วค่อยเร่งใหม่

ดังที่กล่าวมาแล้ว เส้นทางเคลื่อนที่ที่ประหยัดพลังงานที่สุดเมื่อระยะทางและเวลาในการเดินทางเท่ากันจะเป็นเส้นทางที่ทำให้ปริมาณงานจากแรงต้านอากาศมีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ เนื่องจากงานจากแรงต้านอากาศมีค่าเท่ากับ

$$W[x(t)] = \int_0^x m \dot{x}^2 dx$$

$$= \int_0^t m \dot{x}^3 dt \equiv \int_0^t w(x, \dot{x}) dt$$

เราจะทำการหาค่าน้อยที่สุดหรือ minimize ปริมาณ ฟังก์ชันนัล (functional) $W[x(t)]$ ข้างต้น เพื่อหารูปฟังก์ชัน $x(t)$ ที่ทำให้ค่างานนี้น้อยที่สุด เราเปลี่ยนตัวแปรอินทิเกรตเป็นเวลา และนิยามกำลัง (power) $w(x, \dot{x})$ ซึ่งทำหน้าที่คล้ายกับลากรางเจียน (Lagrangian) ของปริมาณแอคชัน (action) จากนั้นโดยใช้หลักการ

ผันแปร (variational principle) หาเงื่อนไขที่ minimize W เราจะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ของ $w(x, \dot{x})$ เป็น

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial \dot{x}} \right),$$

$$0 = 6m \dot{x} \ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = 0$$

คำตอบที่ได้เรียบง่ายมาก นั่นคือเส้นทางการเดินทางที่จะทำให้งานจากแรงต้านอากาศมีค่าน้อยที่สุดคือเส้นทางที่มีความเร่งเป็นศูนย์ ตลอดการเดินทางภายในระยะเวลาและระยะทางที่กำหนด มันจึงเป็นเส้นทางที่อัตราเร็วคงที่อยู่ที่ค่าอัตราเร็วเฉลี่ยตลอดการเดินทาง ซึ่งเท่ากับระยะทางหารด้วยเวลาทั้งหมดของการเดินทางนั่นเอง! กล่าวในภาษาของคณิตศาสตร์คือ ยิ่งเราเหยียบคันเร่งหรือเบรกให้รถยนต์เร่งเร็วขึ้นหรือช้าลงจากอัตราเร็วเฉลี่ย เรายิ่งสิ้นเปลืองพลังงานไปกว่าเส้นทางที่ประหยัดพลังงานที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ นี่ไม่ได้หมายความว่าเราต้องพยายามไม่เหยียบคันเร่งหรือปล่อยให้รถวิ่งไปตามความเฉื่อยของมัน (ซึ่งก็คือการเคลื่อนที่แบบขับเคลื่อนพอดิจ) แต่หมายถึงเราต้องเหยียบคันเร่งในระดับพอเหมาะที่ทำให้อัตราเร็วของตัวรถคงที่อยู่ได้ (หรือที่เรียกว่า cruise เช่น ฟังก์ชัน cruise control ในรถยนต์สมัยใหม่ที่ทำหน้าที่ลือคออัตราการเร่งให้ยานพาหนะมีอัตราเร็วคงที่) เราจึงจะประหยัดพลังงานที่สุด

ในกรณีของการเดินทางโดยรถยนต์ เส้นทางเดินทางอาจมีการเลี้ยวหรือมีจราจรหนาแน่น ทำให้การตั้งฟังก์ชัน cruise control เพื่อขับเคลื่อนทำไม่ได้ตลอดเวลา แต่เมื่อเส้นทางมีการเลี้ยวลดน้อยและมีการจราจรเบาบางพอ เราสามารถตั้งฟังก์ชัน cruise control หรือพยายามขับรถยนต์ให้มีอัตราเร็วคงที่ที่สุดเท่าที่จะทำได้ ซึ่งจะทำให้เราประหยัดพลังงานได้มากที่สุดด้วย เราอาจประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับยานพาหนะอื่น เช่น รถไฟหรือเครื่องบิน ซึ่งเราสามารถเขียนโปรแกรมให้ระบบทั้งหมดขับเคลื่อนยานพาหนะในแบบที่อัตราเร็วคงที่ที่สุดเท่าที่เป็นไปได้เพื่อประหยัดพลังงานในระบบขนส่งทั้งหมด

สังเกตว่ารูปแบบฟังก์ชันของแรงต้านอากาศกับอัตราเร็วสามารถมีรูปแบบเป็น $m \dot{x}^n; n > 0$ โดยไม่ทำให้เส้นทางที่ประหยัดพลังงานที่สุดเปลี่ยนไปแต่อย่างใด สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ยังคงให้ผลเช่นเดิมคือ เส้นทางที่ไม่มีมีความเร่งจะประหยัดพลังงานที่สุด (เพราะสำหรับฟังก์ชัน $w = m \dot{x}^{n+1}$ ทำให้

อนุพันธ์ทางขวามือของสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ข้างต้นให้
ความเร่งออกมาเสมอ)

สำหรับการเดินทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งในความเป็นจริง สิ่งที่กำหนดอัตราเร็วเฉลี่ยของการเดินทางในเส้นทางนั้น (เพื่อให้ประหยัดพลังงานที่สุด) อาจไม่ใช่ทางเลือกที่คนขับชี้กำหนดได้ แต่มีปัจจัยอื่นมากำหนดอัตราเร็วเฉลี่ยของพาหนะที่ใช้เส้นทางนั้นด้วย เช่น ความคับคั่งของการจราจรหรือขีดจำกัดความเร็วทางกฎหมายเพื่อความปลอดภัยในการเดินทาง การเดินทางอาจประกอบมาจากการเดินทางผ่านเส้นทางย่อยมากกว่าหนึ่งเส้นทางติดต่อกัน โดยที่การจราจรในแต่ละเส้นทางกำหนดอัตราเร็วเฉลี่ยทั่วไปของพาหนะที่ใช้เส้นทางนั้น วิธีขับเคลื่อนพาหนะที่ประหยัดพลังงานที่สุดในกรณีนี้จึงเป็นการขับเคลื่อนด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยที่กำหนดโดยการจราจรในแต่ละเส้นทางโดยให้มีการเร่งให้เร็วขึ้นและเบรกให้ช้าลงน้อยที่สุด หากเราใช้วิธีขับเคลื่อนแบบดังกล่าวเพื่อประหยัดพลังงานแล้ว สิ่งต่อไปที่เราสนใจคือเวลาที่ใช้ในการเดินทาง เวลาในการเดินทางจะถูกกำหนดโดยอัตราเร็วเฉลี่ยของแต่ละเส้นทางย่อยที่ประกอบเป็นเส้นทางรวมทั้งหมด ในหัวข้อถัดไปเราจะอภิปรายถึงการคำนวณเวลาที่ใช้ในการเดินทางที่ประกอบจากเส้นทางย่อยหลายๆเส้นทางโดยแต่ละเส้นทางมีอัตราเร็วเฉลี่ยของพาหนะที่ใช้เส้นทางนั้นๆเป็นค่าจำเพาะเจาะจงของมันเอง เราจะพิจารณาว่าอัตราเร็วเฉลี่ยแบบไหนที่ควรใช้คำนวณเวลาในการเดินทาง

อัตราเร็วเฉลี่ยแบบไหนที่เหมาะสมกับการใช้คำนวณเวลาในการเดินทาง ?

ปัญหาอีกปัญหาที่พบในการเดินทางคือการคำนวณหรือประมาณเวลาที่ใช้ในการเดินทางที่ประกอบด้วยเส้นทางที่การจราจรมีความคล่องตัวต่างกันหลายๆเส้นทาง เช่น เราต้องการประมาณเวลาที่ใช้ในการเดินทางไปพญาจากกรุงเทพ โดยตอนแรกใช้เส้นทางภายในตัวเมืองกรุงเทพ แล้วต่อเข้าทางด่วนมอเตอร์เวย์ และจบด้วยเส้นทางภายในเมืองพญา เส้นทางแต่ละส่วนในการเดินทางมีความคับคั่งของการจราจรต่างกัน อัตราเร็วเฉลี่ยของรถยนต์ในแต่ละเส้นทางจึงต่างกัน คำถามคือในการคำนวณเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการเดินทางนี้ เราควรคำนวณอัตราเร็วเฉลี่ยแบบใดจากอัตราเร็วเฉลี่ยของแต่ละเส้นทางย่อยที่มี?

สมมติให้การเดินทางทั้งหมดประกอบด้วย N เส้นทางย่อยที่มีอัตราเร็วเฉลี่ยของแต่ละเส้นทางย่อยซึ่งถูกกำหนดโดยความคับคั่งของการจราจรเป็น v_i ; $i = 1, 2, \dots, N$ แต่ละเส้นทางย่อยมีระยะทางเป็น x_i ; $i = 1, 2, \dots, N$ เวลาในการเดินทางทั้งหมดจึงเป็น $\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{v_i}$ และ อัตราเร็วเฉลี่ยของการเดินทาง ซึ่งหมายถึง ระยะทางทั้งหมดหารด้วยเวลาทั้งหมด จึงเป็น

$$\langle v \rangle_H = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{v_i} \right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_i}{v_i} \right)}$$

เมื่อเรากำหนดให้สัดส่วนระยะทางของแต่ละเส้นทางย่อยเทียบกับระยะทางทั้งหมดเป็น $\alpha_i \equiv \frac{x_i}{x}$; $x \equiv \sum_{i=1}^N x_i$ หรือเราอาจเรียกค่า α_i ว่าเป็นค่าถ่วงน้ำหนักหรือ weight ของแต่ละเส้นทางย่อย i ก็ได้เช่นกัน

จะเห็นว่าอัตราเร็วเฉลี่ยที่ได้ไม่ใช่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) $\langle v \rangle_A$ ของอัตราเร็วของเส้นทางย่อย v_i แต่เป็นค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (harmonic mean) $\langle v \rangle_H$ ซึ่งมีสมบัติคือมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเชิงเลขคณิตเสมอ² เมื่อเรากำนวณเวลาในการเดินทางทั้งหมด เราใช้ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกนี้ของอัตราเร็ว

$$t = \frac{x}{\langle v \rangle_H} = x \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_i}{v_i} \right)$$

และค่าที่ได้จะมากกว่าเมื่อใช้อัตราเร็วเฉลี่ยเชิงเลขคณิตในการประมาณเวลาในการเดินทางเสมอ

คนทั่วไปโดยปกติจะเลือกใช้อัตราเร็วเฉลี่ยเลขคณิตในการคำนวณเวลาในการเดินทาง เหตุผลหนึ่งเพราะสามารถคำนวณได้ง่ายที่สุด ในขณะที่บางคนเข้าใจว่าเป็นการประมาณที่ไม่ใช่ค่าที่ถูกต้องแต่มีน้อยคนที่จะทราบว่าค่าเฉลี่ยที่ถูกต้องควรใช้คือค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก เราลองมาดูว่าความแตกต่างของเวลาในการเดินทางที่คำนวณจากค่าเฉลี่ยทั้งสองแบบเป็นอย่างไร (แน่นอนว่าอัตราเร็วเฉลี่ยที่ถูกต้องมีค่าเดียวคือค่าที่ได้จากการใช้อัตราเร็วเฉลี่ยฮาร์โมนิก) เพื่อความง่ายสมมติให้มีสองเส้นทางย่อยที่ระยะทางเท่ากัน เวลาการเดินทางจากค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกจะเป็น

$$t_A = \frac{x}{\langle v \rangle_A} = \frac{2x}{v_1 + v_2},$$

$$t_H = \frac{x}{\langle v \rangle_H} = \frac{x}{2} \left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \right)$$

ถ้าสมมติให้ $v_1 = 0.80$, $v_2 = 0.30$ เราจะได้ $t_H \cong 1.26 t_A$ นั่นคือต่างกันถึง 26% บทเรียนของเราคือสามัญสำนึกในเรื่องค่าเฉลี่ยของเราใช้การไม่ได้กับการคำนวณอัตราเร็วเฉลี่ยที่แท้จริง หากเราใช้อัตราเร็วเฉลี่ยเชิงเลขคณิตที่ไม่ใช่ค่าเฉลี่ยที่ถูกต้อง เวลาในการเดินทางที่คำนวณออกมาจะผิดพลาดไปมาก ข้อสังเกตอีกประการที่คนขับรถยนต์ในเมืองใหญ่ๆ ที่มีการจราจรคับคั่งคุ้นเคยก็คือ ปรากฏการณ์คอขวดของการจราจร ในตัวอย่างข้างต้น หากเราให้อัตราเร็วเฉลี่ยจากเส้นทางย่อยหนึ่ง เช่น v_1 มีค่าน้อยกว่าอัตราเร็วเฉลี่ยจากเส้นทางย่อยที่เหลือหลายๆ (นั่นคือการจราจรติดขัดมากกว่าเส้นทางย่อยอื่น) เวลาการเดินทางจะกลายเป็น

$$t = \frac{x}{2} \left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \right) \rightarrow \frac{x}{2v_1}; \quad v_1 \ll v_2$$

นั่นคือเวลาส่วนใหญ่ในการเดินทางมาจากช่วงเวลาในการเดินทางผ่านเส้นทางย่อยที่มีอัตราเร็วเฉลี่ยต่ำมากๆ นั่นเอง

บทสรุป

ในบทความนี้เราได้พิจารณาปัญหาการประหยัดพลังงานในการขับเคลื่อนยานพาหนะภายใต้แรงต้านอากาศและแรงเสียดทานโดยไม่คำนึงถึงปัจจัยภายในที่มาจากยานพาหนะ อาทิ ประสิทธิภาพการใช้พลังงานขับเคลื่อนที่อัตราเร็วต่างๆซึ่งขึ้นกับประเภทและชนิดของยานพาหนะ เช่น ประสิทธิภาพการใช้เชื้อเพลิงที่รอบเครื่องยนต์ต่างๆสำหรับกรณีของรถยนต์ ประสิทธิภาพการใช้ไฟฟ้าในการขับเคลื่อนที่อัตราเร็วต่างๆในกรณีของรถไฟฟ้า ฯลฯ เรายังพิจารณาเฉพาะการเดินทางที่เกิดขึ้นบนพื้นราบที่ไม่มีผลของแรงโน้มถ่วงเข้ามามีผลจุดเร่งหรือหน่วง การเคลื่อนที่ของยานพาหนะซึ่งถือว่าการประมาณที่ดีของการเดินทางส่วนใหญ่ทางบนพื้นโลก

เบื้องต้นเราศึกษาการขับเคลื่อนแบบพอดี้ถึงซึ่งเป็นการเร่งพาหนะให้มีความเร็วต้นค่าหนึ่งแล้วปล่อยให้เคลื่อนที่ไปจนหยุดเนื่องจากแรงต้าน จากนั้นจึงขยายไปสู่กรณีที่มีการขับเคลื่อนแบบพอดี้ถึงหลายๆครั้ง เราพบว่าการขับเคลื่อนแบบพอดี้ถึงยังแบ่งหลายครั้งยิ่งประหยัดพลังงาน แต่ข้อเสียคือยิ่งแบ่งมากครั้ง

เวลาที่ใช้ในการเดินทางรวมจะมากขึ้นตามไปด้วย ถัดมาเราลองพิจารณาการขับเคลื่อนแบบอัตราเร็วคงที่ที่อัตราเร็วเฉลี่ยของการเดินทาง เราพบว่าเป็นการเคลื่อนที่ที่ประหยัดพลังงานกว่าการขับเคลื่อนแบบพอดี้ถึงในเงื่อนไขที่เป็นการเดินทางในระยะทางเท่ากันภายในช่วงเวลาเท่ากัน เรายังพิสูจน์โดยใช้หลักการผันแปรอีกด้วยว่านี่คือการขับเคลื่อนแบบที่ประหยัดพลังงานที่สุดจริงๆ ท้ายที่สุดเราอภิปรายเกี่ยวกับการคำนวณเวลาที่ใช้ในการเดินทางที่ประกอบจากหลายๆเส้นทางย่อยติดต่อกัน โดยแต่ละเส้นทางย่อยมีค่าอัตราเร็วเฉลี่ยของการเดินทางต่างๆกันที่ถูกกำหนดโดยการจราจรในแต่ละเส้นทางนั้น เราแสดงว่าค่าอัตราเร็วเฉลี่ยที่ถูกต้องสำหรับการคำนวณเวลาในการเดินทางคือค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกของอัตราเร็วเฉลี่ยในแต่ละเส้นทางย่อย

เชิงอรรถ

1. สำหรับปัญหาการประหยัดพลังงานในการเดินทางขึ้นลงภูเขาซึ่งมีแรงโน้มถ่วงต่อต้านการขับเคลื่อนตอนขาขึ้นขาขึ้นเสริมแรงการขับเคลื่อนตอนขาลงเขานั้นจะพิจารณาในงานต่อไป
2. พิสูจน์ได้จากอสมการโคชี (Cauchy inequality):

$$\sum_{i=1}^N r_i^2 \sum_{j=1}^N s_j^2 \geq \left(\sum_{i=1}^N r_i s_i \right)^2$$

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์ชาญกิจและกองบรรณาธิการวารสารฟิสิกส์ไทยสำหรับการตรวจแก้ต้นฉบับและข้อคิดเห็นบางประการอันเป็นประโยชน์

ความรักจะลงเอยเช่นไร

สิทธิโชค อำนวยพล¹

1. บทนำ

“พรุ่งนี้เรื่องของเราจะสุขหรือแสนเศร้า จึงวอนขอดาวให้ช่วยบอกที [1]” คือบทเพลงที่คุ้นเคย คนสองคนรักกัน กาลเวลาอาจทำให้รักจืดจางลงหรือกลับกลายเป็นความเกลียดชังในภายหลัง รักแท้ต้องเดินผ่านวันและเวลาให้ความรักยังคงอยู่ตราบนานเท่านาน ความรักของคนสองคนเป็นระบบพลวัตสองตัวแปรค่าของสองตัวแปรเปลี่ยนแปลงกับเวลา การเปลี่ยนค่าของตัวแปรหนึ่งย่อมกระทบกับของอีกตัวแปร เส้นทางเดินของตัวแปรทั้งสองในปริภูมิเฟส (หรือปริภูมิสถานะของความรัก) จึงเปรียบได้กับเส้นทางความรัก ความรักจะลงเอยเช่นไร พิจารณาได้จากเส้นทางเดินของตัวแปรทั้งสองคู่เข้าหาค่าใดเมื่อเวลาผ่านไปเนิ่นนาน

$t \rightarrow \infty$

ให้ระบบพลวัตแทนด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งซึ่งมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร หากสนใจพฤติกรรมของระบบเมื่อเวลาผ่านไปเนิ่นนาน ไม่มีความจำเป็นต้องทราบคำตอบของสมการ เพียงแค่จำแนกประเภทของจุดตรึง (fixed point) จุดตรึง คือ ค่าของตัวแปรที่ได้จากการกำหนดให้การเปลี่ยนแปลงกับเวลาเท่ากับศูนย์ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ การหาจุดตรึงจึงเป็นเพียงแค่การแก้สมการพีชคณิตซึ่งง่ายกว่ามาก พฤติกรรมของระบบเมื่อเวลา $t \rightarrow \infty$ แสดงถึงสภาวะหลังจากเข้าสู่สมดุล การวัดส่วนใหญ่ในการทดลองกระทำหลังจากที่ระบบเข้าสู่สภาวะสมดุลแล้ว บทความนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อแนะนำให้นักเรียนรู้จักการวิเคราะห์จุดตรึงโดยผ่านเรื่องราวความรักของชายและหญิงซึ่งมีนิสัยแบบต่างๆ พร้อมทั้งยกตัวอย่างระบบพลวัตง่ายๆ ในกลศาสตร์มาเทียบเคียง

2. ระบบพลวัตแบบเชิงเส้นของความรัก

สมมุติให้นายเข้มตกหลุมรักนางสาวนุช ความรักของเข้มที่เวลา t เขียนแทนด้วย $m(t)$ ซึ่งมีค่าบวก หากว่าเข้มหมดรักนุช $m(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ ถ้าเข้มเกลียดนุช $m(t)$ มีค่าลบ ในทำนอง

เดียวกัน ความรัก, หมดรัก, และความเกลียดของนุชที่เวลา t แทนด้วย $w(t)$ ซึ่งมีค่าบวก, ศูนย์, และลบตามลำดับ สำหรับปัจจัยหรือพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความรักระหว่างเข้มและนุช ประกอบด้วยลักษณะนิสัยของเข้มบรรยายด้วย a และ b และลักษณะนิสัยของนุชบรรยายด้วย c และ d ซึ่งมีความหมายดังนี้

a คือ ความรู้สึกของเข้มเอง ที่ทำให้ความรักที่มีต่อนุชเปลี่ยนไปอย่างไร ถ้า a เป็นบวกหมายถึงเข้มรักนุชแล้วจะรักมากขึ้นเรื่อยๆ ในทางกลับกันเข้มเกลียดนุชแล้วจะเกลียดมากขึ้นเรื่อยๆ ถ้า a เป็นศูนย์หมายถึงเข้มรักหรือเกลียดนุชเท่าเดิม ถ้า a เป็นลบหมายถึงเข้มรักนุชแล้วจะรักน้อยลงเรื่อยๆ ในทางกลับกันเข้มเกลียดนุชแล้วจะเกลียดน้อยลงเรื่อยๆ

b คือ ความรู้สึกของนุชที่มีต่อเข้ม ที่ทำให้ความรักจากเข้มที่มีต่อเธอเปลี่ยนไปอย่างไร ถ้า b เป็นบวกหมายถึงนุชรักเข้มยิ่งทำให้เข้มรักเธอมากขึ้นเรื่อยๆ ในทางกลับกันนุชเกลียดเข้มจะบั่นทอนเข้มให้รักเธอน้อยลงเรื่อยๆ ถ้า b เป็นศูนย์หมายถึงไม่ว่านุชรักหรือเกลียดเข้มไม่มีผลต่อเข้ม ถ้า b เป็นลบหมายถึงนุชรักเข้มกลับทำให้เข้มรักเธอน้อยลงเรื่อยๆ ในทางกลับกันนุชเกลียดเข้มกลับทำให้เข้มรักเธอมากขึ้นเรื่อยๆ

c คือ ความรู้สึกของเข้มที่มีต่อนุช ที่ทำให้ความรักจากนุชที่มีต่อเขาเปลี่ยนไปอย่างไร ความหมายคล้ายกับของ b

d คือ ความรู้สึกของนุชเอง ที่ทำให้ความรักที่มีต่อเข้มเปลี่ยนไปอย่างไร ความหมายคล้ายกับของ a

จะเห็นว่า a และ d บรรยายความรู้สึกภายในตัวเองมีผลต่อความรักที่มีให้ฝ่ายตรงข้ามอย่างไร, ส่วน b และ c บรรยายความรู้สึกของฝ่ายตรงข้ามมีผลต่อความรักที่เราแสดงออกอย่างไร ให้ความรักระหว่างเข้มกับนุชบรรยายได้เป็นระบบพลวัตดังนี้

[2,3]

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= am(t) + bw(t) \\ \frac{dw}{dt} &= cm(t) + dw(t)\end{aligned}\tag{1}$$

จุดตรึงหาได้จากเงื่อนไข $dm/dt = 0$ และ $dw/dt = 0$ ให้จุด

¹อาจารย์ (ดร.) ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

$(m^*, w^*) = (0, 0)$ หมายความว่า ทั้งเข็มและนุชหมดรักซึ่งกันและกัน เส้นทางการรักคือ $\mathbf{r}(t) = (m(t), w(t))$ เนื่องจากระบบพลวัต (1) เป็นเชิงเส้นจึงมี $(0, 0)$ เป็นจุดตรึงเดียว แต่จะเป็นจุดตรึงประเภทใดขึ้นอยู่กับลักษณะนิสัยของเข็มและนุชที่แสดงด้วยพารามิเตอร์ a, b, c , และ d

2.1 หมุ่มตรงไปตรงมากับสาวเล่นตัว กล่าวคือ $b > 0$ และ $c < 0$

ลักษณะนิสัยของเข็มคือยิ่งนุชรักเข็มมากเท่าไรหัวใจของเขายิ่งพองโตและรักเธอมากขึ้นเท่านั้น หากนุชเย็นชา เข็มก็จะเริ่มจืดจางและรักเธอน้อยลง ส่วนนุชเป็นสาวเล่นตัว ยิ่งเข็มรักเธอเธอจะกลับรักเขาน้อยลง แต่พอเข็มเริ่มท้อใจและเหินห่างไปนุชจะพยายามดึงดูดความสนใจของเขากลับมา สถานการณ์รักนี้คือ $a = 0, b > 0, c < 0, d = 0$ เนื่องจาก c เป็นลบเขียนเป็น $c = -|c|$ สมการ (1) ลดรูปเขียนโดยใช้เมตริกซ์ได้เป็น

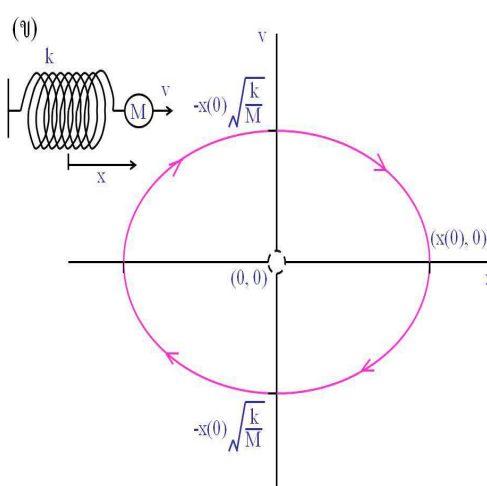
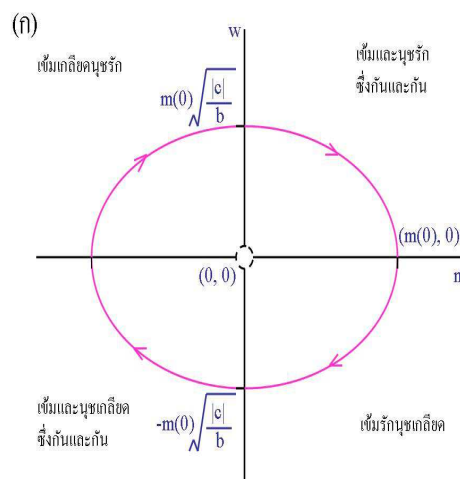
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} m(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -|c| & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

ประเภทของจุดตรึงจำแนกได้จาก ไอเกนแวลู

(eigenvalue) λ_1, λ_2 และ ไอเกนเวกเตอร์ (eigenvector) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ของเมตริกซ์ขนาด 2×2 ที่บรรยายพารามิเตอร์นิสัยของเข็มและนุชทางด้านขวาของสมการ (2)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{b|c|}, & \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{|c|}{b}} \end{bmatrix} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{b|c|}, & \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\frac{|c|}{b}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

สังเกตว่าไอเกนแวลู λ_1, λ_2 และไอเกนเวกเตอร์ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ เป็นจำนวนจินตภาพที่เป็นคอนจูเกตซึ่งกันและกัน เส้นทางการรัก $\mathbf{r}(t)$ เป็นผลรวมระหว่าง $\exp(\lambda_1 t)\mathbf{v}_1$ และ $\exp(\lambda_2 t)\mathbf{v}_2$ จึงให้วงปิดล้อมรอบจุดตรึง $(0, 0)$ ด้วยเหตุนี้จึงเรียกประเภทของจุดตรึงนี้ว่า ศูนย์กลาง (center) รูปที่ 1ก แสดงเส้นทางการรัก $\mathbf{r}(t)$ วนตามเข็มนาฬิกาด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = \sqrt{b|c|}$ ถ้าเมื่อแรกพบเข็มหลงรักนุชขณะที่นุชมีความรู้สึกเฉยๆ กับเขื่อนั้นคือ $m(0) > 0, w(0) = 0$ ซึ่งเป็นตำแหน่งของ $\mathbf{r}(0)$ เริ่มต้นบนแกน m เมื่อเวลาผ่านไปตำแหน่งของ $\mathbf{r}(t)$ จะเคลื่อนเข้าไปใน quadrant



รูปที่ 1 (ก) เส้นทางการรัก $\mathbf{r}(t)$ วนเป็นวงรีปิดรอบจุดตรึง $(0, 0)$ ซึ่งเป็นประเภทศูนย์กลางแสดงด้วยวงกลมโปร่งเส้นประ เวลารักกันความรักของเข็มที่มีต่อนุชมีขีดจำกัดไม่เกิน $m(0)$ ขณะเดียวกันนุชก็รักเข็มมากที่สุดได้ไม่เกิน $m(0)\sqrt{|c|/b}$ เช่นกัน เวลาเกลียดกันเขาและเธอเกลียดอย่างมีขีดจำกัดไม่เกิน $-m(0)$ และ $-m(0)\sqrt{|c|/b}$ ตามลำดับ นุชจะรักหรือเกลียดเข็มเพิ่มมากขึ้นหากว่าความเล่นตัวของเธอ $|c|$ สูง, (ข) ระบบกลศาสตร์ที่ประกอบด้วยมวลผูกติดกับสปริง มีเส้นทางการรัก $\mathbf{r}(t) = (x(t), v(t))$ วนเป็นวงรีปิดรอบจุดตรึง $(0, 0)$ ในลักษณะเดียวกัน

ที่สื่อหมายความว่านุชจะเริ่มหงุดหงิดและเกลียดเข็มยังผลให้เข็มลดความรักที่มีต่อนุชให้น้อยลง เวลาผ่านไปอีก ตำแหน่งของ $\mathbf{r}(t)$ จะเคลื่อนเข้าไปใน quadrant ที่สามหมายความว่าความเกลียดชังของนุชได้ลดทอนความรักของเข็มจนบัดนี้กลายเป็นความเกลียดชังนุชและเข็มต่างเกลียดชังซึ่งกันและกันจึงเป็นสงครามแทนที่จะ

เป็นความรัก ความเกลียดของเข้เริ่มทำให้เขาไม่อยากเจอเข้ นุช จึงลดความเกลียดของเธอลงเพื่อให้เข้กลับมาพบเธอบ่อยขึ้น เวลาผ่านไปอีก ตำแหน่งของ $r(t)$ จะเคลื่อนเข้าไปใน quadrant ที่สอง หมายความว่าความเกลียดเข้ของนุชบัดนี้ได้แปรเปลี่ยนเป็นความรัก ขณะที่เข้ยังคงเกลียดนุชอยู่แต่ก็เริ่มใจอ่อนลดความเกลียดเธอลง เวลาผ่านไปอีกตำแหน่งของ $r(t)$ จะเคลื่อนเข้าไปใน quadrant ที่หนึ่งหมายความว่าความรักของนุชได้เอาชนะใจเข้จนเขายอมเปลี่ยนความเกลียดชังเป็นความรักเธอ นุชและเข้จึงรักซึ่งกันและกัน อย่างไรก็ตาม ความรักของเขาทั้งสองก็อยู่ได้ไม่นาน นุชจะเริ่มหงุดหงิดกับความรักของเข้ที่ทวีขึ้นทุกวันทุกวันทำให้เธอรักเข้น้อยลงทุกทีทุกที เวลาผ่านไปอีกตำแหน่งของ $r(t)$ จะวนกลับไปอยู่ใน quadrant ที่สี่หมายความว่าความรักของนุชได้ลดลงไปเรื่อยๆ จนบัดนี้เธอกลับมาเกลียดเข้อีกครั้งหนึ่ง ความรักของเขาและเธอลงเอยเป็นสลับกันรักและสลับกันเกลียด วนเวียนอย่างนี้เรื่อยไปไม่รู้จบ ทำให้นุชกับเข้รักซึ่งกันและกันเพียงแค่นั้นในสี่ของเวลาที่คบกัน

แต่ถ้าเมื่อแรกพบนุชหลงรักเข้ก่อนขณะที่เข้มีความรู้สึกเฉยๆ กับนุช นั่นคือ $m(0) = 0, w(0) > 0$ ตำแหน่งของ $r(0)$ เริ่มต้นบนแกน w เส้นทางความรัก $r(t)$ เหมือนกับเส้นทางความรักซึ่งเริ่มต้นบนแกน m แต่ตอนแรก $r(t)$ จะเคลื่อนเข้าไปใน quadrant ที่หนึ่งก่อนหมายความว่าเข้กระหึ่มยื้มย่องใจที่นุชรักเขา เขาเลยรักนุชตอบหากไม่รู้ไม่ว่านุชเป็นสาวเล่นตัว นุชเห็นเข้รักเธอตอบจึงลดความรักของเธอมือต่อเขาเอง จากนั้นเส้นทางความรัก $r(t)$ จะเคลื่อนเข้าไปใน quadrant ที่สี่ เรื่องราวและการลงเอยของความรักระหว่างเขาและเธอจึงเหมือนกับเมื่อแรกพบเข้หลงรักนุชก่อน

รูปที่ 1 ข แสดงตัวอย่างในระบบกลศาสตร์ซึ่งมีเส้นทางเดินเป็นวงรีปิดรอบจุดตรึง $(0, 0)$ เช่นกัน มวล M ผูกติดกับสปริงซึ่งมีค่าคง k ระยะยัด $x(t)$ แสดงบทบาทเหมือนกับความรักของเข้ $m(t)$, ส่วนความเร็ว $v(t)$ แสดงบทบาทเหมือนกับความรักของนุช $w(t)$, ค่า k/M แสดงบทบาทเหมือนกับการเล่นตัวของนุช $|c|$ โดยที่มีค่า b เท่ากับ 1

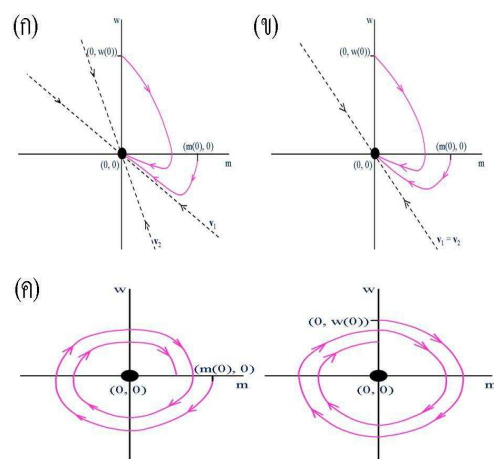
2.2 หมู่ตรงไปตรงมากับสาวเก็บกด กล่าวคือ $b > 0$ และ $c < 0, d < 0$

ลักษณะนิสัยของเข้ยังคงเหมือนเดิม ส่วนนุชมีนิสัยคือยิ่งเธอรักเข้มากเท่าใดเธอพยายามข่มใจตัวเองให้รักเข้น้อยลงซึ่งบรรยายด้วย d มีค่าลบ นอกจากนี้เธอก็กลับรักเข้น้อยลงถ้าเข้ยิ่งรักเธอ และพอเข้รักเธอน้อยลงเธอก็กลับพยายามให้เข้รักเธอมากขึ้น สถานการณ์รักนี้คือ $a = 0, b > 0, c < 0, d < 0$ สมการ (1) ลดรูปเป็น

แจกแจงไอเกนแวลูและไอเกนเวกเตอร์ของปัญหานี้ได้สามกรณี ดังนี้

1. $|d|^2 > 4b|c|$ หมายความว่า ความเก็บกดของนุชเองมีผลต่อความรักของเธอมือต่อเข้ มากกว่า ผลจากว่าเข้มีรู้สึกกับเธออย่างไร พบว่า

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} m(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -|c| & -|d| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$



รูปที่ 2 (ก) ไม่ว่าเมื่อแรกพบเข้หลงรักนุชก่อน $(m(0), 0)$ หรือนุชหลงรักเข้ก่อน $(0, w(0))$ เส้นทางความรัก $r(t)$ ต่างลงเอยด้วยความจิตจาง $(0, 0)$ ไม่รู้สึกรักขณะเดียวกันก็ไม่รู้สึกเกลียดราวกับคนไม่รู้จักกัน ในรูปแสดงจุดตรึงประเภทเสถียรด้วยวงกลมทึบ อย่างไรก็ตามสำหรับนุชหลงรักเข้ก่อนเส้นทางความรัก $r(t)$ เคลื่อนเข้าสู่ $(0, 0)$ โดยผ่าน quadrant ที่หนึ่ง เขาและเธอจึงเคยมีช่วงเวลาแห่งความรักซึ่งกันและกันแม้ว่าจะเป็นแค่ช่วงเวลาสั้นๆ ก่อนที่จะจิตจางกันไป (ข) แสดงกรณีที่ไอเกนเวกเตอร์ v_1, v_2 เท่ากัน (ค) เข้และนุชสลับกันรักและสลับกันเกลียด ก่อนที่จะลงเอยเป็นความจิตจาง

$$\lambda_1 = \frac{-|d| + \sqrt{|d|^2 - 4b|c|}}{2}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-|d| + \sqrt{|d|^2 - 4b|c|}}{2b} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\lambda_2 = \frac{-|d| - \sqrt{|d|^2 - 4b|c|}}{2}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-|d| - \sqrt{|d|^2 - 4b|c|}}{2b} \end{bmatrix}$$

2. $|d|^2 = 4b|c|$ หมายความว่า ความถี่ของนุชเองมีผลต่อความรักของเธอที่มีต่อเข้ม พอๆ กับ ผลจากค่าเข้มรู้สึกรักกับเธออย่างไร

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}|d|, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{|d|}{2b} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ทั้งสองกรณีข้างต้น ไอเกนแวลูเป็นจำนวนจริงลบ ถ้าเส้นทาง $\mathbf{r}(t)$ เหลือมไปจากจุดตรึง (0, 0) พอเวลาผ่านไปมันจะเคลื่อนเข้าหาจุดตรึงดังกล่าว คล้ายคลึงกับลูกบอลที่กลิ้งเข้าหาที่ก้นอ่างเสมอ ตำแหน่งที่ก้นอ่างมีเสถียรภาพสูง จึงเรียกจุดตรึงประเภทนี้ว่า **เสถียร (stable node)** รูปที่ 2ก และ ข แสดงเส้นทางความรัก $\mathbf{r}(t)$ เคลื่อนเข้าหาจุดตรึง ความรักของเขาและเธอจึงลงเอยเป็นความจีจาง

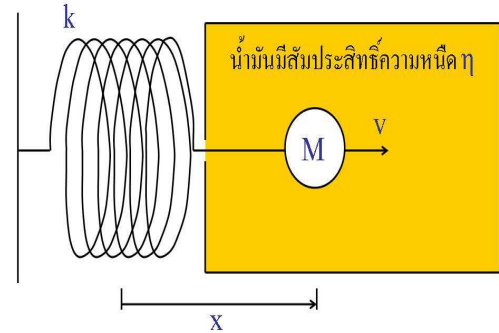
3. $|d|^2 < 4b|c|$ หมายความว่า ความถี่ของนุชเองมีผลต่อความรักของเธอที่มีต่อเข้ม น้อยกว่า ผลจากค่าเข้มรู้สึกรักกับเธออย่างไร

$$\lambda_1 = \frac{-|d| + i\sqrt{4b|c| - |d|^2}}{2}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-|d| + i\sqrt{4b|c| - |d|^2}}{2b} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\lambda_2 = \frac{-|d| - i\sqrt{4b|c| - |d|^2}}{2}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-|d| - i\sqrt{4b|c| - |d|^2}}{2b} \end{bmatrix}$$

ไอเกนแวลู λ_1, λ_2 มีส่วนจริงเป็นลบ และเป็นคอนจูเกตซึ่งกันและกัน ส่วนจริงเป็นลบเหมือนกับสองกรณีก่อนหน้า มีเส้นทาง $\mathbf{r}(t)$ เคลื่อนเข้าหาจุดตรึง ขณะเดียวกันส่วนจินตภาพเป็นคอนจูเกตซึ่งกันและกันเหมือนกับสมการ (3) มีเส้นทาง $\mathbf{r}(t)$ วนเป็นวงปิด รวมสองลักษณะเข้าด้วยกันจะได้เส้นทาง $\mathbf{r}(t)$ วนเข้าหาจุดตรึงคล้ายเกลียว ด้วยเหตุนี้จึงเรียกจุดตรึง (0, 0) เป็นประเภท **เกลียวเสถียร (stable spiral)** รูปที่ 2ค แสดงเส้นทางความรัก $\mathbf{r}(t)$ วนเข้าหาจุดตรึงด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = \sqrt{4b|c| - |d|^2}/2$ เข้มและนุชจึงสลับกันรักและสลับกันเกลียดแต่ด้วยความรู้สึกรักและเกลียดซึ่งนับวันยิ่งอ่อนลง ความรักของเขาและเธอจึงลงเอยเป็นความจีจาง

ในรูปที่ 3 แสดงตัวอย่างในระบบกลศาสตร์ซึ่งมีเส้นทางเคลื่อนเข้าหา (0, 0) เช่นกัน มวล M ผูกติดกับสปริงซึ่งมีค่า k สันในน้ำมันที่มีสัมประสิทธิ์ความหนืด η , ค่า η/M แสดงบทบาทเหมือนกับความถี่ของนุช $|d|$, มวล M สอดคล้องพลังงานให้แก่ของเหลว ทำให้สั่นด้วยระยะ x และความเร็ว v ที่น้อยลงเรื่อย ๆ



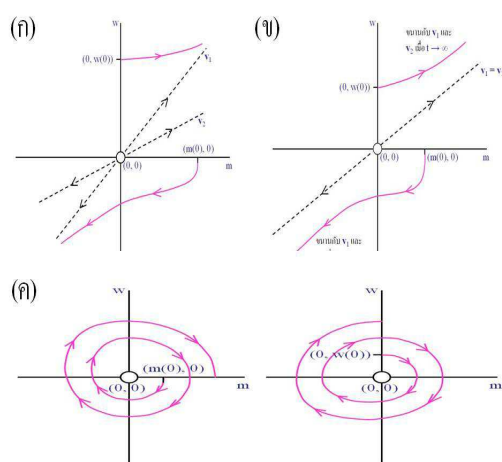
รูปที่ 3 แสดงระบบกลศาสตร์ซึ่งมีเส้นทางเดิน $(x(t), v(t))$ เหมือนกับรูปที่ 2ก สำหรับ $\eta > 2\sqrt{kM}$, เหมือนกับรูปที่ 2ข สำหรับ $\eta = 2\sqrt{kM}$, และเหมือนกับรูปที่ 2ค สำหรับ $\eta < 2\sqrt{kM}$

2.3 หนุมตรงไปตรงมากับสาวช้อย่าย กล่าวคือ $b > 0$ และ $c < 0, d > 0$

ลักษณะนิสัยของเข้มยังคงเหมือนเดิม ส่วนนุชมีนิสัยคือ ยิ่งเธอรักเข้มมากเท่าใดความรักของเธอยิ่งทวีคูณซึ่งบรรยายด้วย d มีค่าบวก แต่เธอกลับรักเข้มน้อยลงถ้าเข้มยิ่งรักเธอ และพอเข้มรักเธอน้อยลงเธอกลับพยายามให้เข้มรักเธอมากขึ้น สถานการณ์รักนี้ก็คือ $a = 0, b > 0, c < 0, d > 0$ ไอเกนแวลูและไอเกนเวกเตอร์แยกได้สามกรณีคล้ายคลึงกับข้อ 2.2 หนุมตรงไปตรงมากับสาวเก็บกด สองกรณีแรกได้แก่กรณี $d^2 > 4b|c|$ และกรณี $d^2 = 4b|c|$ มีไอเกนแวลูเป็นจำนวนจริงบวก ถ้าเส้นทาง $\mathbf{r}(t)$ เหลือมไปจากจุดตรึง (0, 0) พอเวลาผ่านไปมันจะเคลื่อนออกจากจุดตรึงดังกล่าว คล้ายคลึงกับเมื่อคว่ำอ่างก้นอ่างกลายเป็นจุดสูงสุด ลูกบอลกลิ้งออกจากจุดสูงสุดเสมอ ตำแหน่งที่จุดสูงสุดไม่มีเสถียรภาพ จึงเรียกจุดตรึง (0, 0) ประเภทนี้ว่า **ไม่เสถียร (unstable node)** รูปที่ 4ก และ ข แสดงเส้นทางความรัก $\mathbf{r}(t)$ เคลื่อนออกจากจุดตรึง ความรักของเขาและเธอจะลงเอยรักซึ่งกันและกันหรือเกลียดซึ่งกันและกันขึ้นอยู่กับว่า เมื่อแรกพบนุชหลงรักเข้มก่อนหรือเข้มหลงรักนุชก่อน ส่วนกรณีสุดท้าย $d^2 < 4b|c|$ มีไอเกนแวลูซึ่งมีส่วนจริงเป็นบวกและส่วนจินตภาพเป็นคอนจูเกตซึ่งกันและกัน การที่มีส่วนจริงเป็นบวกทำให้เส้นทาง $\mathbf{r}(t)$ วนออกจากจุดตรึงคล้ายเกลียว ด้วยเหตุนี้จึงเรียกจุดตรึง (0, 0) ลักษณะนี้

ว่าเป็นประเภท เกลียวไม่เสถียร (unstable spiral) รูปที่ 4ค แสดงเส้นทางความรัก $r(t)$ วนออกจากจุดตรึงด้วยความเร็วเชิงมุมเท่ากับในข้อ 2.2 หมุนตรงไปตรงมากับสาวเก็บกด เข้มและนุชจึงสลับกันรักและสลับกันเกลียดด้วยความรู้สึกรักและเกลียดซึ่งนับวันแรงขึ้นเรื่อยๆ

ตัวอย่างในระบบกลศาสตร์เหมือนในรูปที่ 3 แต่ความหนัก η ของของเหลวมีค่าลบ ของเหลวจะให้พลังงานแก่มวล M ทำให้สั่นด้วยระยะขีด x และความเร็ว v ที่มากขึ้นเรื่อยๆ และเส้นทางเดินเคลื่อนออกจาก $(0, 0)$ ไปยัง $(x = \pm\infty, v = \pm\infty)$

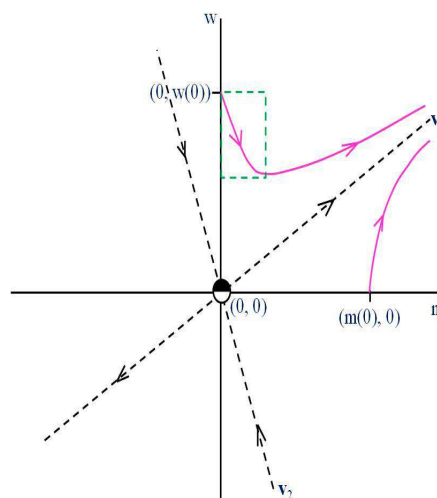


รูปที่ 4 (ก) ถ้าเข้มหลงรักนุชก่อน $(m(0), 0)$ ความรักของเขาและเธอจะจบลงด้วยความเกลียดชังซึ่งกันและกัน หากว่านุชหลงรักเข้มก่อน $(0, w(0))$ ความรักจะลงเอยเป็นรักซึ่งกันและกันตลอดไป ในรูปแสดงจุดตรึงประเภทไม่เสถียรด้วยวงกลมโป่ง (ข) แสดงกรณีที่ไอเกนเวกเตอร์ v_1, v_2 เท่ากัน เมื่อเวลาเนิ่นนาน $t \rightarrow \infty$ เส้นทางความรัก $r(t)$ จะขนานกับไอเกนเวกเตอร์ (ค) เข้มและนุชสลับกันรักและสลับกันเกลียดด้วยความรู้สึกแรงขึ้นเรื่อยๆ

2.4 หมุนตรงไปตรงมากับสาวหาวเคราะห์วง กล่าวคือ $b > 0$ และ $c > 0, d < 0$

ลักษณะนิสัยของเข้มยังคงเหมือนเดิม ส่วนนุชมีนิสัยคือยิ่งเข้มรักเธอเธอก็ยิ่งรักเขาซึ่งบรรยายด้วย c มีค่าบวก แต่เธอหาวเคราะห์ว่าวันหนึ่งเข้มอาจทิ้งเธอ เธอจึงพยายามข่มใจตัวเองให้รักเขมน้อยลงจะได้ไม่ต้องเสียใจเมื่อวันนั้นมาถึงซึ่งบรรยายด้วย d มีค่าลบ สถานการณ์รักนี้คือ $a = 0, b > 0, c > 0, d < 0$

ซึ่งมีไอเกนแวลู λ_1 เป็นบวก ส่วน λ_2 เป็นลบ ไอเกนเวกเตอร์ v_1 เป็นแนวของความไม่เสถียร ส่วน v_2 เป็นแนวของความเสถียร ทำให้มีผลเฉลยคล้ายกับอานม้าซึ่งมีแนวหนึ่งโค้งลงส่วนอีกแนวโค้งขึ้น จึงเรียกจุดตรึง $(0, 0)$ ประเภทนี้ว่า อานม้า (saddle) รูปที่ 5 แสดงเส้นทางความรัก $r(t)$ เคลื่อนออกจากจุดตรึงและค่อยๆ ถูเข้าสู่ v_1 ความรักของเขาและเธอจึงลงเอยเป็นรักซึ่งกันและกันตลอดไป อย่างไรก็ตาม สำหรับนุชหลงรักเข้มก่อนเส้นทางความรัก $r(t)$ ช่วงแรกเคลื่อนเข้าหาจุดตรึงก่อนเคลื่อนออกในภายหลัง

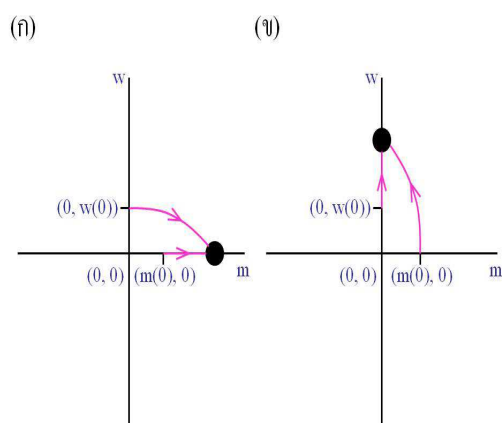


รูปที่ 5 ไม่ว่าเมื่อแรกพบเข้มหลงรักนุชก่อน $(m(0), 0)$ หรือนุชหลงรักเข้มก่อน $(0, w(0))$ เส้นทางความรัก $r(t)$ ต่างลงเอยเป็นรักซึ่งกันและกันตลอดไป ในรูปแสดงจุดตรึงประเภทอานม้าด้วยวงกลมครึ่งที่บดครึ่งโป่ง แต่สำหรับนุชหลงรักเข้มก่อนมีช่วงทดสอบความจริงใจของเข้มดังแสดงในกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า ความหาวเคราะห์ของนุชทำให้เธอลดความรักที่มีต่อเข้มในช่วงแรก แม้กระนั้นเข้มก็ยังคงเพิ่มความรักที่มีต่อเธอ เมื่อผ่านช่วงทดสอบความจริงใจซึ่งคือออกจากกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าแล้ว นุชเริ่มมั่นใจว่าเข้มเป็นตัวจริงจึงเพิ่มความรักที่มีต่อเขา

3. สรุป

บทความนี้ได้อธิบายระบบสมการเชิงเส้นในสองมิติที่บรรยายสองตัวแปรพลวัต ในที่นี้คือความรักของเข้มและของนุช ลักษณะนิสัยของเขาและเธอปรากฏเป็นพารามิเตอร์ในระบบสมการซึ่งจำแนกประเภทของจุดตรึง ระบบสมการเชิงเส้นนี้มีจุดตรึงแค่จุดเดียว $(0, 0)$ ความรักของเขาและเธอจะลงเอยเช่นไรขึ้นกับประเภทของจุดตรึงได้แก่ ศูนย์กลาง, เสถียร, เกลียวเสถียร,

ไม่เสถียร, เกลียวไม่เสถียร, และอานม้า แม้ว่าระบบสมการเป็นแค่แบบเชิงเส้น แต่ก็สามารถมีชะตากรรมขึ้นกับสภาวะตอนเริ่มต้น เช่น ในรูปที่ 4ก และ ข ความรักระหว่างหนุ่มตรงไปตรงมากับสาวจี๋อายจะจบลงด้วยความสุขหรือความเศร้าขึ้นอยู่กับว่าหนุ่มหลรักเข้มก่อนหรือเข้มหลรักหนุ่มก่อน พบว่าในตัวอย่างความรักสี่แบบมีเพียงสองแบบ คือ ความรักระหว่างหนุ่มตรงไปตรงมากับสาวจี๋อายโดยหนุ่มหลรักเข้มก่อน และ ความรักระหว่างหนุ่มตรงไปตรงมากับสาวหวาดระแวง ที่จะลงเอยด้วยความสุข นอกจากนี้ยังได้ยกตัวอย่างระบบพลวัตต่างๆ ในวิชากลศาสตร์ที่มีเส้นทางเดินในปริภูมิเฟสลักษณะเดียวกันมาประกอบด้วย



รูปที่ 6 แสดงเส้นทางเดินที่ลงเอยเป็นรักข้างเดียว (ก) เข้มรักหนุ่มข้างเดียว (ข) หนุ่มรักเข้มข้างเดียว

แน่นอนว่าสิ่งหนึ่งที่ขาดหายไปจากระบบสมการเชิงเส้นนี้คือความรักข้างเดียว รูปที่ 6 แสดงตัวอย่างความรักข้างเดียวแทนด้วยจุดตรึงประเภทเสถียรบนแกนบวก m สำหรับเข้มรักหนุ่มข้างเดียว หรือ บนแกนบวก w สำหรับหนุ่มรักเข้มข้างเดียว แต่จุดตรึงบนแกนบวกทั้งสองจะเกิดขึ้นได้ระบบสมการต้องไม่เชิงเส้น [4] การแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นเพื่อหาการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรพลวัตกับเวลากระทำได้โดยวิธีเชิงตัวเลข เส้นทางเดินของตัวแปรพลวัตในปริภูมิเฟสเมื่อเวลาผ่านไปเนิ่นนาน $t \rightarrow \infty$ ที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลขไม่มีความแม่นยำและไม่ก่อให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับอิทธิพลของพารามิเตอร์ในระบบสมการไม่เชิงเส้น การวิเคราะห์จุดตรึงจึงเป็นเครื่องมือหนึ่งช่วยให้เข้าใจเชิงคุณภาพการ

เปลี่ยนแปลงของตัวแปรพลวัตโดยไม่จำเป็นต้องทราบคำตอบของระบบสมการก่อน

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์ชาญกิจ คันถ่อง เป็นอย่างมากสำหรับคำแนะนำในการเขียนบทความ

เอกสารอ้างอิง

- [1] เพลง ดาว ร้องโดย คริสติน คำร้องเขียนโดย บอย โกสิยพงษ์
- [2] S. H. Strogatz, Math. Magazine **61**, 35 (1988).
- [3] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos (Perseus Books Publishing, New York, 1998).
- [4] X. Liao and J. Ran, Chaos Solit. Fract. **31**, 853 (2007).

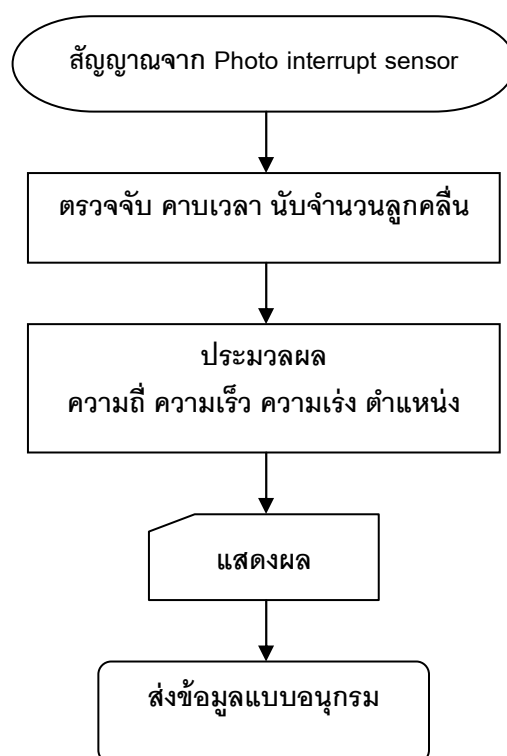
การสร้างระบบตรวจจับการเคลื่อนที่ที่ควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ สำหรับการทดลองในรายวิชากลศาสตร์

จิตติ สุทธิวงศ์¹

การเรียนวิชาฟิสิกส์ในชั้นปีที่ 1 เนื้อหาการเรียนส่วนใหญ่จะเป็นเรื่องเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ การศึกษาเรื่องการเคลื่อนที่ให้เกิดความรู้ความเข้าใจจะต้องทำการทดลอง ในการเรียนการสอนวิชาปฏิบัติการฟิสิกส์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี มีอุปกรณ์การทดลองจำนวนมากที่ใช้ Photo gate ที่ทำหน้าที่ตรวจจับการเคลื่อนที่ อุปกรณ์การทดลองที่มี Photo gate เป็นอุปกรณ์ประกอบในชุดทดลองแต่มีราคาค่อนข้างแพง ดังนั้นในโครงการนี้จึงมีการสนใจสร้างระบบตรวจจับการเคลื่อนที่และบันทึกข้อมูลโดยคอมพิวเตอร์ขึ้นเองที่มีราคาถูกขึ้น ทั้งนี้ระบบตรวจจับการเคลื่อนที่ที่สามารถนำมาใช้ได้ทันทีกับชุดทดลองเรื่องการสั่นของระบบมวลสปริงเคลื่อนที่ในแนวตั้งภายใต้ความหน่วงชนิดที่เป็นของเหลวมีความหนืดโดยให้มีความสามารถตรวจจับการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งสูงสุดและต่ำสุดของแท่งมวลที่มีความสัมพันธ์กับเวลาโดยใช้คอมพิวเตอร์เป็นอุปกรณ์ช่วยในการเก็บบันทึกข้อมูลการทดลอง ข้อมูลที่ได้สามารถนำไปวิเคราะห์หาความถี่และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของระบบ การทดลองโดยใช้คอมพิวเตอร์เป็นอุปกรณ์ช่วยในการเก็บบันทึกข้อมูลทำให้ผู้ทดลองสามารถทำการบันทึกผลการทดลองด้วยตนเอง ปกติการทดลองนี้ต้องใช้ผู้ทำการทดลองสองคนช่วยกันในการบันทึกข้อมูล เราหวังว่าระบบตรวจจับการเคลื่อนที่ด้วยคอมพิวเตอร์สามารถช่วยให้ผู้ทำการทดลองเกิดความรู้ความเข้าใจในหัวข้ออื่นๆของระบบการสั่นภายใต้ตัวหน่วง

ระบบตรวจจับการเคลื่อนที่ (Photo gate sensor) ประกอบด้วยอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่ทำหน้าที่อย่างร่วมกันคือ 1. ชุดอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่กำเนิดสัญญาณรูปคลื่นสี่เหลี่ยม 2. ชุดอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่ตรวจวัดและประมวลผล 3. ชุดแสดงผล อุปกรณ์ที่ทำหน้าที่กำเนิดสัญญาณรูปคลื่นสี่เหลี่ยมนี้เรียกว่า Photo interrupt sensor ประกอบด้วยอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์สองชนิด

ทำงานร่วมกันคือ Photo diode กับ Photo transistor โดยอาศัยหลักการมีตัวส่งแสง (Photo diode) และตัวรับแสง (Photo transistor) ซึ่งทำหน้าที่เหมือนเป็นสวิทช์ที่ควบคุมการทำงานด้วยแสงเมื่อมีวัตถุหรือสิ่งกีดขวางทางเดินของแสงสวิทช์ก็จะทำหน้าที่เป็นวงจรแบบเปิดและทำนองเดียวกันถ้าไม่มีสิ่งกีดขวางทางเดินแสงสวิทช์ก็จะทำหน้าที่เป็นวงจรแบบปิด ปรากฏการณ์เช่นนี้จะทำให้ Photo interrupt sensor กำเนิดสัญญาณรูปคลื่นสี่เหลี่ยมที่มีความยาวของสัญญาณตามเวลาที่สิ่งกีดขวางนั้นเคลื่อนที่ผ่าน จากหลักการนี้สามารถนำไปสู่การหาเวลา ความเร็ว ความเร่งและตำแหน่งการเคลื่อนที่ของวัตถุ ไมโครคอนโทรลเลอร์เป็นอุปกรณ์



รูปที่ 1 แผนผังการทำงานของ Photo gate

¹ ศูนย์เครื่องมือวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

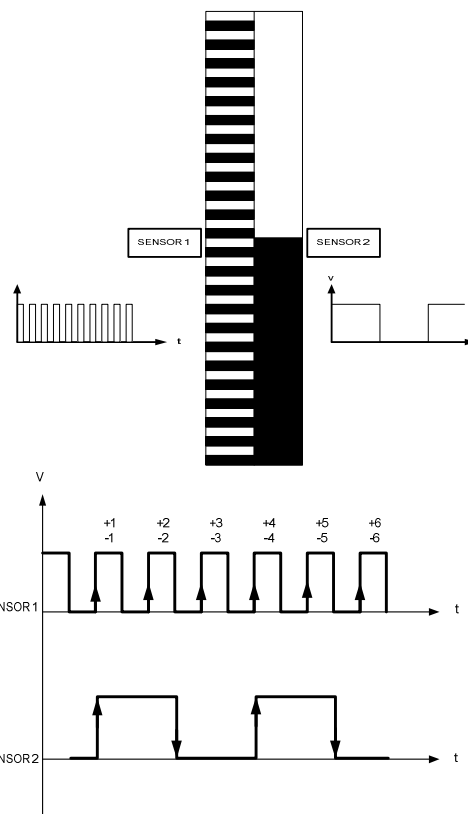
อิเล็กทรอนิกส์ที่มีคุณสมบัติสามารถเขียนโปรแกรมควบคุมได้ และราคาไม่แพง จึงถูกนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการสร้างชุด Photo gate ในการสร้างชุด Photo gate ในงานวิจัยนี้ได้นำมาไมโครคอนโทรลเลอร์ตระกูล AVR รุ่น Atmega128 เป็นตัวรับจับประมวลและส่งข้อมูลแบบอนุกรมที่ได้จากการตรวจจับสัญญาณรูปคลื่นสี่เหลี่ยมที่เกิดจาก Photo interrupt sensor การทำงานของ Photo gate สามารถเขียนเป็นผังการทำงานตามขั้นตอนได้ดังนี้

ระบบตรวจจับการเคลื่อนที่ที่สร้างขึ้นนี้สามารถนำมาใช้เป็นส่วนสำคัญในการวัดตำแหน่งในชุดทดลองการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกที่มีแรงกระตุ้นภายนอก ดังรูปที่ 2 ที่ได้รับการติดตั้งระบบตรวจจับด้วยคอมพิวเตอร์สามารถแสดงผลตอบสนองของการสั่นของค่าตำแหน่งสูงสุดและต่ำสุดที่สัมพันธ์กับเวลาและบันทึกข้อมูลเวลา ขนาดการสั่น ความถี่มวล ความถี่แรงกระทำจากภายนอก



รูปที่ 2 ชุดอุปกรณ์การทดลองการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกที่ได้รับการติดตั้งระบบตรวจจับด้วยคอมพิวเตอร์

การวัดขนาดขนาดการสั่นของแท่งมวลแขวนใช้วิธีการติดแถบมืดสว่างที่มีระยะห่างกัน 1 มิลลิเมตรที่ขอบหนึ่งด้านและขอบอีกด้านของแท่งมาแขวน โดยแบ่งเป็นแถบมืดครึ่งหนึ่งอีกครั้งหนึ่งเป็นแถบสว่าง แล้วนำโฟโตอินเตอร์รัฟเซ็นเซอร์มาทำการตรวจจับที่แถบสว่างทั้งสองด้านเมื่อแท่งมวลเคลื่อนที่โฟโตอินเตอร์รัฟเซ็นเซอร์ด้านแถบที่ห่างกัน 1 มิลลิเมตรจะเป็นตัววัดจำนวนของ

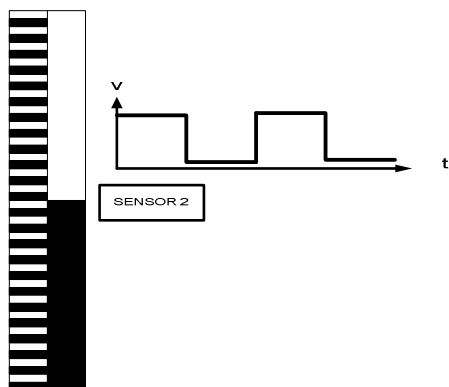


รูปที่ 3 การนับสัญญาณการเคลื่อนที่ของแท่งมวล

แถบสว่างว่าผ่านไปอีกแถบก็จะได้ค่าขนาดการเคลื่อนที่ของแท่งมวลและที่โฟโตอินเตอร์รัฟเซ็นเซอร์อีกด้านที่ติดกับแถบมืดสว่างที่เป็นแถบขาวก็จะเป็นตัวบอกว่าแท่งมวลเคลื่อนที่สูงสุด หรือต่ำสุด ที่ตำแหน่งสูงสุดนี้จะได้ค่าขนาดการสั่นสูงสุดของแท่งมวลและที่ตำแหน่งต่ำสุดจะได้ค่าขนาดการสั่นต่ำสุดของแท่งมวลซึ่งโฟโตอินเตอร์รัฟเซ็นเซอร์ทั้งสองจะให้สัญญาณไฟฟ้าที่เป็นลักษณะคลื่นสี่เหลี่ยมดังรูปที่ 3 การหาความถี่ของแท่งมวลเมื่อแท่งมวลเคลื่อนที่ขึ้นลงครบ 1 รอบ แถบมืดสว่างชุดที่ 2 จะเคลื่อนที่ติดกับ Photo Interrupt Sensor ทำให้เกิดรูปคลื่นสี่เหลี่ยมที่มีคาบเวลาเท่ากับเวลาที่แท่งมวลใช้ในการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบผ่านจุดอ้างอิงดังรูปที่ 4

การวัดความถี่แรงกระทำกับระบบแรงภายนอกที่กระทำกับระบบเป็นแรงที่ได้จากการกระตุกของเชือก ปลายด้านหนึ่งผูกติดกับสปริงและปลายอีกด้านหนึ่งผูกติดกับล้อหมุนที่สามารถปรับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางการหมุน ขั้วเคลื่อนโดยมอเตอร์สามารถปรับความเร็วรอบได้ การวัดความถี่ของแรงที่กระทำกับแท่งมวล

แขวนสามารถหาได้จากจานหมุนที่ติดติดกับแกนเพลาล้อหมุน มีวิธีการหาความถี่เชิงมุมของล้อหมุนคือ จานหมุนมีจำนวนแถบทั้งหมด 100 แถบ ให้แถบหนึ่งรอบแทนด้วย R ในเวลา 1 วินาที นับจำนวนแถบ ค่าที่นับได้แทนด้วย S



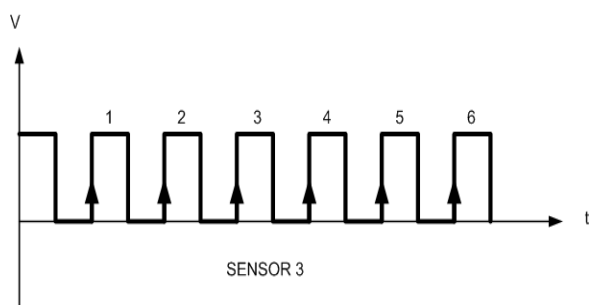
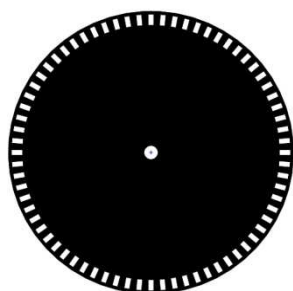
รูปที่ 4 การวัดความถี่แท่งมวล

ดังรูปที่ 5 เมื่อจานหมุน 1 รอบจะได้ $R = \frac{2\pi}{100} \text{ rad /}$

แถบ ความถี่เชิงมุมของการหมุนหาได้จาก $\omega = R \times S \text{ (rad / sec)}$

และ $\omega = 2\pi f \text{ (rad / sec)}$ ดังนั้นจะได้ความถี่ของจานหมุนคือ

$$f = \frac{S}{100} \text{ (Hz)}$$



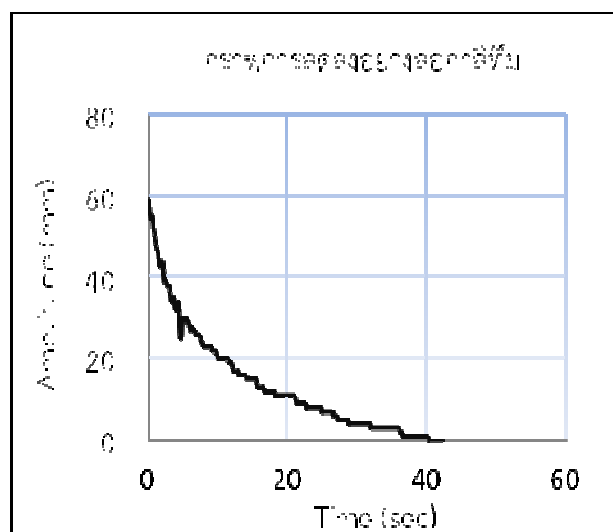
รูปที่ 5 การนับจำนวนแถบวงล้อ

การทดลองเพื่อศึกษาการสั่นของระบบหนึ่งอันดับขึ้นความเป็นอิสระของการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของมวลติดสปริง ในหัวข้อของการสั่นอิสระเมื่อมีตัวหน่วงแบบความหนืด และเป็นการทดลองหาค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดที่เป็นของเหลวสามชนิดที่มีค่าความหนืดต่างกัน ของเหลวที่ใช้ในการทดลองมีความหนืดต่างกันจากน้อยไปหามากคือ อากาศ น้ำเปล่า และน้ำยาล้างจาน วิธีการทดลองจะทำการดึงแท่งมวลเพื่อให้ขนาดเริ่มต้นแล้วปล่อยเพื่อให้มวลเคลื่อนที่อย่างอิสระ ทำให้ขนาดการสั่นแคบลงๆ ทำการบันทึกข้อมูลของขนาดการสั่น ณ เวลานั้นๆ นำข้อมูลที่ได้ไปหาความ สัมพันธ์การลดลงอย่างลอการิทึม (Logarithmic Decrement, δ)

มวลของระบบ $m = 0.052 \text{ กิโลกรัม}$

ค่าคงที่สปริง $k = 17.51 \text{ นิวตัน/เมตร}$

ความถี่ธรรมชาติ $\omega_n = 18.35 \text{ เรเดียน/วินาที}$



กราฟที่ 1 การลดลงของแอมพลิจูดกับเวลา

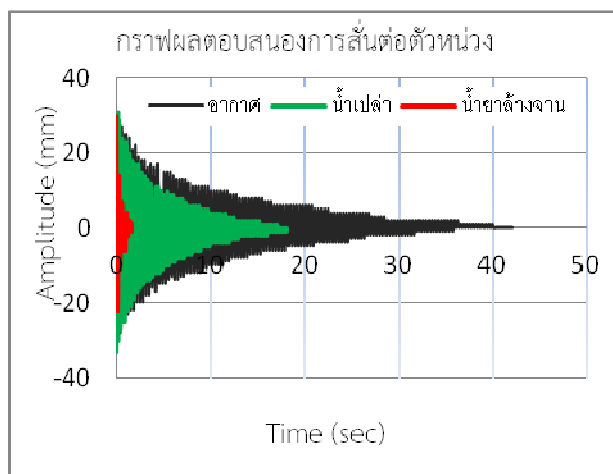
คำนวณหาความหน่วงของตัวหน่วงของแต่ละชนิดได้ดังนี้

$$1. \text{ค่าตัวหน่วงอากาศ} = 2.705 \times 10^{-3} \text{ (s. N/m)}$$

$$2. \text{ค่าตัวหน่วงน้ำเปล่า} = 3.023 \times 10^{-3} \text{ (s. N/m)}$$

$$3. \text{ค่าตัวหน่วงน้ำยาล้างจาน} = 16.39 \times 10^{-3} \text{ (s. N/m)}$$

จากการทดลองพบว่าค่าอัตราส่วนความหน่วง Damping Ratio(ζ) ของชนิดตัวหน่วงที่มีความหนืดเพิ่มขึ้นจะมีอัตราส่วนความหน่วง Damping Ratio(ζ) และค่าความหน่วงที่มากขึ้นเช่นเดียวกัน



กราฟที่ 2 ผลตอบสนองการสั่นต่อชนิดตัวหน่วงที่มีความหนืดต่างกัน

สรุป

ในบทความนี้ได้อธิบายถึงการสร้างระบบตรวจจับการเคลื่อนที่ควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ และนำมาใช้ประยุกต์ในการวัดตำแหน่งและความถี่ของแรงกระตุ้นในชุดทดลองการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกที่มีความหน่วงได้สำเร็จ ทั้งนี้ระบบควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ทำให้การทดลองของนักศึกษาเป็นไปได้ง่ายขึ้นโดยสามารถทำการทดลองเพียงหนึ่งคนแทนการทดลองแบบเก่าที่ต้องใช้อย่างน้อยสองคน

กิตติกรรมประกาศ

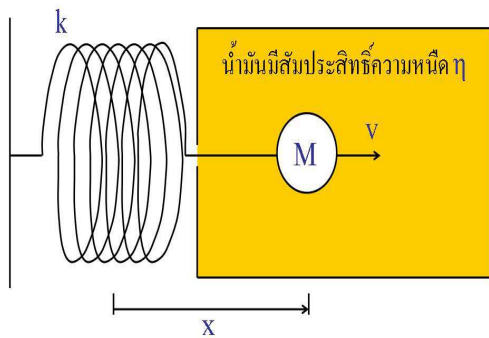
ทั้งขอขอบคุณความช่วยเหลือทั้งด้านวิชาการและด้านดำเนินงานวิจัย จากบุคคลและกลุ่มบุคคลต่าง ๆ จาก สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี และศูนย์เครื่องมือวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่สนับสนุนอุปกรณ์ เครื่องมือในการทำงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

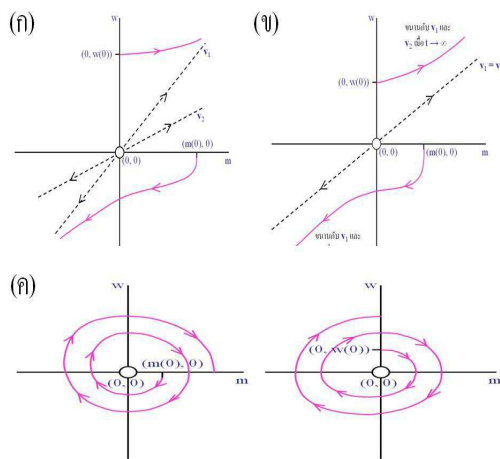
- [1] กนัธร ชำนิประศาสน์, การวัดเชิงกลด้วย LabVIEW, สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- [2] ชินรัตน์ กอบเดช, คู่มือปฏิบัติการฟิสิกส์ 1, สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
- [3] Daniel J. Inman, Engineering Vibrations, Third Edition, Pearson International Edition, 2008.

[4] ประจัน พลังสันติกุล, การประยุกต์ใช้งานภาษา C สำหรับไมโครคอนโทรลเลอร์ AVR, แอฟซอฟต์แวร์, 2551

รูปประกอบจากบทความ “ความรักจะลงเอยเช่นไร” หน้า 19 – 24



รูปที่ 3

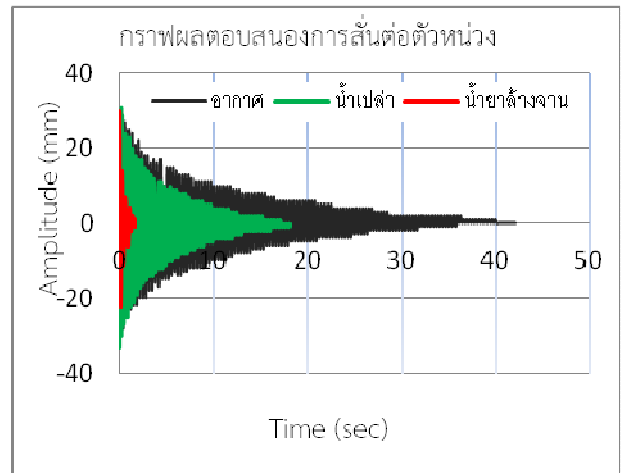


รูปที่ 4

รูปประกอบจากบทความ “มารู้จักจักรวาลแบบฟองตัวกันเถอะ!
ตอนจบ” หน้า 15-21



รูปที่ 2



กราฟที่ 2

MHC
MERCANTILE HI-TECH CO., LTD.

บริษัท เมอร์แคนไทล์ ไฮเทค จำกัด เป็นตัวแทนจำหน่าย
เครื่องมือและวัสดุอุปกรณ์ทางวิทยาศาสตร์ ที่ใช้ในการ
ทดลองและวิจัย ในสถาบันการศึกษา ศูนย์วิจัย และ
ห้องปฏิบัติการของโรงงานอุตสาหกรรมอิเล็กทรอนิกส์
มานานกว่า 20 ปี



Kurt J. Lesker
Company

Vacuum components, materials
and systems for research and production



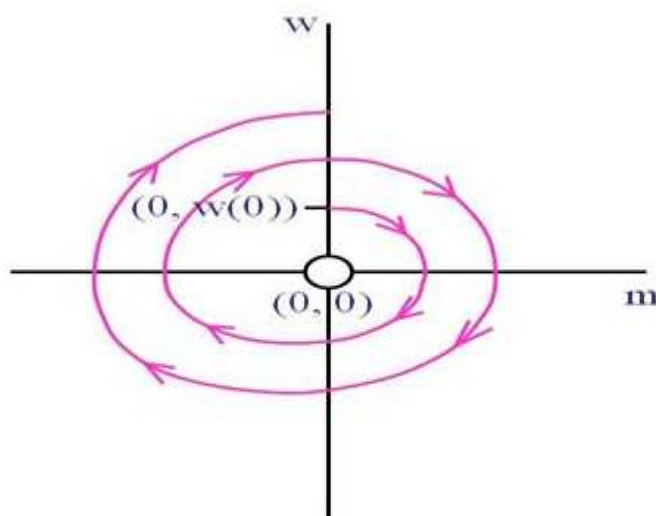
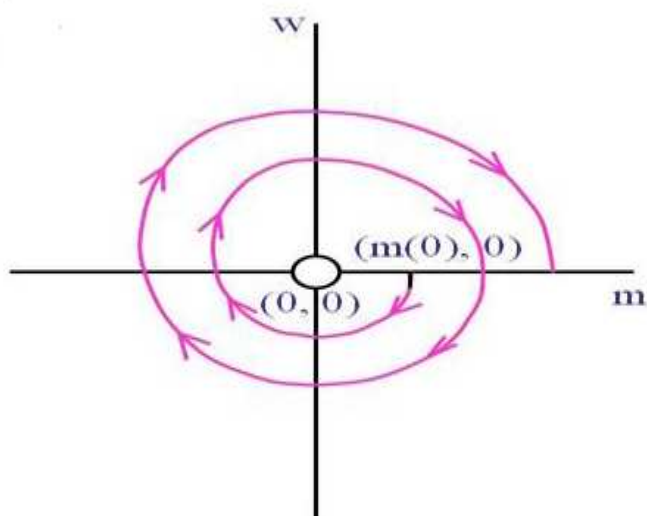
Quadrupole Mass Spectrometers for gas,
plasma, vacuum and surface analysis



Particle counters in liquid samples

บริษัท เมอร์แคนไทล์ ไฮเทค จำกัด 2220/86 ซ.รามคำแหง 36/1
ถ.รามคำแหง แขวงหัวหมาก เขตบางกะปิ กทม 10240
โทรศัพท์ : 66-2-732-2638-40 แฟกซ์ : 66-2-375-2709
Email : sales@mercantile.co.th, support@mercantile.co.th
www.mercantile.co.th

“ความรักจะลงเอยเช่นไร” (ดูรายละเอียดในเล่ม)



สมาคมฟิสิกส์ไทย

สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

111 ถนนมหาวิทยาลัย

ต. สุรนารี อ. เมือง

จ. นครราชสีมา 30000

THAI PHYSICS SOCIETY

School of Physics, Suranaree Univ. of Technology

111 University Avenue

Tambon Suranaree, Muang District

Nakhon Ratchasima 30000

ชำระค่าฝากส่งเป็นรายเดือน

ใบอนุญาตเลขที่ 187/2552

ปท.จ. นครราชสีมา

สิ่งตีพิมพ์

หากไม่ถึงผู้รับ โปรดส่งคืนสมาคมฟิสิกส์ไทย