

Original Research Article

ปริมาตรและผลคูณไขว้ในอวกาศ 3 มิติ

Volume and Cross Product in 3-Dimensional Space

ชานุกิจ คั่นฉ่อง

Chankit Khanchong

ภาควิชาฟิสิกส์และวัสดุศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200

Department of Physics and Materials Science, Faculty of Science, Chiang Mai University,
Muang, Chiang Mai 50200, Thailand

*Corresponding author E-mail: chankit.kh@gmail.com

วันที่รับบทความ: 13 มิถุนายน 2566, วันแก้ไขบทความ: 14 สิงหาคม 2566, วันตอบรับบทความ: 14 สิงหาคม 2566

Received: 13th June 2023, Revised: 14th August 2023, Accepted: 14th August 2023

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เราได้อธิบายความหมายเชิงเรขาคณิตของแนวคิดผลคูณไขว้ของเวกเตอร์ในอวกาศแบบยูคลิด 3 มิติโดยการเชื่อมโยงกับชิ้นประกอบปริมาตรในพิกัดทั่วไป

คำสำคัญ: ผลคูณไขว้, เวกเตอร์, ชิ้นประกอบปริมาตร, พิกัดทั่วไป

Abstract

In this article, we explain the geometrical interpretation of the concept of cross product of vectors in 3-dimensional Euclidean space by linking with the volume element in general coordinates.

Keywords: Cross product, Vector, Volume element, General coordinates

บทนำ

ผู้เขียนเคยเขียนบทความชุดหนึ่งในวารสารฟิสิกส์ไทย [1–3] ว่าด้วยการอธิบายแนวคิดของเวกเตอร์ในฐานะปริมาณฟิสิกส์ รวมทั้งการดำเนินการของเวกเตอร์ โดยใช้แนวคิดที่ว่า “ปริมาณฟิสิกส์อยู่ในอวกาศและเวลา สมบัติของสถานที่อยู่คือ อวกาศและเวลา เป็นตัวกำหนดสิ่งที่สามารถอาศัยอยู่ว่ามีลักษณะเช่นไร เปรียบเสมือนกับการใส่สิ่งของลงในกล่อง กล่องก็จะกำหนดลักษณะสิ่งของที่สามารถใส่ลงในกล่องได้” ในบทความชุดดังกล่าวได้อธิบายในเชิงเรขาคณิต (Geometrical interpretation) ว่าทำไมเวกเตอร์ต้องมีทิศทาง มีการบวก/ลบเวกเตอร์ และมีผลคูณจุดหรือผลคูณภายใน ให้เห็นภาพ แต่ยังมีสมบัติสำคัญอีกประการหนึ่งของเวกเตอร์ที่ซับซ้อนกว่า นั่นคือผลคูณไขว้ (Cross product) ที่ยังติดใจไม่ได้อธิบาย หลายปีต่อมา ผู้เขียนได้มีโอกาสที่จะอธิบายในบทความนี้ โดยจะเริ่มจากการนิยามชิ้นประกอบปริมาตร (Volume element) ที่เป็นวัตถุทางเรขาคณิตชนิดหนึ่งที่สร้างขึ้นจากการกระจัด แล้วแสดงการเชื่อมโยงไปสู่การนิยามผลคูณไขว้ของเวกเตอร์และสูตรการคำนวณผลคูณไขว้ในรูปพิกัดทั่วไป (General coordinates) สำหรับพิกัดทั่วไปนั้น ไม่จำเป็นต้องมีแกนพิกัดที่ตั้งฉากกัน (Orthogonal) และไม่จำเป็นต้องเป็นแกนพิกัดคงที่ ในบทความนี้จะเขียนอธิบายแนวคิดอย่างทั่วไปโดยใช้พิกัดทั่วไป ไม่ได้หยิบยก

กรณีง่าย ๆ ที่สามารถนึกภาพได้ง่ายอย่างในบทความชุดก่อน [1-3] ทำให้บทความนี้เป็นการเขียนเรียบเรียงใหม่ โดยไม่ได้มีเนื้อหาที่ต่อเนื่องกัน

บทความนี้เน้นการอธิบายแนวคิดของผลคูณไขว้จากชั้นประกอบปริมาตรในรูปพิกัดทั่วไป ในการอธิบายได้ละการคำนวณและการอ้างเหตุผลที่เคร่งครัดไปบ้าง สำหรับคณิตศาสตร์ที่ใช้ในบทความ เช่น การวิเคราะห์เวกเตอร์ในพิกัดทั่วไป สามารถค้นรายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก [4] และ [5]

อวกาศแบบยูคลิด 3 มิติ

ก่อนอื่น ขอทบทวนสมบัติพื้นฐานหรือมูลบท (Axioms) ของอวกาศแบบยูคลิด 3 มิติ (3-dimensional Euclidean space) (ซึ่งในที่นี้จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{R}^3$) ที่นำไปสู่สมบัติต่าง ๆ ของปริมาณเวกเตอร์ดังนี้ (ในบทความนี้ ลำดับมูลบทแต่ละข้อของอวกาศโดยใช้ (ก) ถึง (ง) เป็นหัวข้อแทรก)

(ก) อวกาศต่อเนื่อง 3 มิติที่สามารถบรรยายได้ด้วยพิกัดและมีฟังก์ชันการแปลงระหว่างบางพิกัดที่เรียบหรืออนุพันธ์มีค่า (ถ้ากล่าวอย่างเคร่งครัดในวิชาเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential geometry) ก็คืออวกาศที่เป็นแมนิโฟลด์แบบเรียบ (Differentiable manifold) [6] แต่ในที่นี้ เราเน้นทำความเข้าใจแนวคิด ก็จะไม่ใช้การอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ที่ใช้ในวิชาเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์) มูลบทนี้หมายความว่า จุดหนึ่ง ๆ ในอวกาศต่อเนื่อง 3 มิติ สามารถบรรยายได้ด้วยพิกัดซึ่งเป็นชุดของตัวเลข 3 ตัว และสามารถมีพิกัดหลายชุดที่บรรยายถึงจุดเดียวกัน ระหว่างบางพิกัดที่ต่างกัน เช่น $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ และ $x^{i'} = (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ มีฟังก์ชันการแปลงระหว่างพิกัดที่เรียบและมีฟังก์ชันผกผัน ซึ่งจะเขียนย่อ ๆ ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{x}'(\bar{x}) &= x^{i'}(x^j) = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) \\ \bar{x}(\bar{x}') &= x^i(x^{j'}) = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})\end{aligned}\tag{1}$$

สำหรับฟังก์ชันการแปลงพิกัดที่เรียบ ก็จะสะดวกกว่าที่จะแสดงสมบัติของฟังก์ชันในรูปผลต่างอนุพันธ์ (Differential) กล่าวคือ

$$\begin{aligned}dx^{i'} &= dx^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \equiv \sum_{j=1}^3 dx^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \\ dx^i &= dx^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \equiv \sum_{j'=1'}^{3'} dx^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\end{aligned}\tag{2}$$

ในที่นี้ เราใช้ข้อตกลงผลบวกของไอน์สไตน์ (Einstein's summation convention) ที่ว่า ดัชนีที่ซ้ำกันแต่ละคู่ เช่น มิตินี้ i ซ้ำ หมายถึงการมีผลบวก $\sum_{i=1}^3$ ส่วนสัญลักษณ์ “ $\equiv$ ” หมายถึงเครื่องหมายเท่ากับที่ใช้เป็นนิยามหรือ

เอกลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ สมการ (2) ทำให้เราสามารถวิเคราะห์การแปลง dx^i ไปยัง $dx^{i'}$ ในรูปการแปลงเชิงเส้น (Linear transformation) ได้ โดยมี $X = [X_j^{i'}(x)] = [\partial x^{i'} / \partial x^j] = \partial x^{i'} / \partial x^j$ เป็น เมทริกซ์การแปลง (Transformation matrix) โดยให้ดัชนีบนเป็นลำดับของแถว ส่วนดัชนีล่างเป็นลำดับของหลัก ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์การแปลง เรียกว่า จาโคเบียน (Jacobian) กล่าวคือ

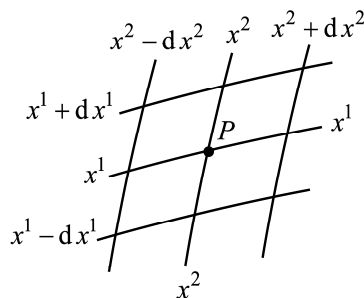
$$\det X = \det \frac{\partial x'}{\partial x} \equiv [i'j'k'] \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^3} \neq 0 \quad (3)$$

$$[ijk] \det \frac{\partial x'}{\partial x} = [i'j'k'] \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$$

โดยที่ $[ijk]$ คือ สัญลักษณ์การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation symbol) ที่กำหนดค่าตั้งต้นเป็น $[123]=1$ ถ้าสลับตัวเลขจาก 123 ไปเป็นจำนวนคี่ครั้งก็จะได้ค่า -1 เช่น $[213]=-1$ ถ้าสลับตัวเลขจาก 123 ไปเป็นจำนวนคู่ครั้งก็จะได้ค่า 1 เช่น $[231]=1$ ส่วนถ้ามีดัชนีซ้ำกันจะได้ค่า 0 เช่น $[113]=0=[111]$ การที่ $\det X \neq 0$ ทำให้เมทริกซ์ผกผันที่นำไปสู่การแปลงผกผันที่มี $\det X^{-1} = 1/\det X \neq 0$ กล่าวคือ

$$X^{-1}X = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \left[\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \right] = [\delta_{j'}^{i'}] = I \quad (4)$$

พิจารณาเส้นทางหนึ่ง ๆ ในอวกาศ 3 มิติที่บรรยายด้วย $\vec{r}(\lambda) = (x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda))$ โดยที่มี λ เป็นตัวแปรเสริม (Parameter) ของเส้นทาง พิจารณาเส้นสัมผัส (Tangent line) ที่จุดหนึ่ง ๆ บนเส้นทางนี้มีทิศทาง $\vec{t} = d\vec{r}/d\lambda$ ซึ่งมองภาพได้เป็น “ลูกศร” หรือ เวกเตอร์สัมผัส (Tangent vector) ของเส้นทาง $\vec{r}(\lambda)$ ตัวอย่างเช่น วิถีโคจร (Trajectory) ของอนุภาคตามเวลา $\vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ ที่มีความเร็ว $\vec{v} = (dx^1/dt, dx^2/dt, dx^3/dt)$ แสดงทิศสัมผัสของวิถีโคจร ถ้าเราพิจารณาเส้นทางที่กำหนดให้ตัวแปรเสริมคือค่าพิกัดตัวใดตัวหนึ่ง เช่น $\lambda = x^1$ ก็จะเรียกเส้นทาง $\vec{r}(x^1) = (x^1(x^1), x^2 = \text{const}, x^3 = \text{const})$ นี้ว่า เส้นพิกัด x^1 (Coordinate line x^1) ซึ่งตามเส้นทางนี้มีค่าพิกัดอื่น ๆ $x^{j \neq 1}$ คงที่ทั้งหมด สำหรับเส้นพิกัด x^2 และเส้นพิกัด x^3 ก็นิยามได้ในทำนองเดียวกัน ตัวอย่างเช่น พิกัดคาร์ทีเซียน (x, y, z) มีเส้นพิกัด x ซึ่งเป็นแกน x ที่มีค่าพิกัด y และ z คงที่ สำหรับทิศตามเส้นสัมผัสของเส้นพิกัด x^i หนึ่ง ๆ แสดงได้ด้วย $\vec{e}_i = \partial \vec{r} / \partial x^i$ ทำให้มอง $\vec{e}_i dx^i$ (ที่มีดัชนี i เดียว) ได้ว่าเป็น “ลูกศร” $\vec{e}_i$ ที่ยืดออกโดยการคูณด้วยจำนวน dx^i ไปตามเส้นพิกัด เรียก $\vec{e}_i dx^i$ นี้ว่าเป็นชิ้นประกอบเส้น (Line element) หนึ่ง ๆ ของเส้นพิกัด x^i การที่จุด P ใด ๆ ในอวกาศแสดงได้ด้วยพิกัด $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ ก็คือ จุดตัดหนึ่ง ๆ ของเส้นพิกัด x^1, x^2 , และ x^3 นั่นเอง แสดงตัวอย่างกรณีอวกาศแบบยูคลิด 2 มิติ หรืออวกาศระนาบ 2 มิติ ดังรูปที่ 1

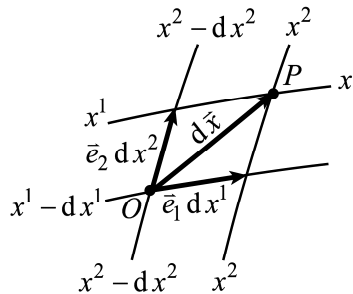


รูปที่ 1 แสดงจุด P ในอวกาศ 2 มิติ เป็นจุดตัดของเส้นพิกัด x^1 และ x^2

(ข) การเป็นอวกาศสัมพรรค (Affine space) กล่าวคือ สามารถเลือกจุดอ้างอิง O เป็นจุดใด ๆ ในอวกาศ แล้วสามารถแสดงตำแหน่งจุด P ใด ๆ ใกล้ ๆ (Neighborhood) จุด O เทียบกับจุด O ได้โดยใช้เวกเตอร์ตำแหน่ง (Position vector) $d\vec{x}$ ที่เป็นการกระจัดน้อยยิ่ง (Infinitesimal displacement) ที่ลากจากจุด O ไปยังจุด P เนื่องจากจุด P เป็นจุดตัดของเส้นพิกัด x^1 , x^2 และ x^3 ทำให้ $d\vec{x}$ สามารถประกอบขึ้นจากการกระจัดน้อยยิ่ง $\vec{e}_1 dx^1$, $\vec{e}_2 dx^2$ และ $\vec{e}_3 dx^3$ ตามเส้นพิกัดที่ออกจากจุด O ดังนั้นสำหรับจุด P ใด ๆ รอบจุด O เขียนได้เสมอว่า

$$d\vec{x} = \vec{e}_1 dx^1 + \vec{e}_2 dx^2 + \vec{e}_3 dx^3 = \vec{e}_i dx^i \quad (5)$$

ซึ่งนำไปสู่สมบัติ การรวมกันเชิงเส้น (Linear combination) (หรือ การบวกและลบ) ของเวกเตอร์ แสดงได้ดังรูปสาธิตในกรณีอวกาศแบบยูคลิด 2 มิติ หรืออวกาศระนาบ 2 มิติ ดังรูปที่ 2 สังเกตว่าเวกเตอร์ $d\vec{x}$ ใด ๆ ที่ออกจากจุด O หนึ่ง ๆ เขียนได้ในรูปเซตของเวกเตอร์ $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$ เรียกว่า ฐานหลัก (Basis) ส่วน $\vec{e}_i$ เรียกว่าเวกเตอร์ฐานหลัก ที่มีจำนวนเท่ากับมิติของอวกาศ



รูปที่ 2 ในอวกาศสัมพรรค 2 มิติ สามารถใช้การกระจัด $d\vec{x} = \vec{e}_1 dx^1 + \vec{e}_2 dx^2$ แสดงจุด P ใด ๆ ใกล้ ๆ จุด O เทียบกับจุด O ใด ๆ ในอวกาศนี้ได้

(ค) สมบัติเมตริก แจกแจงเป็น สมบัตีย่อย (ค.1) และ (ค.2) ดังนี้

(ค.1) ระยะทาง $ds = \|d\vec{r}\|$ ระหว่างจุด 2 จุด เช่น จากจุด O ไปยังจุด P ใด ๆ ที่อยู่ใกล้เคียง (Neighborhood) เขียนได้ในรูปพิกัดทั่วไปโดย สมการเมตริก (Metric equation) ดังนี้

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j = d\vec{x} \cdot d\vec{x} \\ &= (\vec{e}_i dx^i) \cdot (\vec{e}_j dx^j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j dx^i dx^j \end{aligned} \quad (6)$$

เราได้ใช้สัญลักษณ์ย่อ “ $ds^2 \equiv (d\vec{s})^2$ ” สมการ (6) แสดงการเขียนสมการเมตริกในรูปการดำเนินการกันเองของการกระจัดน้อยยิ่งในรูปพิกัดใด ๆ ซึ่งนำไปสู่ ผลคูณจุด (Dot product) ของเวกเตอร์นั่นเอง โดยที่

$$\begin{aligned}\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j &= g_{ij}(\bar{x}) = g_{ji}(\bar{x}) = \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i \\ \mathbf{g} &= [g_{ij}] , \quad \mathbf{g}^{-1} = [g^{ij}] \\ \mathbf{g}^{-1} \mathbf{g} &= [g^{ik} g_{kj}] = [\delta_j^i]\end{aligned}\quad (7)$$

สังเกตว่าในพิกัดทั่วไป ฐานหลัก $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^3$ ไม่จำเป็นต้องประกอบด้วยเวกเตอร์ฐานหลักที่ตั้งฉากกัน เช่น มี $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = g_{ij}(\bar{x})$ อยู่ในฐานะสนามในอวกาศที่ขึ้นกับตำแหน่งและมีค่าไม่เท่ากับ 0 ก็ได้ โดยมีปริมาณเทนเซอร์เมตริก (Metric tensor) ที่เขียนได้ในรูปเมตริกซ์สมมาตร $\mathbf{g} = [g_{ij}] = \mathbf{g}^T$ และมีตัวผกผันที่เขียนเป็น $\mathbf{g}^{-1} = [g^{ij}]$ จากสมบัตินี้ ทำให้เรานิยามพิกัด x_i ที่มีควบคู่ (Dual) ไปกับ x^i ได้ว่า

$$dx_i \equiv g_{ij} dx^j , \quad dx^i = g^{ij} dx_j \quad (8)$$

ในทำนองเดียวกัน นิยามฐานหลักส่วนกลับ (Reciprocal basis) $\{\bar{e}^i\}_{i=1}^3$ ที่มีควบคู่ไปกับฐานหลัก $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^3$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{e}^i &\equiv g^{ij} \bar{e}_j , \quad \bar{e}_i = g_{ij} \bar{e}^j \\ \bar{e}^i \cdot \bar{e}_j &= \bar{e}_k g^{ik} \cdot \bar{e}_j = g^{ik} \bar{e}_k \cdot \bar{e}_j = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i\end{aligned}\quad (9)$$

สังเกตว่า โดยทั่วไปเวกเตอร์ฐานหลักส่วนกลับ $\bar{e}^i$ ตั้งฉากกับ $\bar{e}_j$ เมื่อ $i \neq j$ ทำให้การคำนวณผลคูณจุดของเวกเตอร์ในพิกัดทั่วไปง่ายขึ้นมากถ้าเขียนเวกเตอร์หนึ่งในรูปฐานหลักและอีกเวกเตอร์หนึ่งในรูปฐานหลักส่วนกลับ การมีฐานหลักส่วนกลับ $\{\bar{e}^i\}_{i=1}^3$ ทำให้สามารถเขียนการกระจัดน้อยยิ่งและสมการเมตริกในรูปองค์ประกอบ (Component) ตามพิกัดอีกแบบหนึ่ง $dx_i = \bar{e}_i \cdot d\bar{x}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}d\bar{x} &= \bar{e}_i (\bar{e}^i \cdot d\bar{x}) = \bar{e}_i dx^i \\ &= \bar{e}_j g^{ji} dx_i = \bar{e}^i (\bar{e}_i \cdot d\bar{x}) = \bar{e}^i dx_i \\ ds^2 &= \bar{e}^i \cdot \bar{e}^j dx_i dx_j = g^{ij}(\bar{x}) dx_i dx_j\end{aligned}\quad (10)$$

ยังมีอีกชื่อที่นิยมเรียกฐานหลักทั้งสองชนิดคือ เรียก $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^3$ ว่า ฐานหลักโคแวเรียนต์ (Covariant basis) และเรียก $\{\bar{e}^i\}_{i=1}^3$ ว่า ฐานหลักคอนทราแวเรียนต์ (Contravariant basis)

(ค.2) ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด เป็นธรรมชาติของอวกาศที่ไม่ขึ้นกับพิกัดที่ใช้บรรยาย หรืออีกนัยหนึ่ง ไม่แปรเปลี่ยน (Invariant) ในการแปลงพิกัด เขียนได้เป็น $ds^2 = ds'^2$ เมื่อใช้การแปลงผกผันในสมการ (2) จัดรูปได้ว่า

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{kl} dx^k dx^l \\
 &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} dx^{i'} dx^{j'} \\
 &= \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \bar{e}_k \right) \cdot \left(\bar{e}_l \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \right) dx^{i'} dx^{j'} \\
 &= (\bar{e}_{i'}) \cdot (\bar{e}_{j'}) dx^{i'} dx^{j'} \\
 &= g_{i'j'} dx^{i'} dx^{j'} = ds'^2
 \end{aligned} \tag{11}$$

จากมูลบทข้อ (ค.2) ทำให้เราได้สมบัติการแปลงพิกัดของสนาม g_{ij} ว่า

$$g_{i'j'}(\bar{x}') = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} g_{kl}(\bar{x}(\bar{x}')) \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \tag{12}$$

และสามารถเขียนเมทริกซ์การแปลงพิกัดผกผันในรูปเมทริกซ์การแปลงพิกัดดังนี้

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = g^{ik} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} g_{l'j'} \tag{13}$$

และยังทำให้เราสามารถหาการแปลงพิกัดทั่วไปของ $\bar{e}_i$, $\bar{e}^i$, และ dx_i ได้ สรุปเป็นตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงการแปลงพิกัดทั่วไปขององค์ประกอบคอนทราเวเรียนต์และโคเวเรียนต์

การแปลงขององค์ประกอบคอนทราเวเรียนต์	การแปลงขององค์ประกอบโคเวเรียนต์
$dx^{i'} = dx^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$	$\bar{e}_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \bar{e}_k$
$\bar{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \bar{e}^j$	$dx_{i'} = dx_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$

จากการแปลงในตารางที่ 1 ทำให้เวกเตอร์การกระจัดก็ไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงพิกัดด้วย กล่าวคือ

$$\begin{aligned}
 d\bar{x}' &= \bar{e}_{i'} dx^{i'} = \bar{e}_i dx^i = d\bar{x} \\
 d\bar{x}' &= \bar{e}^{i'} dx_{i'} = \bar{e}^i dx_i = d\bar{x}
 \end{aligned} \tag{14}$$

เมื่อที่จุด $\bar{x}$ ใด ๆ ใน $\mathbf{R}^3$ มีการกระจัด $d\bar{x} = \bar{e}_i dx^i$ เป็นเวกเตอร์ชนิดแรก ดังนั้นที่จุดนี้สามารถมีปริมาณอื่นที่มีสมบัติพิกัดเช่นเดียวกับการกระจัด ได้แก่ การรวมกันเชิงเส้นตามสมการ (5) และผลคูณจุดตามสมการ (6) เพียงแต่ปริมาณดังกล่าวเป็นสนามที่มีค่าและทิศอยู่ที่แต่ละจุด $\bar{x}$ เท่านั้นไม่ได้กินอาณาบริเวณเป็นเส้นในอวกาศ
 อย่างการกระจัด นั่นก็คือ ปริมาณในรูป สนามเวกเตอร์ (Vector field) $\vec{a}(\bar{x}) = \bar{e}_i a^i(\bar{x})$ ที่บรรยายสมบัติของ
 วัตถุฟิสิกส์ที่จุดต่าง ๆ ใน $\mathbf{R}^3$ นั่นเอง

ขึ้นประกอบปริมาตรและผลคูณไขว้

ก่อนที่เราจะนิยามขึ้นประกอบปริมาตรใน $\mathbf{R}^3$ ในรูปพิกัดทั่วไป เราจะพิจารณา 2 ประเด็น กล่าวคือ

1. การแปลงพิกัดทั่วไปของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริก $g \equiv \det \mathbf{g}$ จาก

$$\mathbf{g}' = [g_{i'j'}] = \left[\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \right] = \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T \mathbf{g} \frac{\partial x}{\partial x'} \quad (15)$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} g' &= \det \mathbf{g}' = \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right)^2 \det \mathbf{g} \\ \operatorname{sgn} \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \sqrt{|g'|} &= \sqrt{|g|} \det \frac{\partial x}{\partial x'} \\ g &= \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^2 \det \mathbf{h} = \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^2 \\ \operatorname{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) \sqrt{|g|} &= \sqrt{|h|} \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \end{aligned} \quad (16)$$

ถึงแม้ว่ากาลแบบยูคลิดมี $g > 0$ แต่เราใช้สัญลักษณ์ค่าสัมบูรณ์ $|g| > 0$ เพื่อให้สามารถขยายไปใช้กับอวกาศแบบยูคลิดเทียม (Pseudo-Euclidean) อย่างอวกาศเวลา (Spacetime) 4 มิติ ในทฤษฎีสัมพัทธภาพที่มี $g < 0$ ได้ ส่วนถ้าเริ่มการแปลงจาก เมทริกในพิกัดคาร์ทีเซียน $\bar{x}^i = (x, y, z)$ ซึ่งเขียนเป็น $\mathbf{h} = [h_{ij}] = [\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j] = [\delta_{ij}]$ และ $\det \mathbf{h} = h_{11}h_{22}h_{33} = 1$ ไปสู่ $\det \mathbf{g}$ ในพิกัดใด ๆ ก็จะได้สมการการแปลงชุดหลังของสมการ (16) นั่นเอง โดยที่ได้เขียน $\det X = \operatorname{sgn}(\det X) |\det X|$ และ $\operatorname{sgn}(\det X)$ หมายถึง เครื่องหมายบวก/ลบของค่า $\det X$ เราสามารถแบ่งการแปลงพิกัด 2 ประเภท ได้แก่ การแปลงพิกัดแท้ (Proper coordinate transformation) ที่มี $\det X = |\det X| > 0$ และการแปลงพิกัดไม่แท้ (Improper coordinate transformation) ที่มี $\det X = -|\det X| < 0$

2. ทฤษฎีบทการเปลี่ยนตัวแปร $x' = x'(x^j)$ ในอินทิกรัล มีว่า [6]

$$\int_V dx^1 dx^2 dx^3 f'(\bar{x}') = \int_V dx^1 dx^2 dx^3 \det \frac{\partial x'}{\partial x} f(\bar{x}) \quad (17)$$

ต่อไป เราจะเริ่มแนะนำแนวคิดของขึ้นประกอบปริมาตรในพิกัดทั่วไปโดยเริ่มจากขึ้นประกอบปริมาตรในพิกัดคาร์ทีเซียนที่เราคุ้นเคยกันดี ในพิกัดคาร์ทีเซียนมีสมการเมทริกในรูป

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= (\hat{e}_{i'} d\bar{x}^{i'}) \cdot (\hat{e}_{j'} d\bar{x}^{j'}) = h_{i'j'} d\bar{x}^{i'} d\bar{x}^{j'} \\
 &= \sum_{i'=1'}^3 (\sqrt{h_{i'i'}} d\bar{x}^{i'})^2 \\
 &= (d\bar{x}^{1'})^2 + (d\bar{x}^{2'})^2 + (d\bar{x}^{3'})^2 \\
 &\equiv (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2
 \end{aligned} \tag{18}$$

เนื่องจากระยะห่างระหว่างจุด 2 จุดนั้นนิยามจากสมการเมตริก ดังนั้นแนวคิดของปริมาตรที่ว่า “กว้าง (Width) คูณ ยาว (Length) คูณ สูง (Height)” ในพิกัดคาร์ทีเซียน ก็จะต้องเขียนระยะของเส้น (Edge) ต่าง ๆ ได้แก่ กว้าง (ตามแนวแกน x), ยาว (ตามแนวแกน y), และสูง (ตามแนวแกน z) โดยใช้เมตริกตามสมการ (18) สำหรับแต่ละเส้น ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 d(\text{width}) &= ds^{1'} = \sqrt{|d\bar{s}^{1'} \cdot d\bar{s}^{1'}|} = \sqrt{h_{1'1'}} d\bar{x}^{1'} \\
 d(\text{length}) &= ds^{2'} = \sqrt{|d\bar{s}^{2'} \cdot d\bar{s}^{2'}|} = \sqrt{h_{2'2'}} d\bar{x}^{2'} \\
 d(\text{height}) &= ds^{3'} = \sqrt{|d\bar{s}^{3'} \cdot d\bar{s}^{3'}|} = \sqrt{h_{3'3'}} d\bar{x}^{3'}
 \end{aligned} \tag{19}$$

จากขึ้นประกอบปริมาตรในพิกัดคาร์ทีเซียนทำการแปลงให้เป็น ขึ้นประกอบปริมาตรในพิกัดทั่วไป ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 d^3 \bar{x} &\equiv d(\text{width}) d(\text{length}) d(\text{height}) \\
 &= \sqrt{h_{1'1'}} d\bar{x}^{1'} \sqrt{h_{2'2'}} d\bar{x}^{2'} \sqrt{h_{3'3'}} d\bar{x}^{3'} \\
 &= \sqrt{h_{1'1'} h_{2'2'} h_{3'3'}} d\bar{x}^{1'} d\bar{x}^{2'} d\bar{x}^{3'} \\
 &= \sqrt{|h|} d\bar{x}^{1'} d\bar{x}^{2'} d\bar{x}^{3'} \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sqrt{|h|} \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &\stackrel{(2)}{=} \text{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &\stackrel{(3)}{=} \text{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) d^3 x
 \end{aligned} \tag{20}$$

ขั้นตอน (1) นั้นได้ใช้สมการ (17) และขั้นตอน (2) นั้นได้ใช้สมการ (16) ทำให้เราได้รูปของขึ้นประกอบปริมาตร $d^3 x$ ในรูปพิกัดทั่วไป x^i เนื่องจากเมตริก ds^2 มีสมบัติไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงพิกัด ขึ้นประกอบปริมาตรที่นิยามจากเมตริกก็มีสมบัติไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงพิกัดด้วยเช่นกัน แต่ในการแปลงพิกัดของขึ้นประกอบปริมาตรอาจมีการกลับเครื่องหมาย เช่น $\text{sgn}(\det \partial \bar{x} / \partial x)$ เพราะการแปลงพิกัดนั้นมีทั้งแบบแท้และไม่แท้ โดยอย่างหลังมีการกลับเครื่องหมายของเส้นของขึ้นประกอบปริมาตรได้ (ดูต่อในหัวข้อถัดไป)

ในการเชื่อมโยง ชั้นประกอบปริมาตรตามสมการ (20) กับ ผลคูณไขว้ของเวกเตอร์ พิจารณาการวิเคราะห์ตามขั้นตอนดังนี้

$$\begin{aligned}
 d^3 \bar{x} &= \sqrt{|h|} d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3 \\
 &= \sqrt{|h|} \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &= \sqrt{|h|} [i'j'k'] \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^{j'}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{x}^{k'}}{\partial x^3} dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &= \sum_{i'l'j'k'}^3 \hat{e}_{i'} \cdot \hat{e}^{l'} \sqrt{|h|} [l'j'k'] \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^{j'}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{x}^{k'}}{\partial x^3} dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &= \hat{e}_{i'} \cdot (\hat{e}_{j'} \times \hat{e}_{k'}) \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^{j'}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{x}^{k'}}{\partial x^3} dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &= \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial x^1} \hat{e}_{i'} \cdot \left(\frac{\partial \bar{x}^{j'}}{\partial x^2} \hat{e}_{j'} \times \frac{\partial \bar{x}^{k'}}{\partial x^3} \hat{e}_{k'} \right) dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &= \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &= \bar{e}_1 \cdot \bar{e}^1 \sqrt{|g|} \operatorname{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) [123] dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &= \operatorname{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 dx^3 \\
 &= \operatorname{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) d^3 x = d\bar{x}^1 \cdot (d\bar{x}^2 \times d\bar{x}^3)
 \end{aligned} \tag{21}$$

จากการดำเนินการตามขั้นตอนต่าง ๆ ในสมการ (21) ทำให้เราได้นิยามการดำเนินการระหว่างเวกเตอร์อีกชนิดหนึ่ง นั่นคือ ผลคูณไขว้ นั่นเอง ในขั้นตอน (1) เราเริ่มจาก $d^3 \bar{x}$ ในพิกัดคาร์ทีเซียนหนึ่งเพื่อตั้งมาตรฐานของเครื่องหมายของ $d^3 \bar{x}$ (ดูที่ $\bar{o}=+1$ ในหัวข้อถัดไป) หลังจากนั้นในขั้นตอน (2) จึงแปลงพิกัดเป็นพิกัดทั่วไปโดยใช้สมการ (17) ในขั้นตอน (3)–(4) มีการนิยามผลคูณไขว้ของเวกเตอร์ฐานหลักคาร์ทีเซียนว่า

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_{j'} \times \hat{e}_{k'} &\equiv \bar{o} \hat{e}^{l'} \bar{\varepsilon}_{i'j'k'} \\
 \bar{\varepsilon}_{i'j'k'} &\equiv \sqrt{|h|} [i'j'k'] \\
 \bar{o} &= +1
 \end{aligned} \tag{22}$$

ในขั้นตอน (5)–(6) ทำการแปลง $\hat{e}_{i'}$ ไปเป็นเวกเตอร์ฐานหลักในพิกัดทั่วไป $\bar{e}_i$ โดยใช้สูตร $\bar{e}_i = \hat{e}_{j'} \partial \bar{x}^{j'} / \partial x^i$ ที่อ้างจากตารางที่ 1 ในขั้นตอน (6)–(8) ก็จะได้ว่า

$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_3 \equiv \operatorname{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) \bar{o} \bar{e}^1 \sqrt{|g|} [123]$$

ทำให้สรุปผลคูณไขว้ของเวกเตอร์ฐานหลักในพิกัดทั่วไปได้ว่า

$$\begin{aligned}\bar{e}_j \times \bar{e}_k &\equiv o \bar{e}^i \varepsilon_{ijk} \\ \varepsilon_{ijk}(\bar{x}) &\equiv \sqrt{|g|} [ijk] \\ o &= \text{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) \bar{o}\end{aligned}\quad (23)$$

สังเกตว่ามีเครื่องหมาย o ที่สัมพันธ์กับการแปลงพิกัดว่าเป็นแบบแท้หรือไม่แท้จากพิคตคาร์ที่เขียนเริ่มต้นที่ตั้งเป็นมาตรฐาน

สรุปทั่วไปได้ว่า เมื่อให้ $\bar{a}(\bar{x}) = \bar{e}_i a^i(\bar{x})$ และ $\bar{b}(\bar{x}) = \bar{e}_i b^i(\bar{x})$ เป็นสนามเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbf{R}^3$ นิยามผลคูณไขว้ในพิกัดทั่วไป ว่า

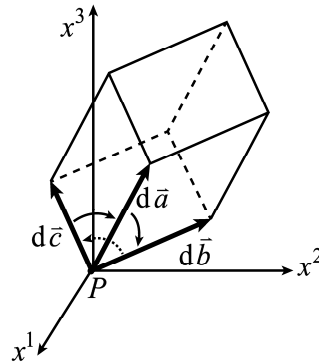
$$\begin{aligned}\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} &= \bar{e}_j \times \bar{e}_k a^j b^k \\ &\equiv o \bar{e}^i \varepsilon_{ijk} a^j b^k = o \bar{e}^i c_i\end{aligned}\quad (24)$$

น่าจะเป็นแบบพิกัดที่ดีสำหรับผู้อ่านให้ลองแสดงหรืออ้างเหตุผลให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ijk} &\equiv g^{il} g^{jm} g^{kn} \varepsilon_{lmn} \\ &= \text{sgn}(g) \frac{[ijk]}{\sqrt{|g|}} \\ \bar{e}^j \times \bar{e}^k &= o \bar{e}_i \varepsilon^{ijk}\end{aligned}\quad (25)$$

ในสมการ (21) ขั้นตอนที่ (6) และ (10) ทำให้เราสามารถเขียนขึ้นประกอบปริมาตรทั่วไปในรูปผลคูณสามเวกเตอร์แบบสเกลาร์ (Scalar triple product) ได้ กล่าวคือ สำหรับการกระจัดน้อยยิ่งใด ๆ ที่เขียนในรูปพิกัดทั่วไป ได้แก่ $d\bar{a} = \bar{e}_i da^i$, $d\bar{b} = \bar{e}_i db^i$ และ $d\bar{c} = \bar{e}_i dc^i$ ที่ออกจากจุด P เดียวกันโดยไม่ขนานกันและไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกัน ขึ้นประกอบปริมาตรรูปกล่องด้านขนาน (Parallelepiped) ที่จุด P ที่มีเส้นที่ประกอบด้วยการกระจัดทั้งสามและเส้นที่ขนานกัน (ดังรูปที่ 3) อยู่ในรูปผลคูณสามเวกเตอร์แบบสเกลาร์ว่า

$$\begin{aligned}o d^3 V &\equiv d\bar{a} \cdot (d\bar{b} \times d\bar{c}) \\ &= da^i db^j dc^k \varepsilon_{ijk} o \\ \bar{e}_i \cdot (\bar{e}_j \times \bar{e}_k) &= o \varepsilon_{ijk}\end{aligned}\quad (26)$$



รูปที่ 3 ชิ้นประกอบปริมาตรรูปกล่องด้านขนานที่จุด P ที่มีเส้นที่ประกอบขึ้นจากการกระจัดทั้งสามและเส้นที่ขนานกัน

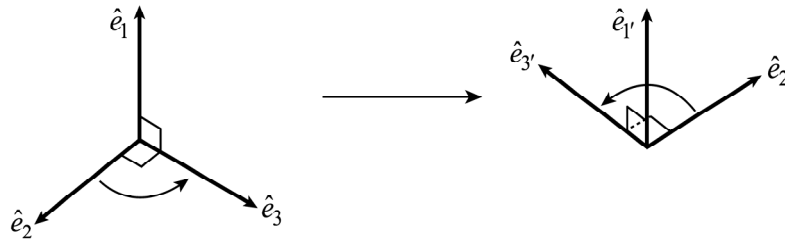
การหันทิศของเวกเตอร์ฐานหลัก

สังเกตจากสมการ (21), (23) และ (26) ว่ามีปริมาณ $\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = o \varepsilon_{ijk}$ ที่เครื่องหมาย $o = \bar{o} \text{sgn}(\det \partial \vec{x} / \partial \vec{x}')$ ของปริมาณนี้แสดงการหันทิศที่เรียกว่า โอเรียนเทชัน (Orientation) ของเวกเตอร์ฐานหลักทั้งสามที่จุด $\vec{x}$ เทียบกับการหันทิศของเวกเตอร์ฐานหลักคาร์ทีเซียนตั้งต้นชุดหนึ่ง $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ เพื่อให้เห็นภาพพิจารณาการแปลงระหว่างพิกัดคาร์ทีเซียนด้วยกัน กล่าวคือ ถ้าเราเริ่มต้นจากพิกัดคาร์ทีเซียน $\vec{x}^i$ ที่กำหนดเครื่องหมาย $\bar{o} = +1$ ให้มีว่า $\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = \bar{o} \varepsilon_{123} = +1$ โดยสอดคล้องกับการกำหนดการหันทิศของเวกเตอร์ฐานหลัก $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ ตาม กฎมือขวา (Right-hand rule) ดังรูปที่ 4 จากสมการ (23) และ (26) เมื่อ $h=1=h'$ ได้ผลการแปลงว่า

$$\begin{aligned} \hat{e}_{1'} \cdot (\hat{e}_{2'} \times \hat{e}_{3'}) &= \bar{o}' [1'2'3'] \\ \bar{o}' &= \text{sgn} \left(\det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}'} \right) \bar{o} \end{aligned} \quad (27)$$

สังเกตว่า $\bar{o}'$ จะมีค่าเท่ากับ $+1$ หรือ -1 ขึ้นกับการแปลงพิกัด $\hat{e}_{1'} = \frac{\partial \vec{x}^k}{\partial \vec{x}^{1'}} \hat{e}_k$ (ดูตารางที่ 1) ว่าจะยังคงรักษาการหันทิศของเวกเตอร์ฐานหลักตามกฎมือขวาหรือไม่ ตัวอย่างเช่น การแปลงจาก $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ไปยัง $(\hat{e}_{1'}, \hat{e}_{2'}, \hat{e}_{3'})$ ที่ยังคงรักษาการหันทิศตามกฎมือขวาดังรูปที่ 4 ที่เขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) &\rightarrow (\hat{e}_{1'}, \hat{e}_{2'}, \hat{e}_{3'}) = (\hat{e}_1, -\hat{e}_2, -\hat{e}_3) \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}'} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}'} = +1 \\ \hat{e}_{1'} \cdot (\hat{e}_{2'} \times \hat{e}_{3'}) &= +1 \end{aligned} \quad (28)$$



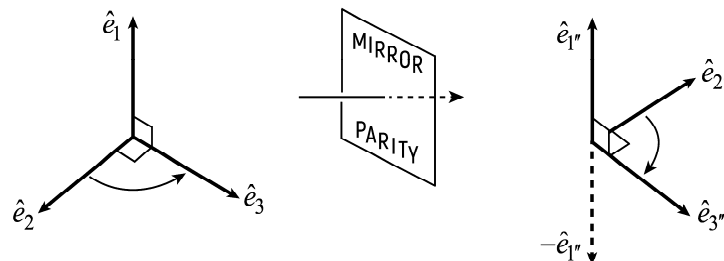
รูปที่ 4 การแปลงพิกัดแบบ $\det \partial \bar{x} / \partial x' = +1$ ของเวกเตอร์ฐานหลักคาร์ทีเซียนจาก $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ที่หันทิศตามกฎมือขวา โดยมี $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$ ไปยัง $(\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3')$ ที่หันทิศตามกฎมือขวาเช่นกัน โดยมี $\hat{e}_2' \times \hat{e}_3' = \hat{e}_1'$

และ การแปลงจาก $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ไปยัง $(\hat{e}_1'', \hat{e}_2'', \hat{e}_3'')$ ที่เป็นเสมือนภาพสะท้อนในกระจก (Parity) ของ $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ดังรูปที่ 5 ก็จะได้การหันทิศของ $(\hat{e}_1'', \hat{e}_2'', \hat{e}_3'')$ ตามกฎมือซ้าย (Left-hand rule) ซึ่งเป็นตัวอย่างของการแปลงพิกัดแบบไม่แท้

$$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \rightarrow (\hat{e}_1'', \hat{e}_2'', \hat{e}_3'') = (\hat{e}_1, -\hat{e}_2, \hat{e}_3)$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x''} = -1 \quad (29)$$

$$\hat{e}_1' \cdot (\hat{e}_2' \times \hat{e}_3') = -1$$



รูปที่ 5 การแปลงพิกัดแบบ $\det \partial \bar{x} / \partial x'' = -1$ ของเวกเตอร์ฐานหลักคาร์ทีเซียนจาก $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ที่หันทิศตามกฎมือขวา โดยมี $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$ ไปยัง $(\hat{e}_1'', \hat{e}_2'', \hat{e}_3'')$ ที่หันทิศตามกฎมือซ้าย โดยมี $\hat{e}_2'' \times \hat{e}_3'' = -\hat{e}_1''$

การกำหนดฐานหลักคาร์ทีเซียนเริ่มต้นว่าให้ $\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)$ มีเครื่องหมายเป็น $+1$ หรือ -1 ถือเป็นการกำหนดสมบัติชนิดหนึ่งให้กับ $\mathbf{R}^3$ และถือเป็นมูลบทอีกข้อหนึ่งของอวกาศ $\mathbf{R}^3$ กล่าวคือ

(ง) สมบัติโอเรียนเทชัน (Orientation) คือ การกำหนดค่าเครื่องหมาย $\bar{o}$ ให้กับปริมาณ $\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)$ สำหรับฐานหลักคาร์ทีเซียนหนึ่ง $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ของอวกาศ 3 มิติ ซึ่งสามารถกำหนดค่าได้ 2 แบบ $+1$ หรือ -1 กล่าวคือ

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = \bar{o} \bar{\epsilon}_{123} = \pm \sqrt{|h|} [123] = \pm 1 \quad (30)$$

ค่าเครื่องหมายของ $\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)$ เมื่อกำหนดแล้วจะไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงพิกัดแท้ซึ่งเป็นการแปลงพิกัดที่เกิดขึ้นในโลกจริง

จากสมการ (23), (24), และ (26) ในอวกาศ $\mathbf{R}^3$ ในพิกัดใด ๆ เรามีปริมาณสนามที่มี 3 ดัชนีที่เรียกว่า เทนเซอร์เลวี-ซีวิตา (Levi-Civita tensor) ที่มีนิยามและการแปลงพิกัดทั่วไปว่า

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_{ijk}(\bar{x}) &\equiv \sqrt{|g(\bar{x})|} [ijk] \\ o' \epsilon_{i'j'k'}(\bar{x}') &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} o \epsilon_{ijk}(\bar{x}(\bar{x}')) \end{aligned}} \quad (31)$$

เราอาจเขียนสมการการแปลง (31) ได้อีกแบบ โดยใช้

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x'} &= \det \frac{\partial x}{\partial x'} \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \Rightarrow \\ \text{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x'} \right) \bar{o} &= o' = \text{sgn} \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) o \\ &= \text{sgn} \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \text{sgn} \left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) \bar{o} \end{aligned}$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} &\text{sgn} \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \epsilon_{i'j'k'}(\bar{x}') \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \epsilon_{ijk}(\bar{x}(\bar{x}')) \end{aligned} \quad (32)$$

ทำให้ได้การแปลงพิกัดขององค์ประกอบ c_i ของผลคูณไขว้ (24) อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} o' c_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} o c_j \\ \Rightarrow \text{sgn} \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right) c_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} c_j \end{aligned}$$

ซึ่งต่างจากการแปลงพิกัดทั่วไปขององค์ประกอบโคเวเรียนต์ของเวกเตอร์ $a_{i'} = \partial x^j / \partial x^{i'} a_j$ (ดูตารางที่ 1) ตรงที่มีเครื่องหมาย $\text{sgn}(\det \partial x / \partial x')$ ที่แสดงการเปลี่ยนโอเรียนเทชันเนื่องจากการแปลงพิกัด ดังนั้นผลคูณไขว้ระหว่างเวกเตอร์ได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณที่คล้ายเวกเตอร์ที่เรียกว่า **เวกเตอร์เทียม (Pseudovector)**

น่าสังเกตว่า ผลคูณไขว้ของ 2 เวกเตอร์ นิยามได้ในอวกาศ 3 มิติเท่านั้น เพราะผลคูณไขว้ระหว่าง 2 เวกเตอร์ที่ไม่ขนานกันได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์อีกตัวหนึ่งที่ตั้งฉากกับ 2 เวกเตอร์ตั้งต้น ผลลัพธ์จะเป็นได้อย่างเดียว (Unique) เมื่ออยู่ในอวกาศ 3 มิติเท่านั้น อย่างไรก็ตาม ในอวกาศหลายมิติ สามารถนิยามขึ้นประกอบปริมาตรได้ โดยการขยายนิยามของเทนเซอร์เลวี-ชีวิตาในสมการ (26), (31), และ (32) ไปหลายมิติได้ เช่น ขึ้นประกอบปริมาตรของอวกาศเวลา 4 มิติ อยู่ในรูป [7]

$$\begin{aligned}od^4V &\equiv da^\alpha db^\beta dc^\gamma dc^\delta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} o \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \sqrt{|g|} [\alpha\beta\gamma\delta] \\ o &= \text{sgn}\left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right) \bar{o}\end{aligned}\quad (33)$$

โดยที่ดัชนีอักษรกรีกหมายถึงตัวเลข 0, 1, 2, 3 และ $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ เป็นองค์ประกอบของเทนเซอร์เลวี-ชีวิตา ในอวกาศเวลา 4 มิติ นอกจากนี้ ในวิชาเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์มีแนวทางการศึกษา (Approach) ที่เป็นนามธรรมและทั่วไปกว่า โดยการสร้างปริมาณชนิดใหม่ที่เรียกว่า **ดิฟเฟอเรนเชียลฟอร์ม (Differential form)** [7] ซึ่งใช้ได้ ในอวกาศโค้งหลายมิติ มาใช้แทนผลคูณไขว้ที่ใช้ได้เฉพาะในอวกาศแบบยูคลิด 3 มิติ หัวข้อนี้อยู่เหนือขอบเขตของบทความนี้

ตัวอย่าง

ในที่นี้ขอยกตัวอย่างผลคูณไขว้ในพิกัดทรงกลม (Spherical coordinates) ซึ่งเป็นพิกัดโค้งเชิงเส้น (Curvilinear coordinates) ที่มีเวกเตอร์ฐานหลักตั้งฉากกัน ที่ใช้พิกัดนี้เพราะเป็นพิกัดหนึ่งที่นักฟิสิกส์คุ้นเคยมากที่สุด ถึงแม้ไม่ใช่พิกัดที่ฐานหลักไม่ตั้งฉากกันดังที่บทความนี้กล่าวถึงโดยทั่วไปก็ตาม ฟังก์ชันการแปลงระหว่างพิกัดคาร์ทีเซียน $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = (x, y, z)$ กับพิกัดทรงกลม $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$ มีว่า

$$\begin{aligned}x(r, \theta, \phi) &= r \sin \theta \cos \phi \\ y(r, \theta, \phi) &= r \sin \theta \sin \phi \\ z(r, \theta, \phi) &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (34)$$

และได้เมทริกซ์การแปลงว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta & \partial x / \partial \phi \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta & \partial y / \partial \phi \\ \partial z / \partial r & \partial z / \partial \theta & \partial z / \partial \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \\ \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} &= r^2 \sin \theta > 0 \\ o &= \text{sgn}\left(\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right) \bar{o} = +1\end{aligned}$$

จากตารางที่ 1 แทนค่าได้ว่า

$$\begin{aligned}\bar{e}_r &= \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial r} \hat{e}_{i'} \\ &= \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \\ \bar{e}_\theta &= \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial \theta} \hat{e}_{i'} \\ &= r (\cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z) \\ \bar{e}_\phi &= \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial \phi} \hat{e}_{i'} \\ &= r \sin \theta (-\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y)\end{aligned}$$

หมายเหตุว่าในตำราฟิสิกส์นิยมใช้ฐานหลักตั้งฉากหนึ่งหน่วย (Orthonormal basis) กล่าวคือ ใช้ $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$ มากกว่า $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi)$ ซึ่งทั้งสองสัมพันธ์กันด้วย $\hat{e}_i \equiv \bar{e}_i / \sqrt{|\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i|} = \bar{e}_i / \sqrt{|g_{ii}|}$ และได้เทนเซอร์เมตริกในรูปพิกัดทรงกลมว่า

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}^{-1} &= [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ g &= \det \mathbf{g} = (r^2 \sin \theta)^2\end{aligned}$$

จากสมการ (9) แทนค่าได้ว่า

$$\begin{aligned}\bar{e}^r &= g^{rr} \bar{e}_r = \bar{e}_r \\ \bar{e}^\theta &= g^{\theta\theta} \bar{e}_\theta = \bar{e}_\theta / r^2 \\ \bar{e}^\phi &= g^{\phi\phi} \bar{e}_\phi = \bar{e}_\phi / (r \sin \theta)^2\end{aligned}$$

สำหรับเวกเตอร์ใด ๆ ในพิกัดทรงกลมเขียนได้เป็น $\bar{a} = \bar{e}_r a^r + \bar{e}_\theta a^\theta + \bar{e}_\phi a^\phi$ แทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (23) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{r\theta\phi} &= \sqrt{|g|} [r\theta\phi] = r^2 \sin \theta \\
 \bar{e}_r \times \bar{e}_\theta &= o \bar{e}^\phi \varepsilon_{\phi r\theta} = \bar{e}^\phi r^2 \sin \theta \\
 \bar{e}_\theta \times \bar{e}_\phi &= o \bar{e}^r \varepsilon_{r\theta\phi} = \bar{e}^r r^2 \sin \theta \\
 \bar{e}_\phi \times \bar{e}_r &= o \bar{e}^\theta \varepsilon_{\theta\phi r} = \bar{e}^\theta r^2 \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

และจากสมการ (24) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \bar{c} &= \bar{a} \times \bar{b} = o \bar{e}^i \varepsilon_{ijk} a^j b^k \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{e}^r (a^\theta b^\phi - a^\phi b^\theta) \\ + \bar{e}^\theta (a^\phi b^r - a^r b^\phi) \\ + \bar{e}^\phi (a^r b^\theta - a^\theta b^r) \end{bmatrix} r^2 \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

จากสมการ (26) ได้ขึ้นประกอบปริมาตรที่มีเส้นตามเวกเตอร์ฐานหลักในพิกัดทรงกลมที่เราคุ้นเคยกันดีว่า

$$\begin{aligned}
 o d^3 x &= d\bar{r} \cdot (d\bar{\theta} \times d\bar{\phi}) \\
 &= dr d\theta d\phi \bar{e}_r \cdot (\bar{e}_\theta \times \bar{e}_\phi) \\
 &= dr d\theta d\phi \sqrt{|g|} o \\
 &= dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta > 0
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

สรุป

เราได้อธิบายแนวคิดของผลคูณไขว้ของเวกเตอร์ในอวกาศ 3 มิติแบบยูคลิดในเชิงเรขาคณิต โดยการเชื่อมโยงกับขึ้นประกอบปริมาตรในพิกัดทั่วไป และได้สูตรการคำนวณผลคูณไขว้ในพิกัดทั่วไป แล้วอธิบายแนวคิดของโอเรียนเทชันของอวกาศ นอกจากนี้ได้กล่าวแนะนำวิธีขยายแนวคิดของผลคูณไขว้ของเวกเตอร์ในอวกาศ 3 มิติ ไปสู่อวกาศเวลา 4 มิติ โดยใช้เทนเซอร์เทนเซอร์เลวี-ซีวิตา สุดท้ายได้ยกตัวอย่างการหาผลคูณไขว้และขึ้นประกอบปริมาตรในพิกัดทรงกลม ซึ่งเป็นพิกัดหนึ่งที่นักฟิสิกส์คุ้นเคยกันดี

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ ปวีร์ปกรศ์ เนตรดวง ซึ่งเป็นนักศึกษาปริญญาตรี ภาควิชาฟิสิกส์และวัสดุศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ สำหรับการอภิปรายและถกเถียงเกี่ยวกับหัวข้อนี้และหัวข้อที่ใกล้เคียงกันในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมา

เอกสารอ้างอิง

- [1] ชาญกิจ คั่นฉ่อง, “เวกเตอร์ I: หน้าตาพื้นฐานของสิ่งในเอกภพ”, วารสารฟิสิกส์ไทย, 23(1), 17-18 (2549).
- [2] ชาญกิจ คั่นฉ่อง, “เวกเตอร์ II: การบวกเวกเตอร์ และการประดับประดาอวกาศ”, วารสารฟิสิกส์ไทย, 23(2), 20-22 (2549).
- [3] ชาญกิจ คั่นฉ่อง, “เวกเตอร์ III: เรขาคณิต ผลคูณภายใน และเวกเตอร์ทั่วไป”, วารสารฟิสิกส์ไทย, 23(3), 21-23 (2549).
- [4] K. F. Riley, M. P. Hobson and S. J. Bence, “Mathematical methods for physics and engineering: A comprehensive guide”, 3rd edition, Cambridge University (2006).
- [5] A. I. Borisenko, I. E. Tarapov and R. A. Silverman, “Vector and tensor analysis with applications”, Dover (1968).
- [6] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby, “General relativity: An introduction for physicists”, Cambridge University (2006).
- [7] E.ourgoulhon, “Special relativity in general frames: From particles to astrophysics”, Springer (2013).