

Original Research Article

ค่าคงที่จักรวาลที่เป็นฟังก์ชันกกำลังของตัวประกอบมาตราส่วน The Cosmological Constant as A Power-law Function of A Scale Factor

อินทิรา จะมะลี, ปัญญาพร แสงทอง และ ไตรทศ งามปิณฑิพันธ์*

Inthira Chamalee, Panyaporn Saengthong and Tritos Ngampitipan*

สาขาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร 10900

Physics Program, Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Chatuchak,

Bangkok 10900, Thailand

*Corresponding author E-mail: tritos.ngampitipan@gmail.com

วันที่รับบทความ: 1 กรกฎาคม 2565, วันที่แก้ไขบทความ: 3 ธันวาคม 2565, วันที่ตอบรับบทความ: 15 ธันวาคม 2565

Received: 1st July 2022, Revised: 3rd December 2022, Accepted: 15th December 2022

บทคัดย่อ

ปัญหาค่าคงที่จักรวาลเป็นปัญหาหนึ่งในจักรวาลวิทยาที่ยังไม่สามารถแก้ไขได้ เพื่ออธิบายปัญหานี้ได้มีการตั้งสมมติฐานว่า ค่าคงที่จักรวาลสามารถเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้ ในบทความวิจัยนี้ เรานำเสนอแบบจำลองที่ค่าคงที่จักรวาลเป็นฟังก์ชันกกำลังของตัวประกอบมาตราส่วน $\Lambda = \alpha/a^m$ เราพบว่าเงื่อนไขที่จักรวาลขยายตัวด้วยความเร่งคือ $m < 2/3$ เราพิจารณา $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 ผลการวิจัยพบว่า แบบจำลองสามารถให้จักรวาลที่ขยายตัวด้วยความเร่งได้ โดยการเปลี่ยนผ่านจากการขยายตัวด้วยความหน่วงมาเป็นการขยายตัวด้วยความเร่งเกิดขึ้นที่ $a = 0.64, 0.70$ และ 0.77 สำหรับ $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 ตามลำดับ นอกจากนี้ สำหรับ $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 ค่าคงที่จักรวาลในปัจจุบันจะมีค่าน้อยกว่าค่าคงที่จักรวาลในอดีต $10^{3.1}, 10^{6.2}$ และ $10^{9.3}$ เท่า ตามลำดับ ซึ่งช่วยบรรเทาปัญหาค่าคงที่จักรวาลลงได้เล็กน้อย ซึ่งดีกว่า $m = 0$ ที่ไม่ได้ช่วยบรรเทาปัญหาค่าคงที่จักรวาล

คำสำคัญ: ปัญหาค่าคงที่จักรวาล, จักรวาลวิทยา, ฟังก์ชันกกำลัง, ตัวประกอบมาตราส่วน, การขยายตัวของจักรวาล

Abstract

The cosmological constant problem is one of the unsolved problems in cosmology. To explain this problem, the assumption that the cosmological constant can vary with time has been made. In this paper, we present the model in which the cosmological constant is the power-law function of a scale factor $\Lambda = \alpha/a^m$. We found that the condition for which the universe has the accelerated expansion is $m < 2/3$. We consider $m = 0.1, 0.2$ and 0.3 . The results show that the model can give the accelerated expansion of the universe. The transition from the decelerated expansion to the accelerated one occurs at $a = 0.64, 0.70$ and 0.77 for $m = 0.1, 0.2$ and 0.3 , respectively. Moreover, the cosmological constant nowadays is $10^{3.1}, 10^{6.2}$, and $10^{9.3}$ times less in the value than one in the past for $m =$

0.1, 0.2, and 0.3, respectively. Therefore, this model can slightly relieve the cosmological constant problem, compared to $m = 0$ which does not alleviate that problem.

Keywords: Cosmological constant problem, Cosmology, Power-law function, Scale factor, Universe expansion

บทนำ

ในจักรวาลวิทยา หนึ่งในปัญหาที่ยังไม่สามารถแก้ได้คือ ปัญหาค่าคงที่จักรวาล ซึ่งเป็นความแตกต่างระหว่างค่าที่ได้มาจากการทำนายของทฤษฎีและค่าที่ได้มาจากการสังเกตการณ์ ความแตกต่างดังกล่าวมีค่าประมาณ 10^{120} เท่า [1] นักฟิสิกส์ได้มีการนำเสนอแบบจำลองต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหาค่าคงที่จักรวาล เช่น ความโน้มถ่วงที่ถูกดัดแปลง [2] ความโน้มถ่วงแบบยูนิโมดูลาร์ [3,4] สนามควอนตัมที่กระเพื่อม [5] การหักล้างค่าคงที่จักรวาลโดยการทำลายสมมาตร [6] ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานต่ำสุดและพลังงานสูงสุดในทฤษฎีสตริงยังผล [7]

แบบจำลองค่าคงที่จักรวาลที่ขึ้นกับเวลาเป็นอีกแบบจำลองหนึ่งที่ถูกนำเสนอ [8] คำถามที่สำคัญของไวน์เบิร์กคือ “ทำไมค่าคงที่จักรวาลจึงมีค่าน้อยมากในปัจจุบันนี้” ไม่ใช่คำถามที่ว่า “ทำไมค่าคงที่จักรวาลมีค่าน้อยเสมอ” [9] คำถามนี้นำมาสู่สมมติฐานว่า ค่าคงที่จักรวาลสามารถเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้ ออซทิส ดิล และสมิธ [10] ได้นำเสนอแบบจำลองของค่าคงที่จักรวาลที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาสามแบบ ได้แก่ ค่าคงที่จักรวาลที่แปรผันตรงกับค่าคงที่ฮับเบิลยกกำลังสอง ค่าคงที่จักรวาลที่แปรผันตรงกับความหนาแน่นของสสาร และค่าคงที่จักรวาลที่แปรผกผันกับปริมาตร พวกเขาได้หาความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ความหนาแน่นของสสารและรังสีกับตัวประกอบมาตราส่วนในแบบจำลองทั้งสามแบบ

ในงานวิจัยนี้ เราศึกษาแบบจำลองของค่าคงที่จักรวาลที่แปรผกผันกับการยกกำลังของตัวประกอบมาตราส่วน ในแบบจำลองนี้ เราหาความสัมพันธ์ของความหนาแน่นกับตัวประกอบมาตราส่วน วิเคราะห์ความเร่งของการขยายตัวของจักรวาล และหาความสัมพันธ์ของตัวประกอบมาตราส่วนกับเวลา

สมการฟรีดมันน์และสมการความเร่งที่ถูกดัดแปลง

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป สมการที่อธิบายการขยายตัวของจักรวาลที่เป็นไปตามหลักการทางจักรวาลวิทยา คือสมการฟรีดมันน์และสมการความเร่ง

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2)$$

โดยที่ a คือตัวประกอบมาตราส่วน เครื่องหมายดอทบนตัวแปรคืออนุพันธ์ของตัวแปรตัวนั้นเทียบกับเวลา G คือค่าคงที่ความโน้มถ่วงของนิวตัน ρ คือความหนาแน่นของสสารหรืออนุภาคในจักรวาล p คือความดันของสสารหรืออนุภาคในจักรวาล k คือค่าคงที่ความโค้ง c คืออัตราเร็วแสงในสุญญากาศ และ Λ คือค่าคงที่จักรวาล

ในงานวิจัยนี้ เรามีสมมติฐานว่าค่าคงที่จักรวาลไม่ใช่ค่าคงที่ แต่สามารถเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้ ดังนั้นสมการฟรีดมันน์และสมการความเร่งจะเปลี่ยนไปดังนี้ [10]

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{2}{3}\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{00}} \quad (3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{1}{3}\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{00}} - c^2 \frac{1-kr^2}{a^2} \frac{\partial\Lambda}{\partial g^{11}} \quad (4)$$

นอกจากนี้ เราสนใจค่าคงที่จักรวาลที่แปรผกผันกับการยกกำลังของตัวประกอบมาตราส่วน

$$\Lambda = \frac{\alpha}{a^m} \quad (5)$$

โดยที่ α คือค่าคงที่ และ m คือจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ ถ้า $m = 0$ เราจะได้แบบจำลองดั้งเดิมที่ค่าคงที่จักรวาลเป็นค่าคงที่ อนุพันธ์ของ Λ มีดังนี้

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{00}} = \frac{\partial\Lambda}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial g^{00}} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{11}} = \frac{\partial\Lambda}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial g^{11}} = \frac{m}{2} \frac{a^2}{1-kr^2} \Lambda \quad (7)$$

ดังนั้น สมการ (3) และ (4) จะกลายเป็น

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \left(\frac{2}{3} - m\right)\frac{\Lambda c^2}{2} \quad (9)$$

สมการสถานะซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความหนาแน่นมีรูปแบบดังนี้

$$p = \omega \rho c^2 \quad (10)$$

โดยที่ ω เป็นค่าคงที่ เมื่อแทนค่า Λ สมการ (8) และ (9) กลายเป็น

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\alpha c^2}{3} \frac{1}{a^m} \quad (11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1+3\omega) + \left(\frac{2}{3} - m\right)\frac{\alpha c^2}{2} \frac{1}{a^m} \quad (12)$$

การเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นกับตัวประกอบมาตราส่วน

ในหัวข้อนี้ เราจะหาสมการอนุรักษ์พลังงานและแกลสมการดังกล่าว เพื่อหาความหนาแน่นที่เป็นฟังก์ชันของตัวประกอบมาตราส่วน เราเริ่มต้นโดยคูณสมการ (11) ด้วย a^2 และหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \dot{\rho} \frac{a}{\dot{a}} + \frac{8\pi G}{3} \rho + (2-m) \frac{\alpha c^2}{6} \frac{1}{a^m} \quad (13)$$

แทนค่า $\ddot{a}/a$ จากสมการ (12) ลงในสมการ (13) เราจะได้สมการอนุรักษ์พลังงาน

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \rho (1 + \omega) - \frac{m}{4\pi G} \frac{\dot{a}}{a} \frac{\alpha c^2}{a^m} \quad (14)$$

คำตอบทั่วไปของสมการ (14) ในกรณีที่ $m \neq 3(1 + \omega)$ คือ

$$\rho = -\frac{1}{4\pi G} \frac{m}{3-m+3\omega} \frac{\alpha c^2}{a^m} + \frac{c_1}{a^{3(1+\omega)}} \quad (15)$$

เมื่อ c_1 คือค่าคงที่ของการอินทิเกรต สำหรับกรณีที่ $m = 3(1 + \omega)$ คำตอบทั่วไปของสมการ (14) จะเป็น

$$\rho = -\frac{1}{4\pi G} m \alpha c^2 \frac{\ln a}{a^{3(1+\omega)}} + \frac{c_2}{a^{3(1+\omega)}} \quad (16)$$

เมื่อ c_2 คือค่าคงที่ของการอินทิเกรต โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $a(t_0) = 1$ และ $\rho(t_0) = \rho_0$ เมื่อ t_0 คือเวลาปัจจุบัน และ ρ_0 คือความหนาแน่นของสสารหรือรังสีในปัจจุบัน เราสามารถหา c_1 และ c_2 ได้ดังนี้

$$c_1 = \rho_0 + \frac{1}{4\pi G} \frac{m}{3-m+3\omega} \alpha c^2 \quad \text{และ} \quad c_2 = \rho_0 \quad (17)$$

ในกรณีที่ $m \neq 3(1 + \omega)$ เมื่อแทน c_1 ลงในสมการ (15) เราจะได้

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+\omega)}} + \frac{1}{4\pi G} \frac{m}{3-m+3\omega} \alpha c^2 \left[\frac{1}{a^{3(1+\omega)}} - \frac{1}{a^m} \right] \quad (18)$$

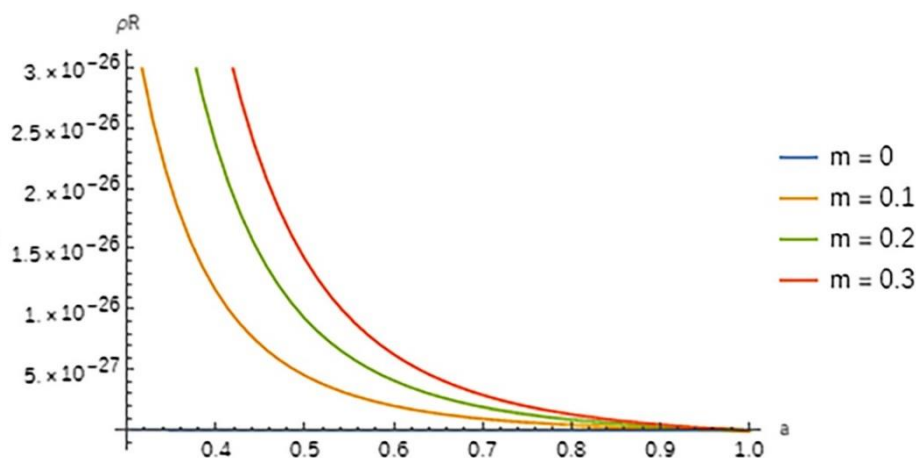
ในกรณีที่ $m = 3(1 + \omega)$ เมื่อแทน c_2 ลงในสมการ (16) เราจะได้

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+\omega)}} - \frac{1}{4\pi G} m \alpha c^2 \frac{\ln a}{a^{3(1+\omega)}} \quad (19)$$

สำหรับยุครังสี ($\omega = 1/3$) เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของรังสี ρ_R และตัวประกอบมาตราส่วน สำหรับ $m \neq 4$ ดังนี้

$$\rho_R = \frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{1}{4\pi G} \frac{m}{4-m} \alpha_c^2 \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^m} \right) \quad (20)$$

โดยที่ ρ_{R0} คือความหนาแน่นของรังสีในยุคปัจจุบัน เราสามารถเขียนกราฟสำหรับ $m = 0, 0.1, 0.2$ และ 0.3 ได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของรังสีกับตัวประกอบมาตราส่วน สำหรับ $m = 0, 0.1, 0.2$ และ 0.3 เมื่อ $\rho_{R0} = 4.64 \times 10^{-31} \text{ kg/m}^3$ และ $\alpha = 1.1 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$

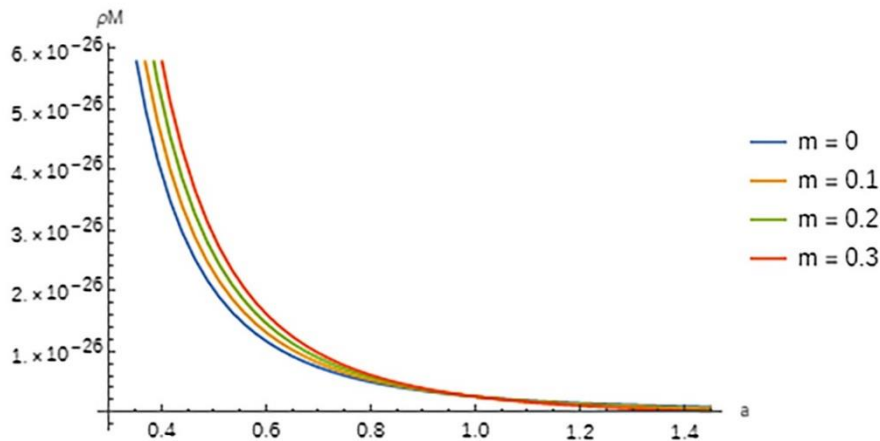
สำหรับยุคสสาร ($\omega = 0$) เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของสสาร ρ_M และตัวประกอบมาตราส่วน สำหรับ $m \neq 3$ ดังนี้

$$\rho_M = \frac{\rho_{M0}}{a^3} + \frac{1}{4\pi G} \frac{m}{3-m} \alpha_c^2 \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^m} \right) \quad (21)$$

โดยที่ ρ_{M0} คือความหนาแน่นของสสารในยุคปัจจุบัน สำหรับ $m = 3$ เราจะได้

$$\rho_M = \frac{\rho_{M0}}{a^3} - \frac{3}{4\pi G} \alpha_c^2 \frac{\ln a}{a^3} \quad (22)$$

กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของสสารและตัวประกอบมาตราส่วนสำหรับ $m = 0, 0.1, 0.2$ และ 0.3 แสดงได้ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของสสารกับตัวประกอบมาตราส่วน สำหรับ $m = 0, 0.1, 0.2$ และ 0.3 เมื่อ $\rho_{M0} = 2.52 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ และ $\alpha = 1.1 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$

สังเกตว่า ρ_M ในสมการ (21) ติดลบได้ เมื่อ a มีค่าเพิ่มขึ้นถึงค่าหนึ่ง เราจะเรียกค่า a ที่ทำให้ $\rho_M = 0$ ว่า a_c ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\frac{m}{3-m} \left(a_c^{3-m} - 1 \right) = \frac{4\pi G \rho_{M0}}{\alpha c^2} \quad (23)$$

แบบจำลองจะใช้งานได้ ก็ต่อเมื่อ ρ_M ไม่ติดลบ ซึ่งสอดคล้องกับ $a \leq a_c$

$$\text{เมื่อ } m = 0.1 \text{ จะได้ } a_c = 1.97 \quad (24)$$

$$\text{เมื่อ } m = 0.2 \text{ จะได้ } a_c = 1.64 \quad (25)$$

$$\text{เมื่อ } m = 0.3 \text{ จะได้ } a_c = 1.49 \quad (26)$$

ความเร่งของการขยายตัวของจักรวาล

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาว่า ค่าคงที่จักรวาลที่มีรูปแบบตามสมการ (5) จะทำให้จักรวาลขยายตัวด้วยความเร่งได้หรือไม่ เมื่อ m มีค่าต่าง ๆ สำหรับยุคสสาร ($\omega = 0$) สมการความเร่งจะกลายเป็น

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_M + \left(\frac{2}{3} - m \right) \frac{\alpha c^2}{2} \frac{1}{a^m} \quad (27)$$

เราเห็นว่า เงื่อนไขที่ทำให้จักรวาลขยายตัวด้วยความเร่งคือ $m < 2/3$ เมื่อแทนค่า ρ_M จากสมการ (21) เมื่อ $m \neq 3$ เราจะได้

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a^3} + \left[3(1-m)(2-m)a^{3-m} - 2m \right] \frac{1}{3-m} \frac{\alpha c^2}{6a^3} \quad (28)$$

เราเริ่มต้นที่ $m = 0$ ซึ่งเป็นการทบทวนแบบจำลองดั้งเดิมที่ค่าคงที่จักรวาลเป็นค่าคงที่ สมการความเร่งจะกลายเป็น

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a^3} + \frac{\alpha c^2}{3} \quad (29)$$

จักรวาลขยายตัวด้วยความเร่ง $\ddot{a} > 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$a^3 > \frac{4\pi G \rho_{M0}}{\alpha c^2} \quad (30)$$

เมื่อแทนค่าคงที่ต่าง ๆ เราจะได้

$$a > 0.60 \quad (31)$$

จากการสังเกตการณ์ จักรวาลเริ่มขยายตัวด้วยความเร่งที่ $a \approx 0.7$ [11]

สำหรับ $m = 0.1$ สมการความเร่งสำหรับยุคสสารคือ

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a^3} - \frac{1}{87} \frac{\alpha c^2}{a^3} + \frac{171}{580} \frac{\alpha c^2}{a^{0.1}} \quad (32)$$

จักรวาลขยายตัวด้วยความเร่ง $\ddot{a} > 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$a > 0.64 \quad (33)$$

จากสมการ (24) แบบจำลองที่ให้จักรวาลที่ขยายตัวด้วยความเร่งจะใช้งานได้ ก็ต่อเมื่อ

$$0.64 < a < 1.97 \quad (34)$$

สำหรับ $m = 0.2$ สมการความเร่งสำหรับยุคสสารคือ

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a^3} - \frac{1}{42} \frac{\alpha c^2}{a^3} + \frac{9}{35} \frac{\alpha c^2}{a^{0.2}} \quad (35)$$

จักรวาลขยายตัวด้วยความเร่ง $\ddot{a} > 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$a > 0.70 \quad (36)$$

จากสมการ (25) แบบจำลองที่ให้จักรวาลที่ขยายตัวด้วยความเร่งจะใช้งานได้ ก็ต่อเมื่อ

$$0.70 < a < 1.64 \quad (37)$$

สำหรับ $m = 0.3$ สมการความเร่งสำหรับยุคสสารคือ

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a^3} - \frac{1}{27} \frac{\alpha c^2}{a^3} + \frac{119}{540} \frac{\alpha c^2}{a^{0.3}} \quad (38)$$

จักรวาลขยายตัวด้วยความเร่ง $\ddot{a} > 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$a > 0.77 \quad (39)$$

จากสมการ (26) แบบจำลองที่ให้จักรวาลที่ขยายตัวด้วยความเร่งจะใช้งานได้ ก็ต่อเมื่อ

$$0.77 < a < 1.49 \quad (40)$$

การเปลี่ยนแปลงของตัวประกอบมาตราส่วนกับเวลา

ในหัวข้อนี้ ในจักรวาลแบนราบ เราจะพิจารณาว่า ตัวประกอบมาตราส่วนเปลี่ยนแปลงกับเวลาอย่างไร เมื่อแทนค่าความหนาแน่นในยุคสสารจากสมการ (21) ลงในสมการฟรีดมันน์ (11) เมื่อ $k = 0$ เราจะได้

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a^3} + \frac{2}{3} \frac{m}{3-m} \alpha c^2 \frac{1}{a^3} + \frac{1-m}{3-m} \alpha c^2 \frac{1}{a^m} \quad \text{โดยที่ } m \neq 3 \quad (41)$$

นำ a^2 คูณทั้งสองข้างของสมการ (41)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a} + \frac{2}{3} \frac{m}{3-m} \alpha c^2 \frac{1}{a} + \frac{1-m}{3-m} \alpha c^2 a^{2-m} \quad (42)$$

สำหรับ $m = 0$ เราจะได้แบบจำลองดั้งเดิมที่ค่าคงที่จักรวาลเป็นค่าคงที่

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a} + \frac{\alpha c^2}{3} a^2 \quad (43)$$

เมื่อ $\alpha c^2 > 0$ เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{M0}}{a} + \frac{\alpha c^2}{3} a^2} \quad (44)$$

เมื่อใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $a(t_0) = 1$ คำตอบของสมการข้างต้นคือ [12]

$$a = \sqrt[3]{\frac{4\pi G \rho_{M0}}{\alpha_c^2} \left[\cosh \left[\sqrt{3\alpha_c^2} (t - t_0) + 2 \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{\alpha_c^2}{8\pi G \rho_{M0}}} \right) \right] - 1 \right]} \quad (45)$$

สำหรับ $m = 0.1$ สมการ (42) กลายเป็น

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_{M0}}{3} \frac{1}{a} + \frac{2}{87} \alpha_c^2 \frac{1}{a} + \frac{9}{29} \alpha_c^2 a^{1.9} \quad (46)$$

จะเห็นได้ว่า $\dot{a}^2 > 0$ เสมอ ดังนั้นแบบจำลองนี้ เมื่อ $m = 0.1$ ใช้งานได้ทุก a

สำหรับ $m = 0.2$ สมการ (42) กลายเป็น

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_{M0}}{3} \frac{1}{a} + \frac{1}{21} \alpha_c^2 \frac{1}{a} + \frac{2}{7} \alpha_c^2 a^{1.8} \quad (47)$$

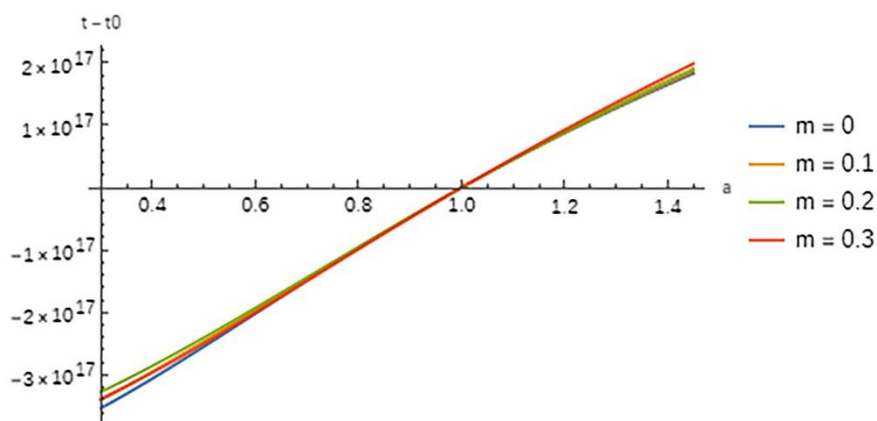
จะเห็นได้ว่า $\dot{a}^2 > 0$ เสมอ ดังนั้นแบบจำลองนี้ เมื่อ $m = 0.2$ ใช้งานได้ทุก a

สำหรับ $m = 0.3$ สมการ (42) กลายเป็น

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_{M0}}{3} \frac{1}{a} + \frac{1}{27} \alpha_c^2 \frac{1}{a} + \frac{7}{27} \alpha_c^2 a^{1.7} \quad (48)$$

จะเห็นได้ว่า $\dot{a}^2 > 0$ เสมอ ดังนั้น แบบจำลองนี้ เมื่อ $m = 0.3$ ใช้งานได้ทุก a

กราฟความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบมาตราส่วนและเวลา เมื่อ $m = 0, 0.1, 0.2$ และ 0.3 แสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบมาตราส่วนกับเวลา สำหรับ $m = 0, 0.1, 0.2$ และ 0.3 เมื่อ $\rho_{M0} = 2.52 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ และ $\alpha = 1.1 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$

พารามิเตอร์ความหนาแน่น

เราสามารถเขียนสมการฟรีดมันน์ (11) ในรูปของพารามิเตอร์ความหนาแน่น เราเริ่มต้นจากการนิยามความหนาแน่นวิกฤต ρ_c ซึ่งเป็นค่าความหนาแน่นของสสารหรือรังสีในจักรวาลที่แบนราบและไม่มีค่าคงที่จักรวาลเมื่อให้ $k = 0$ และ $\Lambda = 0$ และคิดค่าเวลาปัจจุบัน (t_0) ความหนาแน่นในสมการ (8) จะกลายเป็นความหนาแน่นวิกฤต

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (49)$$

โดยที่ $H = \dot{a}/a$ คือพารามิเตอร์ฮับเบิล และ $H_0 = H(t_0)$ พารามิเตอร์ฮับเบิล ณ เวลาปัจจุบัน ซึ่งมีค่าประมาณ $2.38 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ [13] จากนั้น นำ H_0^2 ทหารสมการ (11) เราจะได้

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega + \Omega_\Lambda \quad (50)$$

โดยที่ Ω คือพารามิเตอร์ความหนาแน่นของสสารหรือรังสี และ Ω_Λ คือพารามิเตอร์ความหนาแน่นของค่าคงที่จักรวาล ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho \quad \text{และ} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} = \frac{\alpha c^2}{3H_0^2} \frac{1}{a^m} \quad (51)$$

การเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ความหนาแน่นของรังสีหาได้จากการนำความหนาแน่นวิกฤต ρ_c ไปหารสมการของความหนาแน่น (20) สำหรับ $m \neq 4$ เราจะได้

$$\Omega_R = \frac{\Omega_{R0}}{a^4} + \frac{2m}{4-m} \Omega_{\Lambda 0} \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^m} \right) \quad (52)$$

โดยที่ Ω_{R0} คือ พารามิเตอร์ความหนาแน่นของรังสี ณ เวลาปัจจุบัน ซึ่งมีค่าประมาณ 10^{-5} และ $\Omega_{\Lambda 0}$ คือพารามิเตอร์ความหนาแน่นของค่าคงที่จักรวาล ณ เวลาปัจจุบัน ซึ่งมีค่าประมาณ 0.72 จากสมการ (51) เราสามารถเขียน $\Omega_{\Lambda 0}$ ได้เป็น

$$\Omega_{\Lambda 0} = \frac{\alpha c^2}{3H_0^2} = 0.72 \quad (53)$$

พารามิเตอร์ความหนาแน่นของค่าคงที่จักรวาล Ω_Λ ในสมการ (51) จะกลายเป็น

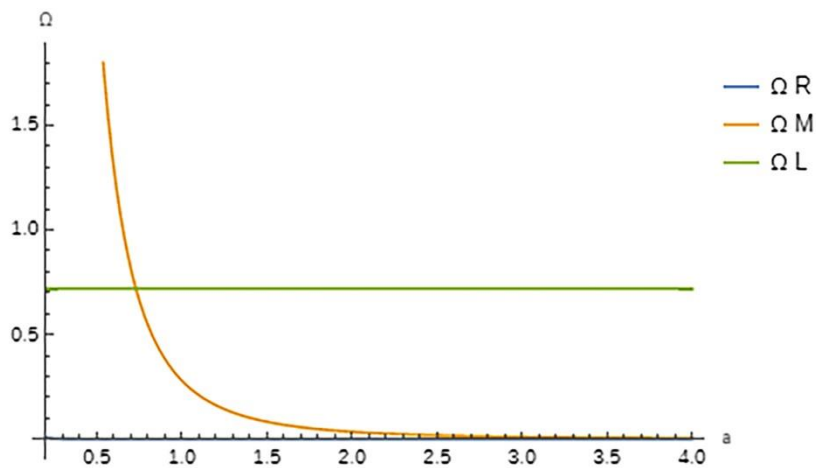
$$\Omega_\Lambda = \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{a^m} \quad (54)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ความหนาแน่นของสสารได้จากการนำความหนาแน่นวิกฤต ρ_c ไปหารสมการของความหนาแน่น (21) และ (22) สำหรับ $m \neq 3$ เราจะได้

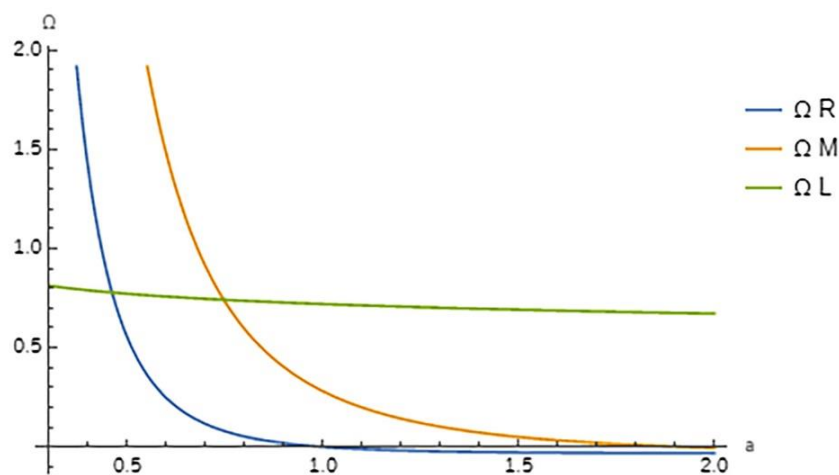
$$\Omega_M = \frac{\Omega_{M0}}{a^3} + \frac{2m}{3-m} \Omega_{\Lambda 0} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^m} \right) \quad (55)$$

โดยที่ Ω_{M0} คือ พารามิเตอร์ความหนาแน่นของสสาร ณ เวลาปัจจุบัน ซึ่งมีค่าประมาณ 0.28

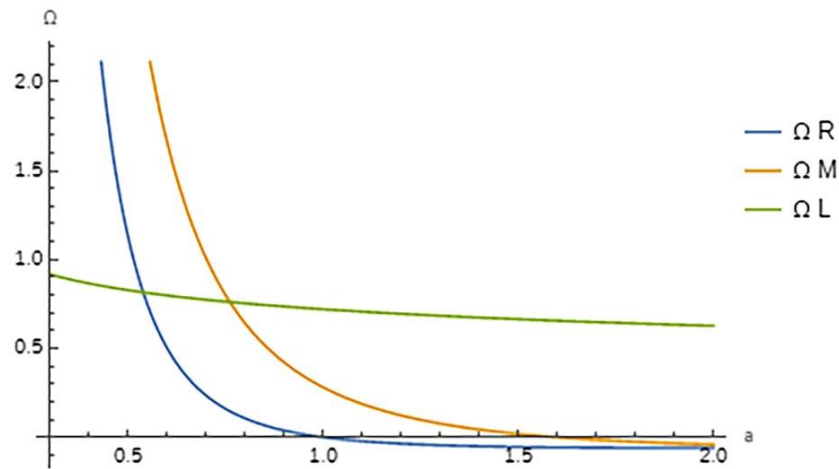
จากสมการ (52), (54) และ (55) กราฟความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ความหนาแน่นของรังสี สสาร และค่าคงที่จักรวาลที่เป็นฟังก์ชันของตัวประกอบมาตราส่วน เมื่อ $m = 0, 0.1, 0.2$ และ 0.3 แสดงในรูปที่ 4-7



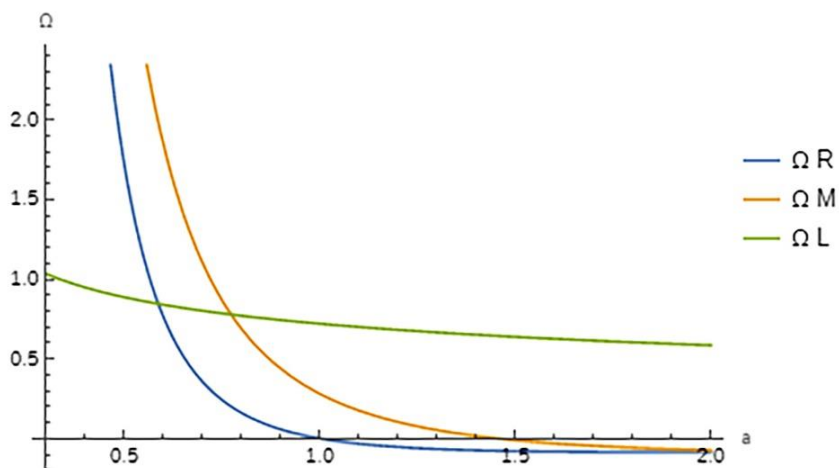
รูปที่ 4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ความหนาแน่นกับตัวประกอบมาตราส่วน สำหรับ $m = 0$



รูปที่ 5 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ความหนาแน่นกับตัวประกอบมาตราส่วน สำหรับ $m = 0.1$



รูปที่ 6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ความหนาแน่นกับตัวประกอบมาตราส่วน สำหรับ $m = 0.2$



รูปที่ 7 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ความหนาแน่นกับตัวประกอบมาตราส่วน สำหรับ $m = 0.3$

การอภิปรายผล

สำหรับ $m = 0$ ซึ่งเป็นแบบจำลองแบบดั้งเดิมที่ค่าคงที่จักรวาลเป็นค่าคงที่ เมื่อวิเคราะห์สมการ (26) พบว่า ในอดีตที่ a มีค่าน้อย ๆ จักรวาลจะขยายตัวด้วยความหน่วง เพราะค่าสัมบูรณ์ของพจน์แรกมีค่ามากกว่าค่าสัมบูรณ์ของพจน์ที่สอง เมื่อเวลาผ่านไป a มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของพจน์แรกจะลดลงเรื่อย ๆ ในขณะที่พจน์ที่สองเป็นค่าคงที่ เมื่อค่าสัมบูรณ์ของพจน์แรกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของพจน์ที่สอง จักรวาลจะขยายตัวด้วยความเร่ง จุดเปลี่ยนผ่านจากการขยายตัวด้วยความหน่วงมาเป็นการขยายตัวด้วยความเร่งเกิดขึ้นที่

$$a = \sqrt[3]{4\pi G \rho_{M0} / \alpha_c^2} = 0.60$$

สำหรับ $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 เมื่อวิเคราะห์สมการ (30) และ (40) พบว่า ในอดีตที่ a มีค่าน้อย ๆ จักรวาลจะขยายตัวด้วยความหน่วง เพราะค่าสัมบูรณ์ของสองพจน์แรกมีค่ามากกว่าค่าสัมบูรณ์ของพจน์ที่สาม เมื่อเวลาผ่านไป a มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของสองพจน์แรกซึ่งลดลงด้วยพจน์ $1/a^3$ จะลดลงเร็วกว่าค่าสัมบูรณ์ของพจน์ที่สามซึ่งลดลงด้วยพจน์ $1/a^m$ เมื่อ $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 เมื่อค่าสัมบูรณ์ของสองพจน์แรกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของพจน์ที่สาม จักรวาลจะขยายตัวด้วยความเร่ง การเปลี่ยนผ่านจากการขยายตัวด้วย

ความหนาแน่นมาเป็นการขยายตัวด้วยความเร่งเกิดขึ้นที่ $a = 0.64, 0.70$ และ 0.77 สำหรับ $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 ตามลำดับ

ในอดีตที่จุดเริ่มต้นของยุคพองตัว (Inflation) ซึ่ง $a \approx 10^{-31}$ [14] ค่าคงที่จักรวาลตามสมการ (5) จะมีค่าเป็น

$$\Lambda_p = 10^{31m} \alpha = 10^{31m} \Lambda_0$$

โดยที่ Λ_p คือค่าคงที่จักรวาลในอดีต และ $\Lambda_0 = \alpha$ คือค่าคงที่จักรวาลในปัจจุบัน ดังนั้น สำหรับ $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 ค่าคงที่จักรวาลในปัจจุบันจะมีค่าน้อยกว่าค่าคงที่จักรวาลในอดีต $10^{3.1}, 10^{6.2}$ และ $10^{9.3}$ เท่า ตามลำดับ ซึ่งช่วยบรรเทาปัญหาค่าคงที่จักรวาลลงได้เล็กน้อย ซึ่งดีกว่า $m = 0$ ที่ไม่ได้ช่วยบรรเทาปัญหาค่าคงที่จักรวาล

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ เราศึกษาค่าคงที่จักรวาลที่ขึ้นกับเวลาที่แปรผกผันกับการยกกำลังของตัวประกอบมาตราส่วน $\Lambda = \alpha/a^m$ ผลการวิจัยพบว่า สมการความเร่งเท่านั้นที่เปลี่ยนแปลงไป โดยมีพจน์เพิ่มเติมเข้ามาจากแบบจำลองแบบดั้งเดิมที่ค่าคงที่จักรวาลเป็นค่าคงที่ พจน์ดังกล่าวเป็นผลมาจากการที่ค่าคงที่จักรวาลเปลี่ยนแปลงตามเวลา ในขณะที่ สมการฟรีดมันน์ไม่เปลี่ยนแปลงไปจากแบบจำลองแบบดั้งเดิม นอกจากนี้ แบบจำลองนี้สามารถลดรูปไปสู่แบบจำลองแบบดั้งเดิมได้ เมื่อ $m = 0$

เราพบว่า เงื่อนไขที่จักรวาลขยายตัวด้วยความเร่งคือ $m < 2/3$ ในบทความวิจัยนี้ เราเลือก $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 ผลการวิจัยพบว่า แบบจำลองสามารถให้จักรวาลที่ขยายตัวด้วยความเร่งได้ โดยจุดเปลี่ยนผ่านจากการขยายตัวด้วยความหนาแน่นมาเป็นการขยายตัวด้วยความเร่งเกิดขึ้นที่ $a = 0.64, 0.70$ และ 0.77 สำหรับ $m = 0.1, 0.2$ และ 0.3 ตามลำดับ

นอกจากนี้ แบบจำลองยังช่วยบรรเทาปัญหาค่าคงที่จักรวาลลงได้ดีกว่า $m = 0$

เอกสารอ้างอิง

- [1] R. J. Adler, B. Casey and O. C. Jacob, "Vacuum catastrophe: An elementary exposition of the cosmological constant problem", American Journal of Physics, 63, 620-626 (1995).
- [2] T. Clifton, G. F. Pedro, P. Antonio and S. Constantinos, "Modified gravity and cosmology", Physics Reports, 513, 1-189 (2012).
- [3] G. F. R. Ellis, "The trace-free Einstein equations and inflation", General Relativity and Gravitation, 46, 1619 (2014).
- [4] R. Percacci, "Unimodular quantum gravity and the cosmological constant", Foundations of Physics, 48, 1364-1379 (2018).
- [5] Q. Wang, Z. Zhu and W. G. Unruh, "How the huge energy of quantum vacuum gravitates to drive the slow accelerating expansion of the Universe", Physical Review D, 95, 103504 (2017).
- [6] O. Luongo and M. Muccino, "Speeding up the universe using dust with pressure", Physical Review D, 98, 2-3 (2018).
- [7] A. Cohen, D. B. Kaplan and A. Nelson, "Effective field theory, black holes, and the cosmological constant", Physical Review Letters, 82, 4971-4974 (1999).
- [8] J. M. Overduin and F. I. Cooperstock, "Evolution of the scale factor with a variable cosmological term", Physical Review D, 58, 043506 (1998).
- [9] S. Weinberg, "The cosmological constant problem", Review of Modern Physics, 61, 1-23 (1989).

- [10] A. M. Oztas, E. Dil and M. L. Smith, “The varying cosmological constant: a new approximation to the Friedmann equations and universe model”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476, 451-458 (2018).
- [11] J. A. Frieman, M. S. Turner and D. Huterer, “Dark energy and the accelerating universe”, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 46, 385-432 (2008).
- [12] R. A. D’Inverno, “Introducing Einstein’s relativity”, UK: Oxford University Press (1992).
- [13] D. Brout, D. Scolnic, B. Popovic, A. G. Riess, A. Carr J. Zuntz, R. Kessler, T. M. Davis, S. Hinton, D. Jones, W. D’Arcy Kenworthy, E. R. Peterson, K. Said, G. Taylor, N. Ali, P. Armstrong, P. Charvu, A. Dwomoh, C. Meldorf, A. Palmese, H. Qu, B. M. Rose, B. Sanchez, C. W. Stubbs, M. Vincenzi, C. M. Wood, P. J. Brown, R. Chen, K. Chambers, D. A. Coulter, M. Dai, G. Dimitriadis, A. V. Filippenko, R. J. Foley, S. W. Jha, L. Kelsey, R. P. Kirshner, A. Möller, J. Muir, S. Nadathur, Y.-C. Pan, A. Rest, C. Rojas-Bravo, M. Sako, M. R. Siebert, M. Smith, B. E. Stahl and P. Wiseman “The Pantheon+ analysis: Cosmological constraints”, *The Astrophysical Journal*, 938, 110 (2022).
- [14] L. G. Jaime and G. Arciniega, “A unified geometric description of the Universe: From inflation to late-time acceleration without an inflation nor a cosmological constant”, *Physics Letters B*, 827, 136939 (2022).