

การแก้ปัญหาเส้นทางเดินบนผิวโลก ในการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์ และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศ

อำนาจ สาขานนท์¹

บทคัดย่อ

การแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 6 มีข้อสอบภาคทฤษฎีข้อหนึ่งเกี่ยวกับเส้นทางเดินบนผิวโลกที่ทำให้นักเดินทางมองเห็นการเคลื่อนที่ของดาวฤกษ์เปลี่ยนไปจากปกติ ปัญหาข้อนี้จัดอยู่ในระดับยากที่สุด [1] แต่มีความน่าสนใจที่ทำทนายจินตนาการเป็นอย่างมาก คณะกรรมการการแข่งขันต้องการคำตอบเป็นเส้นกราฟซึ่งสร้างขึ้นเพื่อแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่แบบคร่าว ๆ และแสดงการหาความเร็วในกรณีง่าย ๆ กรณีหนึ่ง

อย่างไรก็ตามในการแข่งขันไม่มีผู้เข้าแข่งขันคนใดที่สามารถทำข้อนี้ได้อย่างสมบูรณ์ คำตอบของปัญหานี้ยังค่อนข้างคลุมเครือ และมีประเด็นให้ถกเถียงกัน เนื่องจากยังไม่มีวิธีการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) ในเชิงปริมาณ (quantitative) ได้อย่างชัดเจน แม้จนกระทั่งบัดนี้ ในหนังสือซึ่งรวบรวมคำถามพร้อมวิธีทำและคำเฉลยที่ยอมรับอย่างเป็นทางการของคณะกรรมการจัดการแข่งขัน [1], [2] ก็ยังไม่ปรากฏการวิเคราะห์ในรูปแบบนี้ให้เห็น

บทความนี้จะอธิบายลักษณะเฉพาะและความน่าสนใจของคำถามข้อนี้ พร้อมอธิบายเฉลยที่คณะกรรมการใช้ในการตรวจในระหว่างการแข่งขัน ความยุ่งยากในหาคำตอบที่ทำให้มีประเด็นขัดแย้ง และในส่วนท้ายจะนำเสนอการแก้ปัญหานี้โดยใช้เมตริกซ์การหมุน ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหานี้อย่างที่เป็นธรรมชาติกว่า พร้อมผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่สามารถใช้ได้ทันทีทั่วทั้งไป ซึ่งทำให้เห็นถึงความไม่สมบูรณ์ของผลเฉลยที่ใช้ในการแข่งขันว่าเป็นจริงเฉพาะในกรณีที่ง่ายที่สุดเท่านั้น ซึ่งน่าจะเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจปัญหาลักษณะคล้ายกันนี้ต่อไป

การแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และดาราศาสตร์ระหว่างประเทศ

การแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และดาราศาสตร์ระหว่างประเทศ (International Olympiad Astronomy and Astrophysics - IOAA) จัดขึ้นทุกปีนับตั้งแต่ปี พ.ศ. 2550 โดยประเทศไทยได้รับเกียรติจากคณะกรรมการจัดการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศ (IOAA international board) ให้เป็นเจ้าภาพเป็นประเทศแรกประเทศที่เป็นสมาชิกจะหมุนเวียนกันเป็นเจ้าภาพ ในปีที่ผ่านมา (พ.ศ. 2557) ได้จัดขึ้นเป็นครั้งที่ 8 ที่เมืองซูเซอวา (Suceava) ประเทศโรมาเนีย มีทีมเข้าร่วมทั้งหมด 42 ทีมจาก 37 ประเทศ และในปีที่กำลังจะจัดขึ้นที่เมืองเชอมารัง ประเทศอินโดนีเซียในวันที่ 26 กรกฎาคม ถึงวันที่ 4 สิงหาคม พ.ศ. 2558

ประเทศที่เข้าร่วมการแข่งขันจะจัดการคัดเลือกนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 5 คนต่อหนึ่งทีม โดยมีครูสังเกตการณ์ 1 คน และหัวหน้าทีม 2 คน ซึ่งทำหน้าที่เป็นกรรมการร่วมพิจารณาข้อสอบพร้อมคำเฉลยก่อนการแข่งขัน แปลข้อสอบ ตรวจสอบข้อสอบให้ถูกต้องและอุดหนุนคะแนน (moderation) กับกรรมการกลางในกรณีที่คิดว่านักเรียนควรได้คะแนนเพิ่ม การแข่งขันประกอบด้วยข้อสอบภาคทฤษฎี (50%) ภาควิเคราะห์ข้อมูล (25%) และภาคสังเกตการณ์ (25%)

ปัญหานี้ที่นำเสนอในบทความนี้เป็นข้อสอบภาคทฤษฎีข้อที่ 13 จากการแข่งขันครั้งที่ 6 ในปี พ.ศ. 2512 จัดขึ้นที่เมืองริโอเดอจาเนโร ประเทศบราซิล เพื่อความเข้าใจปัญหานี้ขออธิบายเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุท้องฟ้าเสียก่อน

การเคลื่อนที่ของวัตถุท้องฟ้า

ดาราศาสตร์ทรงกลมใช้ระบบโลกเป็นศูนย์กลาง (geocentric system) โดยพิจารณาให้ทรงกลมท้องฟ้าเป็นภาพขยาย

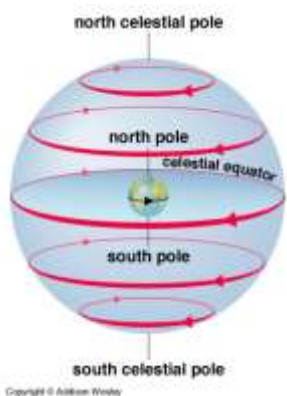
¹ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

และ รองหัวหน้าทีมตัวแทนประเทศไทยในแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 5 ประเทศโปแลนด์

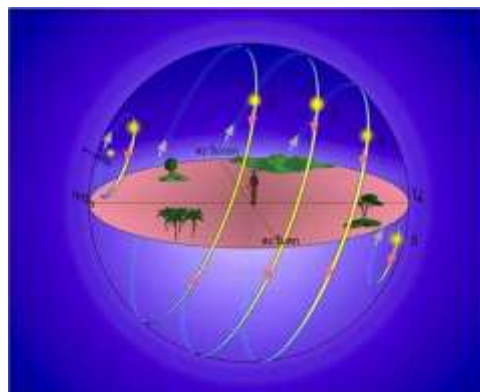


(ก) เส้นดาว [3]

ศุภฤกษ์ คฤหานนท์: Canon EOS 5D Mark2 /17-40 มม. /F4/ISO 400/ 4 ชั่วโมง 20 นาที (30 วินาที x 520 ภาพ)



(ข) การหมุนของทรงกลมท้องฟ้า



(ค) การโคจรของวัตถุท้องฟ้าที่สังเกตเห็นบนโลก [3]

รูปที่ 1 ตำแหน่งและทิศทางการหมุนของทรงกลมท้องฟ้า

ของทรงกลมโลกไปในอวกาศดังรูปที่ 1 (ข) ดาวฤกษ์ และวัตถุท้องฟ้าเสมือนกับว่าติดอยู่กับทรงกลมนี้ จุดที่แกนโลก² ตัดกับทรงกลมท้องฟ้าเรียกว่าขั้วฟ้าเหนือ (North Celestial Pole - NCP) และขั้วฟ้าใต้ (South Celestial Pole - SCP) ซึ่งตรงกับขั้วโลกเหนือ (north pole) และขั้วโลกใต้ (south pole) ตามลำดับ เส้นศูนย์สูตรบนผิวโลกก็ขยายออกไปเป็นเส้นศูนย์สูตรฟ้า (Celestial Equator - CE)

การหมุนรอบตัวเองของโลกทำให้ผู้สังเกตมองเห็นวัตถุท้องฟ้าโคจรเป็นวงกลมรอบขั้วฟ้าทั้งสองเรียกว่า การเคลื่อนที่ประจำวัน (diurnal motion) เพราะวัตถุท้องฟ้าจะโคจรครบรอบใน

เวลา 1 วันดาราคติ³

สำหรับผู้สังเกตที่อยู่ซีกโลกเหนือ (northern hemisphere) จะเห็นดาวฤกษ์โคจรรอบขั้วฟ้าเหนือ ซึ่ง ปัจจุบันใกล้เคียงกับตำแหน่งนี้มีดาวฤกษ์ที่สว่างพอที่จะสังเกตได้ด้วยตาเปล่าดวงหนึ่งที่เรียกว่า ดาวเหนือ (Polaris) ในแต่ละวันผู้สังเกตที่อยู่บนพื้นโลกจะเห็นทรงกลมท้องฟ้าจะหมุนจากตะวันออกไปตะวันตกพาให้ดาวฤกษ์และวัตถุท้องฟ้าโคจรทวนเข็มนาฬิกา รอบขั้วฟ้าจากทิศตะวันออกไปทิศตะวันตก

ผู้สังเกตที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนโลกจะเห็นดาวฤกษ์ขึ้นและตกยังทิศตะวันตกดังรูปที่ 1 (ค) และเมื่อถ่ายภาพโดยเปิดหน้า

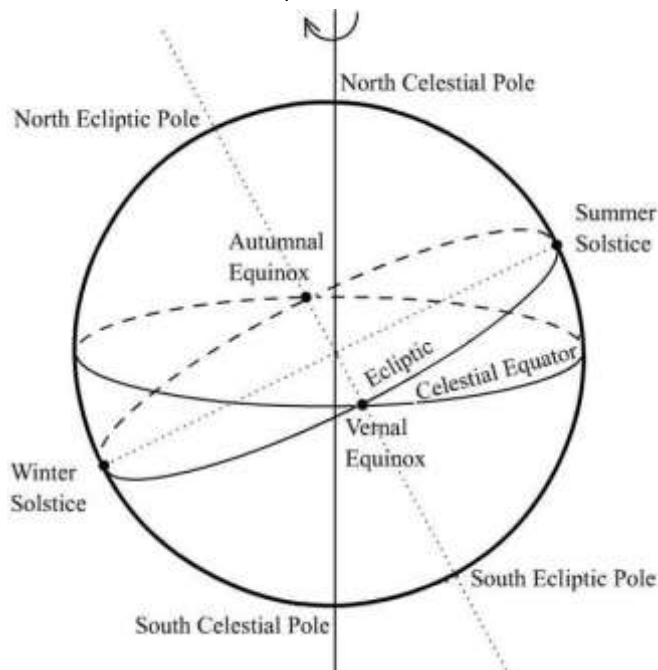
² แกนโลก หมายถึง แกนหมุนของโลก (earth rotational axis)

³ วันดาราคติ (sidereal day) คือระยะเวลาที่โลกหมุนรอบตัวเองเมื่อเทียบกับจุดที่อยู่ไกลมาก ๆ ในอวกาศ ซึ่งคิดเป็นเวลาเท่ากับ 23 ชั่วโมง 56 นาที 4.09 วินาที ตามเวลาสุริยคติเฉลี่ยที่ใช้เป็นมาตรฐานเวลาทั่วไป

กล้องไว้นาน ๆ จะปรากฏเป็นเส้นดาว (star trails) ดังรูปที่ 1 (ก) โดยฝั่งขวาและซ้ายของรูปคือทิศตะวันออกและทิศตะวันตกตามลำดับ

โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ในช่วงเวลาหนึ่งปี⁴ ดังนั้นในช่วงเวลานี้จะสังเกตเห็นดวงอาทิตย์โคจรบนทรงกลมท้องฟ้าตามแนวเส้นสุริยวิถี (ecliptic) ดังรูปที่ 2 แกนการโคจรของดวงอาทิตย์ซึ่งตั้งฉากกับระนาบสุริยวิถีจะตัดกับทรงกลมท้องฟ้าที่ขั้วเหนือและขั้วใต้สุริยวิถี (North and South Ecliptic Poles – NEP and SEP) ขั้วเหนือสุริยวิถีเอียงทำมุม กับขั้วฟ้าเหนือ (NCP) จุดที่เส้นสุริยวิถีตัดกับเส้นศูนย์สูตรฟ้าเรียกว่าจุดวิษุวัต (equinox) สำหรับจุดตัดขณะที่ดวงอาทิตย์โคจรขึ้นจากซีกฟ้าใต้ไปยังซีกฟ้าเหนือเรียกว่า จุดวสันตวิษุวัต (vernal equinox) ส่วนจุดตัดในขณะที่ดวงอาทิตย์เคลื่อนจากซีกฟ้าเหนือลงใต้เรียกว่า จุดศารทวิษุวัต (autumnal equinox)

ขอให้สังเกตว่าเมื่อกำหนดให้ระบบพิกัดที่ใช้พิจารณาโดยให้โลกอยู่หนึ่ง เราอาจพิจารณาได้ว่าทรงกลมทั้งสองเป็นทรงกลมเดียวกัน แต่ทรงกลมท้องฟ้าจะหมุนในทิศทางดังรูปที่ 2 ทำให้ตำแหน่งของขั้วและเส้นสุริยวิถีมีการเปลี่ยนตำแหน่งตลอดเวลา



รูปที่ 2 เส้นสุริยวิถีและขั้วสุริยวิถีบนทรงกลมท้องฟ้า

ปัญหาและคำเฉลย

ปัญหาที่จะนำเสนอมีใจความดังนี้

นักดาราศาสตร์ทางซีกโลกใต้คนหนึ่งพิจารณาการขึ้นของขั้วสุริยวิถีใต้ (south ecliptic pole) แล้วเกิดความคิดว่า คงจะสนุกดีถ้าหากเห็นดาวบนท้องฟ้าหมุนวนรอบขั้วสุริยวิถีแทนที่จะเป็นขั้วฟ้า (celestial pole)

จงวาดเส้นทางการเคลื่อนที่ของผู้สังเกตที่ใช้เดินทางในหนึ่งวันบนพื้นผิวโลก ที่ทำให้เห็นดาวฤกษ์ทั้งหลายโคจรรอบขั้วใต้สุริยวิถีในทิศทางและคาบเท่ากับที่โคจรรอบขั้วฟ้าได้ และหาความเร็ว (ทั้งทิศทางและอัตราเร็ว) ในขณะที่ผู้สังเกตเดินทางผ่านเส้นศูนย์สูตรครั้งแรก

หัวใจของการหาคำตอบของปัญหานี้มีอยู่ว่า มีเงื่อนไขอะไรบ้างที่จะทำให้ผู้สังเกตเห็นการโคจรของดาวฤกษ์ในลักษณะดังที่โจทย์กำหนด ซึ่งขอแยกเป็นสองประเด็นดังต่อไปนี้

1. ถ้าทรงกลมท้องฟ้าอยู่นิ่งเมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิง ผู้สังเกตจะเห็นดาวฤกษ์โคจรในทิศทวนเข็มนาฬิการอบขั้วสุริยวิถี (ทั้งเหนือและใต้) เขาจะต้องเดินทางขนานกับเส้นสุริยวิถีในทิศทวนเข็มนาฬิกา เพื่อให้เห็นดาวฤกษ์โคจรรอบขั้วสุริยวิถีด้วยอัตราเดียวกับที่โคจรรอบขั้วฟ้า เขาจะต้องเคลื่อนที่รอบแกนสุริยวิถี ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω คงที่เท่ากับอัตราการหมุนของโลก ถ้าให้ T คือเวลา 1 วัน หรือ 24 ชั่วโมงการาคิดจะได้ว่า

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

สังเกตว่าเส้นทางการเคลื่อนที่นี้ไม่จำเป็นต้องเป็นภาพฉาย (projection) ของสุริยวิถีซึ่งเป็นวงกลมใหญ่ (great circle) แต่อาจเป็นวงกลมเล็กที่ขนานกับเส้นนี้ขึ้นกับตำแหน่งและเวลาเริ่มต้น

ดังนั้นอัตราเร็วเชิงเส้นบนเส้นทางที่กำหนดนี้จึงขึ้นกับตำแหน่งและเวลาเริ่มต้นด้วย ถ้าให้โลกเป็นทรงกลมสมมาตรที่มีรัศมีเฉลี่ย R และ β_0 คือมุมที่จุดศูนย์กลางของโลกวัดจากภาพฉายของเส้นสุริยวิถีไปถึงตำแหน่งที่เริ่มต้นเดินทางตามแนววงกลมใหญ่ที่ลากจากขั้วเหนือไปยังขั้วใต้สุริยวิถี ค่าของมุม β_0 สามารถหาได้จากตำแหน่งของผู้สังเกตและเวลาการาคิด และความรู้เกี่ยวกับตรีโกณมิติทรงกลม อัตราเร็วเชิงเส้นของการเดินทางบนเส้นขนานนี้จะหาได้จาก

$$v_e = \omega \cdot (R \cos \beta_0) = V \cos \beta_0 \quad (2)$$

⁴ ในที่นี้หมายถึงปีฤดูกาล (tropical year) ซึ่งเท่ากับ 365 วัน 5 ชั่วโมง 48 นาที 45.14 วินาที (อ้างอิงจากปี 2010)

⁵ รัศมีเฉลี่ยของโลกเท่ากับ 6371.0 กิโลเมตร

เมื่อ $V = \omega R$ คือ อัตราเร็วที่ใช้ในการเคลื่อนที่รอบเส้นศูนย์สูตรใน

เวลา 1

วันคารา 6 อย่างไรก็ตามจะต้องระมัดระวังในคำว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย นี้จะมีทิศเปลี่ยนไปตามละติจูดและลองจิจูดด้วย ดังนั้นการใช้จึงเป็นกรณีเฉพาะสำหรับ
คติ ตำแหน่งนี้เท่านั้น

2

. เนื่องจากทรงกลมท้องฟ้าหมุนรอบขั้วฟ้าดังแสดงใน **Error!**

Reference source not found. เพื่อให้ผู้สังเกตมองเห็นทรงกลมท้องฟ้าอยู่นิ่ง ผู้สังเกตต้องเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ขนานกับเส้นศูนย์สูตรโลกไปทางทิศตะวันตกเพื่อชดเชยการหมุนรอบตัวเองของโลกที่ทำให้ผู้สังเกตเห็นทรงกลมท้องฟ้าหมุนไปเมื่อเทียบกับผิวโลก จะเห็นได้ว่าอัตราเร็วเชิงเส้นตามแนวขนานกับเส้นศูนย์สูตรขึ้นกับละติจูด ϕ ของตำแหน่งเริ่มต้นบนโลกในขณะเริ่มเดิน ซึ่งเขียนได้เป็น

$$v_E = \omega \cdot (R \cos \phi) = V \cos \phi \quad (3)$$

สมการการเคลื่อนที่ (2) และ (3) ค่อนข้างความซับซ้อนมาก เพราะนอกจากตำแหน่งและเวลาเริ่มต้นมีผลกับคำตอบสุดท้ายแล้ว เมื่อเปลี่ยนตำแหน่งละติจูดเนื่องจากสมการ (2) อัตราเร็วตามสมการที่ (3) ก็ต้องเปลี่ยนไปด้วย กล่าวคืออัตราเร็วเชิงเส้นเพื่อชดเชยการหมุนของโลกไม่เป็นอิสระจากตำแหน่งของผู้สังเกต

พิจารณาในกรณีเฉพาะเมื่อผู้สังเกตเริ่มต้นเดินทางบนเส้นศูนย์สูตรในขณะที่ยอดสวนตวิษุวัตกำลังผ่านเมริเดียนที่จุดเหนือศีรษะ (zenith) ของผู้สังเกตพอดีซึ่งแสดงว่า ขณะนั้นขั้วเหนือและขั้วใต้สุริยวิถีกำลังจะตกและขึ้นจากขอบฟ้าตามลำดับ โดยเงื่อนไขนี้ $\beta_0 = 0^\circ$ และ $\phi = 0^\circ$ เมื่อแทนค่าในสมการ (2) และ (3) จะได้ว่า

$$v_e = v_E = V \quad (4)$$

จากรูปที่ 2 (ก) ถ้ากำหนดให้แกน z ของระบบชี้ไปยังขั้วโลกเหนือ (ซึ่งเป็นทิศทางเดียวกับขั้วฟ้าเหนือและขนานกับแกนโลก) และแกน x ชี้ไปยังจุดวสันตวิษุวัต แกน y จะชี้ไปทางทิศตะวันออก โดยเส้นสุริยวิถีทำมุม ε กับเส้นศูนย์สูตร

ถ้ากำหนดให้ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ $+x, +y, +z$ ตามลำดับ จะได้ว่า $\hat{e} = \cos \varepsilon \cdot \hat{j} + \sin \varepsilon \cdot \hat{k}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวเส้นสุริยวิถีในทิศที่เคลื่อนที่จากซีกโลกใต้ไปยังซีกเหนือตามโจทย์กำหนด จะได้ว่า

$$\vec{v}_e = V \cdot \hat{e} = \pm V \cdot [\cos \varepsilon \cdot \hat{j} + \sin \varepsilon \cdot \hat{k}]$$

$$\vec{v}_E = -V \cdot \hat{j}$$

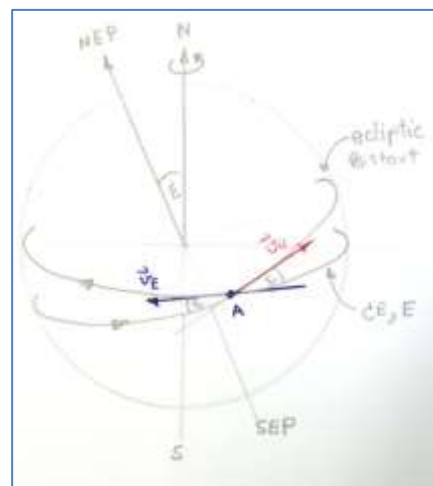
ดังนั้นความเร็วรวมที่ตัดกับเส้นศูนย์สูตรตามโจทย์กำหนดคือ

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_E = V \cdot [(\cos \varepsilon - 1) \cdot \hat{j} + (\sin \varepsilon) \hat{k}] \quad (5)$$

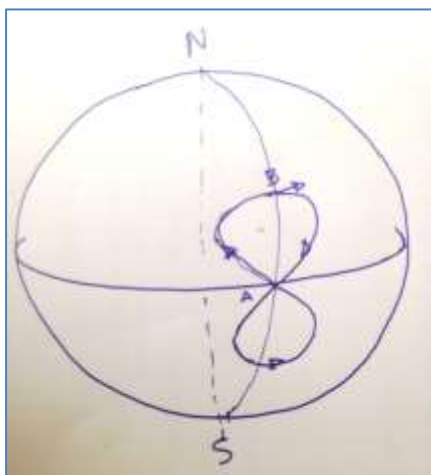
ถ้ากำหนดให้ a คือมุมทิศ (azimuth) ขนาดและทิศทางของความเร็วลัพธ์จึงเป็นคำตอบดังที่เขียนไว้ในเอกสารอ้างอิง [1], [2] ดังนี้

$$\begin{aligned} |\vec{v}_a|^2 &= V^2 \cdot [(1 - \cos \varepsilon)^2 + \sin^2 \varepsilon] \\ &= V^2 \cdot [2(1 - \cos \varepsilon)] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{\vec{v}_a}{|\vec{v}_a|} \cdot \hat{k} = \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{2(1 - \cos \varepsilon)}} \\ a &= 360^\circ - \arccos \left(\frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{2(1 - \cos \varepsilon)}} \right) \end{aligned}$$



(ก) ทิศทางของอัตราเร็วที่เส้นศูนย์สูตร



(ข) เส้นทางการเคลื่อนที่ตามเกลียว IOAA

รูปที่ 2 ภาพร่างแสดงตำแหน่งเริ่มต้นและเส้นทางการเดินทาง สำหรับเส้นทางการโคจรในกรณีเฉพาะดังกล่าวมานี้ สามารถหาได้โดยพิจารณาให้ผู้สังเกตออกเดินทางจากจุด A ดังรูปที่ 2 (ก) สังเกตว่าในขณะที่ชั่วเหินสุริยวิถี (NEP) และชั่วได้สุริยคติ (SEP) อยู่ในระนาบ yz เนื่องจากโลกหมุนรอบตัวเองจากทิศตะวันตกไปทิศตะวันออกดังแสดงในรูป กำหนดให้ระบบพิกัดที่ใช้ขึ้นตั้งอยู่กับผิวโลก ทรงกลมท้องฟ้าจึงหมุนรอบตัวเองจากทิศตะวันออกไปทิศตะวันตกแทน

สังเกตว่าความเร็วลัพธ์นี้จะชี้ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ ทั้งนี้เป็นเพราะองค์ประกอบตามแนวแกน y ความเร็ว $\vec{v}_E$ มีขนาดมากกว่าองค์ประกอบในแนวแกน y ของ $\vec{v}_E$ และจากความรู้ที่ว่าทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุในขณะหนึ่งคือทิศของความเร็วลัพธ์ในขณะนั้นจะได้ว่าที่จุด A ผู้สังเกตจะเริ่มเดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือดังแสดงในรูปที่ 2 (ข)

สังเกตว่าเมื่อผู้สังเกตเคลื่อนที่ขึ้นไปทางซีกเหนือขึ้นเมื่อละติจูดเพิ่มขึ้นนั้น ความเร็วในแนวขนานกับเส้นศูนย์สูตร $\vec{v}_E$ จะมีขนาดลดลงตามสมการ (3) ในขณะที่ $\vec{v}_E$ มีขนาดคงเดิมโดยที่เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{e}$ มีทิศทางขนานกับเส้นศูนย์สูตรมากขึ้นเรื่อย ๆ ดังนั้นที่ละติจูดหนึ่งองค์ประกอบของความเร็วในแนวขนานกับเส้นศูนย์สูตรจะหักล้างกันเป็นศูนย์ซึ่งทำให้ทิศทางของความเร็วลัพธ์วกกลับเข้าหาแนวเส้นเหนือได้ จุดวกกลับนี้ยังไม่สามารถคำนวณหาได้ในขณะนี้เพราะเวกเตอร์ $\hat{e}$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

เมื่อเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมงดาราคติ ทิศของเวกเตอร์ $\vec{v}_E$ จะวกกลับมาเป็นทิศตะวันออก และแกนสุริยวิถีจะอยู่ในระนาบ xz

ทำให้เวกเตอร์ $\hat{e}$ มีทิศทางขนานกับเส้นศูนย์สูตรไปทางตะวันออกด้วยเช่นกัน เนื่องจากองค์ประกอบของเวกเตอร์ลัพธ์ตามแนวทิศเหนือขึ้นกับ $\vec{v}_E$ เท่านั้นตำแหน่งละติจูดขณะนั้นจึงเท่ากับละติจูดสูงสุดของเส้นสุริยวิถีซึ่งก็คือ ε นั่นเอง ดังนั้นที่จุด B ในรูป (ข) จึงมีละติจูดเท่ากับ ε ด้วยเช่นกัน เมื่อผ่านจุด B ไปแล้วผู้สังเกตจะต้องเดินทางเข้าหาเส้นศูนย์สูตรเนื่องจากเวกเตอร์ $\vec{v}_E$ มีองค์ประกอบตามแนวเหนือใต้เป็นลบ จนเมื่อผู้สังเกตกลับมาถึงจุด A นักเดินทางจะเดินทางกลับมาทางซีกโลกได้อีกครั้งหนึ่ง และเมื่อพิจารณาเช่นนี้เรื่อยไป จะได้เส้นทางดังรูปที่ 2 (ข) ที่มีลักษณะคล้ายกับเลข 8 หรือเส้นแอนาเล็มมา (analemma) ดังคำเฉลยในเอกสาร [1], [2] นั่นเอง

ปัญหาของการวิเคราะห์เชิงคุณภาพ

การวิเคราะห์ดังที่กล่าวมานี้จะเห็นได้ว่าวิธีที่ใช้ในการหาคำตอบจากการแข่งขัน เป็นการวิเคราะห์เชิงคุณภาพภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นที่เฉพาะเจาะจงอย่างมาก กล่าวคือผู้สังเกตต้องออกเดินทางที่เส้นศูนย์สูตร ในเวลาที่เวลาดาราคติท้องถิ่นเป็นศูนย์พอดีเท่านั้น เพื่อให้เคลื่อนที่ตามแนวเส้นสุริยวิถีที่เคลื่อนไปตามการหมุนของโลกได้ตามต้องการ ในกรณีที่ตำแหน่งและเวลาดาราคติเริ่มต้นไม่ได้เป็นเช่นนี้การวิเคราะห์เชิงคุณภาพเช่นนี้แทบจะทำได้ไม่เลย เพราะความเร็วลัพธ์นอกจากขึ้นกับเวลายังขึ้นกับตำแหน่งอีกด้วย

ด้วยเหตุนี้จึงเกิดข้อสงสัยถึงความถูกต้องและความแม่นยำของวิธีการวิเคราะห์เช่นนี้ และถ้าหากเงื่อนไขเริ่มต้นเปลี่ยนไปแล้วเส้นทางการเดินทางจะยังคงมีลักษณะเป็นแอนาเล็มมาเช่นนี้หรือไม่

การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์อาจทำได้โดยการหาปริพันธ์ (integrate) ของสมการการเคลื่อนที่ (2) และ (3) ทำได้ยากมาก แต่ถ้าการหาตำแหน่งที่เวลาต่าง ๆ อาจใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) โดยการหาปริพันธ์ของความเร็วในเวลาสั้น ๆ จนครบ 1 วันดาราคติ แต่ทั้งนี้เรายังไม่อาจเชื่อมั่นได้เต็มที่เนื่องจากการหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขขึ้นกับการแบ่งช่วงเวลาให้เหมาะสม ถ้าหากคำนวณ โดยข้ามจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางอย่างกะทันหัน รวมทั้งปัญหาการสะสมความคลาดเคลื่อน (accumulation of error) ก็จะทำให้เกิดความผิดพลาดได้เป็นอย่างมาก ด้วยเหตุนี้จึงขอนำเสนอวิธีแก้ปัญหาก็แตกต่างออกไปโดยใช้วิธีการที่เป็นธรรมชาติมากกว่าคือใช้เมตริกซ์การหมุนดังต่อไปนี้

เมตริกซ์การหมุน

ในสองมิติโดยใช้เรขาคณิตหรือการวิเคราะห์ เวกเตอร์จะพบว่า เวกเตอร์ $\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j}$ เมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ จะได้เวกเตอร์ใหม่ $\vec{r}' = x' \cdot \hat{i} + y' \cdot \hat{j}$ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

สมการเวกเตอร์ทางขวามือแสดงว่าเมื่อเราเขียนเวกเตอร์ในรูปเมตริกซ์หลัก (column matrix) เวกเตอร์ที่ได้จากการหมุนเกิดจากการนำเวกเตอร์เดิมไปคูณกับเมตริกซ์ตัวหนึ่งดังนี้

$$\vec{r}' = \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \vec{r}$$

เมตริกซ์

$$\mathbf{R}_z(\theta)$$

เรียกว่า เมตริกซ์การหมุน (rotational matrix) ตัวห้อยที่เขียนว่า z หมายถึงการหมุนรอบแกน และ θ คือ มุมในการหมุนจะมีค่าเป็นบวกเมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกา และเป็นลบเมื่อหมุนตามเข็มนาฬิกา

การหมุนรอบแกนในสามมิติทำได้โดยการขยายแนวคิดนี้ เวกเตอร์ $\vec{r}$ ยังคงเขียนได้ด้วยเมตริกซ์หลักเช่นเดิมแต่มีองค์ประกอบในแนวแกน z เพิ่มขึ้นมา เนื่องจากองค์ประกอบ z' ของเวกเตอร์ใหม่ $\vec{r}'$ ยังคงเหมือนกับเวกเตอร์เดิม จะได้ว่าเมื่อหมุนเวกเตอร์ $\vec{r}$ รอบแกน z ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ จะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

สมการที่ (5) ยังคงเป็นความจริงแม้ว่าจะเป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ในการหมุนเวกเตอร์ในทิศทวนเข็มนาฬิการอบแกน x, y, z ตามทฤษฎีมือขวา ก็ทำในลักษณะเดียวกันเมตริกซ์การหมุนรอบแกนแต่ละแกนจะเป็นตามลำดับดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(\theta) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_y(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_z(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

การหมุนแกนสามารถกระทำได้เช่นนี้ต่อเนื่องกันไปตามลำดับ ซึ่งทำได้โดยการคูณเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการหมุนเวกเตอร์หนึ่งรอบแกน x, y, z เป็นมุม α, β, γ ตามลำดับจะได้ว่า

$$\vec{r}' = \{\mathbf{R}_z(\gamma) \times \mathbf{R}_y(\beta) \times \mathbf{R}_x(\alpha)\} \cdot \vec{r} = \mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \vec{r}$$

การที่เขียนในลักษณะนี้ได้เป็นเพราะเมตริกซ์มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative property) แม้ว่าจะไม่มีสมบัติการสลับที่ (commutative property) ก็ตาม

สังเกตว่าเมตริกซ์การหมุนนี้มีลักษณะเป็นธรรมชาติและเหมาะสมกับปัญหาที่กำลังพูดถึงนี้ เพราะการเคลื่อนที่บนผิวทรงกลมโลกของผู้สังเกตอาจมองได้ว่าเป็นการเปลี่ยนเวกเตอร์การหมุนนั่นเอง การใช้งานเมตริกซ์การหมุนสามารถใช้ได้เสมอไม่ว่าผู้สังเกตจะเคลื่อนที่ในวงกลมใหญ่ (ในที่นี้คือเส้นสุริยวิถีที่ขาลงบนผิวโลกและเส้นศูนย์สูตร) หรือเคลื่อนที่บนเส้นขนานกับวงกลมใหญ่

การหาคำตอบด้วยเมตริกซ์การหมุน

ในการแก้ปัญหาที่ขอกำหนดระบบพิกัดเทียบกับตำแหน่งบนพื้นโลก โดยถือว่าโลกอยู่นิ่งที่ศูนย์กลางของระบบพิกัด ดังนั้นทรงกลมท้องฟ้าหมุนจะตามเข็มนาฬิกาจากทิศตะวันออกไปทิศตะวันตก แกน z ขนานกับแกนโลกและชี้ไปยังทิศเดียวกับขั้วโลกเหนือ (north pole) และขั้วฟ้าเหนือ (NCP) ดังนั้นระนาบ xy จึงเป็นระนาบเดียวกันกับเส้นศูนย์สูตรโลก (equator) และเส้นศูนย์สูตรฟ้า (CE) ตามลำดับ

⁷ เวลาดาราคติท้องถิ่น (local sidereal time - LST) หมายถึง มุมที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมท้องฟ้า โดยวัดตามแนวเส้นศูนย์สูตรฟ้า (CE) ไปทางทิศตะวันตก จากเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตยังจุดควอดรันตนิมิต นิยมใช้หน่วยเป็นชั่วโมงโดยเทียบให้ 24 ชั่วโมงเท่ากับ 360°

⁸ เส้นเมริเดียนท้องถิ่น (local meridian) หมายถึง เส้นสมมุติที่ลากจากทิศเหนือผ่านจุดเหนือศีรษะของผู้สังเกต (zenith) ไปยังทิศใต้

เพื่อความสะดวกกำหนดให้รัศมีของโลกเท่ากับ 1 หน่วย และระยะทาง d ที่ใช้ในพิกัดนี้คืออัตราส่วนระหว่างระยะทางจริง D ต่อรัศมีของโลก R กล่าวคือ

$$d = \frac{D}{R} \quad (9)$$

กำหนดให้ขณะเริ่มเดินทาง ($t = 0$) แกน x ชี้ไปยังจุดควอดรันตวิวัต ในขณะนั้น ซึ่งสอดคล้องกับตำแหน่งหนึ่งบนพื้นโลกที่มีลองจิจูด Θ_{ref} และละติจูด $\Phi_{ref} = 0^\circ$ และใช้เป็นตำแหน่งบนผิวโลก $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ เป็นจุดอ้างอิงในการวัดมุมตามพิกัดทรงกลม $(\theta, \phi) = (0^\circ, 0^\circ)$ โดย θ, ϕ วัดตามแนวลองจิจูดและตามแนวละติจูดตามลำดับ โดยการใช้พิกัดเช่นนี้จะเห็นได้ว่าในขณะเริ่มต้น ขั้วเหนือ และขั้วใต้สุริยวิถีจะอยู่ที่ตำแหน่ง (ϕ, θ) คือ $(270^\circ, 90^\circ - \varepsilon)$ และ $(90^\circ, -(90^\circ - \varepsilon))$ ตามลำดับ

ถ้ากำหนดให้ผู้สังเกตเริ่มต้นเดินทางจากพิกัดภูมิศาสตร์ (Θ_0, Φ_0) ในขณะเวลาที่ดาราคติท้องถิ่นเท่ากับ θ_0 เมื่อเวลาผ่านไป t ผู้สังเกตจะอยู่ตำแหน่ง (Θ, Φ) ใดบนโลกเพื่อที่จะทำให้มองเห็นวัตถุท้องฟ้าเคลื่อนที่รอบขั้วสุริยวิถีตามเข็มนาฬิกาด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ของโลกซึ่งมีคาบเท่ากับ 1 วันดาราคติเฉลี่ย ขณะเริ่มต้นเดินทางเส้นเมริเดียนท้องถิ่น* ของผู้สังเกตจะตรงกับเส้นลองจิจูด จากนั้นยามของเวลาดาราคติจะได้ว่า $\Theta_0 = \Theta_{ref} + \theta_0$ ซึ่งทำให้สามารถหาตำแหน่ง $(\Theta_{ref}, \Phi_{ref})$ ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \Theta_{ref} &= \Theta_0 - \theta_0 \\ \Phi_{ref} &= 0^\circ \end{aligned} \quad (6)$$

จะเห็นว่าตำแหน่งเริ่มต้นของการเดินทางอยู่ที่ $(\theta_0, \phi_0) = (\theta_0, \Phi_0)$

ตรงกับพิกัดฉาก (x_0, y_0, z_0) โดยที่

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \phi_0 \cdot \cos \theta_0 \\ y_0 &= \cos \phi_0 \cdot \sin \theta_0 \\ z_0 &= \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (7)$$

ซึ่งเป็นเวกเตอร์แสดงตำแหน่งเริ่มต้นของการเดินทางหรือ $\vec{r}_0$

ตามที่โจทย์กำหนด ถ้าทรงกลมท้องฟ้าอยู่นิ่งผู้สังเกตจะต้องเดินทางทวนเข็มนาฬิกาการรอบแกนสุริยวิถีไปบนเส้นทางที่ขนานกับเส้นสุริยวิถีที่ฉายลงมาบนพื้นโลก ถ้าหากขั้วเหนือสุริยวิถี (NEP) อยู่ในทิศทางแกน z การเดินทางในลักษณะนี้คือการหมุนเวกเตอร์ $\vec{r}_0$ รอบแกน z เมื่อกำหนดมุมการเคลื่อนที่ $\lambda = \omega \cdot t$ จะได้ว่า

$$\vec{r}_1 = \mathbf{R}_z(\lambda) \cdot \vec{r}_0$$

แต่เนื่องจากในความเป็นจริงขั้วเหนือสุริยวิถีทำมุมเท่ากับ ε กับแกน z ในระนาบ xy ดังนั้นจะได้ว่า ตำแหน่งจะต้องหมุนเวกเตอร์นี้ไปเป็นมุม ε รอบแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วย จะได้ว่าเวกเตอร์ที่แสดงตำแหน่งของผู้สังเกตรอบแกนสุริยวิถี ในกรณีที่ท้องฟ้าอยู่นิ่งเป็นดังนี้

$$\vec{r}_2 = \mathbf{R}_x(\varepsilon) \cdot \vec{r}_1 = \mathbf{R}_x(\varepsilon) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda) \cdot \vec{r}_0$$

สังเกตว่าการหมุนจะสลับที่กันไม่ได้ เพราะจะทำให้ตำแหน่งเริ่มต้นเปลี่ยนไป

แต่เนื่องจากทรงกลมท้องฟ้าหมุนรอบแกน z ซึ่งชี้ไปยังขั้วฟ้าเหนือ (NCP) จึงทำให้ขั้วเหนือสุริยวิถี (NEP) และระนาบสุริยวิถีหมุนตามไปด้วย เมื่อเวลาเปลี่ยนไป t ขั้วเหนือสุริยวิถีจะเปลี่ยนไปเป็นมุม $\lambda = \omega \cdot t$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งหมายความว่า จะต้องหมุนเวกเตอร์ $\vec{r}_2$ รอบแกน z ไปเป็นมุม λ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยเช่นกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \mathbf{R}_z(-\lambda) \cdot \vec{r}_2 \\ &= \{\mathbf{R}_z(-\lambda) \cdot \mathbf{R}_x(\varepsilon) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda)\} \cdot \vec{r}_0 \\ &= \mathbf{R}(\lambda) \cdot \vec{r}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

เมื่อ $\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{R}_z(-\lambda) \cdot \mathbf{R}_x(\varepsilon) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda)$ คือเวกเตอร์การหมุนรวมทั้งหมด ซึ่งเมื่อแทนเวกเตอร์การหมุนในแกนต่างๆ จากสมการที่

Error! Reference source not found. จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda) &= \mathbf{R}_z(-\lambda) \cdot \mathbf{R}_x(\varepsilon) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda \cos \varepsilon & (\cos \varepsilon - 1) \sin \lambda \cos \lambda & -\sin \varepsilon \sin \lambda \\ (\cos \varepsilon - 1) \sin \lambda \cos \lambda & \sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \cos \lambda \\ \sin \varepsilon \sin \lambda & \sin \varepsilon \cos \lambda & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 + (\cos \varepsilon - 1) \sin^2 \lambda & \frac{1}{2} (\cos \varepsilon - 1) \sin 2\lambda & -\sin \varepsilon \sin \lambda \\ \frac{1}{2} (\cos \varepsilon - 1) \sin 2\lambda & 1 + (\cos \varepsilon - 1) \cos^2 \lambda & -\sin \varepsilon \cos \lambda \\ \sin \varepsilon \sin \lambda & \sin \varepsilon \cos \lambda & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \quad (9)$$

สมการ (8) และ (9) นี้คือสมการที่ใช้หาตำแหน่งของผู้สังเกต $\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$ ที่เวลาต่างๆ ในระบบพิกัดนี้ ซึ่งถ้าต้องการเปลี่ยนเป็นพิกัดทรงกลม (ϕ, θ) ก็จะสามารถคำนวณได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\theta = \arctan \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \phi = \arcsin z \quad (10)$$

และถ้าต้องการเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Θ, Φ) ก็ทำได้ง่ายๆ โดยการเพียงนำตำแหน่งพิกัดภูมิศาสตร์อ้างอิง $(\Theta_{ref}, \Phi_{ref})$ ที่หาได้จากสมการ (6) มาบวกกับพิกัดทรงกลม (ϕ, θ) ของเวกเตอร์ดังกล่าว (10) ได้คือ

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_{ref} + \theta \\ \Phi &= \phi \end{aligned} \quad (11)$$

จากสมการที่ (8) เราสามารถหาความเร็วของการเคลื่อนที่ที่เวลา t ต่างๆ ได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} \mathbf{R}(\lambda) \cdot \vec{r}_0 \\ &= \frac{d\mathbf{R}(\lambda)}{dt} \cdot \vec{r}_0 + \mathbf{R}(\lambda) \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt} \end{aligned}$$

แต่เนื่องจากเวกเตอร์ $\vec{r}_0$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้นเทอมที่สองทางขวามือจึงเป็นศูนย์ ซึ่งจะได้ว่า

$$\vec{v} = \frac{d\mathbf{R}(\lambda)}{dt} \cdot \vec{r}_0 = \left(\frac{d\mathbf{R}(\lambda)}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt} \right) \cdot \vec{r}_0 = \omega (\mathbf{R}'(\lambda) \cdot \vec{r}_0) \quad (12)$$

จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$\mathbf{R}'(\lambda) = \begin{bmatrix} (\cos \varepsilon - 1) \sin 2\lambda & (\cos \varepsilon - 1) \cos 2\lambda & -\sin \varepsilon \cdot \cos \lambda \\ (\cos \varepsilon - 1) \cos 2\lambda & -(\cos \varepsilon - 1) \sin 2\lambda & \sin \varepsilon \cdot \sin \lambda \\ \sin \varepsilon \cdot \cos \lambda & -\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ถ้า ω ใช้หน่วยเป็นเรเดียนต่อชั่วโมง เมื่อต้องการแปลงเป็นความเร็วในหน่วยระยะทางเป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมงก็เพียงแต่นำรัศมีเฉลี่ยของโลก R มาคูณ ดังสมการที่

Error! Reference source not found.

สำหรับการหาทิศทางของการเคลื่อนที่รวมทั้งองค์ประกอบของความเร็วที่ตำแหน่ง (ϕ, θ) สามารถหาได้โดยพิจารณาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวรัศมี $\hat{r}(\phi, \theta)$ ของระบบพิกัดที่ตำแหน่ง (ϕ, θ) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\hat{r}(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cdot \cos \theta \\ \cos \phi \cdot \sin \theta \\ \sin \phi \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวตะวันออกตะวันตก $\hat{e}_\theta$ และแนวเหนือใต้ $\hat{e}_\phi$ จะหาได้จากอนุพัทธ์ดังนี้

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \rightarrow \hat{e}_\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{|\vec{e}_\theta|} = -\sin \theta \cdot \hat{i} + \cos \theta \cdot \hat{j} \quad (14)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \rightarrow \hat{e}_\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{|\vec{e}_\phi|} = -\sin \phi (\cos \theta \cdot \hat{i} + \sin \theta \cdot \hat{j}) + \cos \phi \cdot \hat{k}$$

องค์ประกอบของความเร็วตามแนวตะวันออกตะวันตก $\hat{e}_\theta$ และแนวเหนือใต้ $\hat{e}_\phi$ จึงหาได้จากผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ระหว่างเวกเตอร์ความเร็วที่ตำแหน่งนั้นดังนี้

$$v_\theta = \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta ; v_\phi = \vec{v} \cdot \vec{e}_\phi \quad (15)$$

และมุมทิศ α ของการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนผิวโลกสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ที่ว่า

$$v \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{e}_\phi = v_\phi \quad (16)$$

ผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่

เมื่อกรณีเฉพาะตามคำถามที่ 1 ให้มาจะได้ว่า ตำแหน่งเริ่มต้นที่จุด A ในรูปที่ 2 สามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)$ เมื่อแทนลงในสมการ (8) โดยอาศัยเมตริกซ์การหมุนในสมการที่ (9) จะได้ว่าตำแหน่งของผู้สังเกตที่เวลา t เมื่อ $\lambda = \omega \cdot t$ เป็นดังนี้

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 + (\cos \varepsilon - 1) \sin^2 \lambda \\ \frac{1}{2} (\cos \varepsilon - 1) \sin 2\lambda \\ \sin \varepsilon \cdot \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (17)$$

ซึ่งเมื่อคำนวณตำแหน่งเมื่อเวลาเปลี่ยนไปครั้งละหนึ่งชั่วโมงกราฟาคติโดยใช้ภาษาเดลฟี (Delphi) และนำข้อมูลมาพล็อตกราฟด้วยโปรแกรมออริจิน (Origin) จะเป็นดังรูปที่ 3 ซึ่งสอดคล้องกับค่าเฉลี่ยในรูปที่ 2 (ข)

เมื่อพิจารณาความเร็วจากสมการที่ (12) เมื่อ $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)$ และ $\lambda = 0$ จะได้ว่า

$$\vec{v} = \omega \begin{bmatrix} (\cos \varepsilon - 1) \sin 2\lambda \\ (\cos \varepsilon - 1) \cos 2\lambda \\ \sin \varepsilon \cdot \cos \lambda \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varepsilon - 1 \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (18)$$

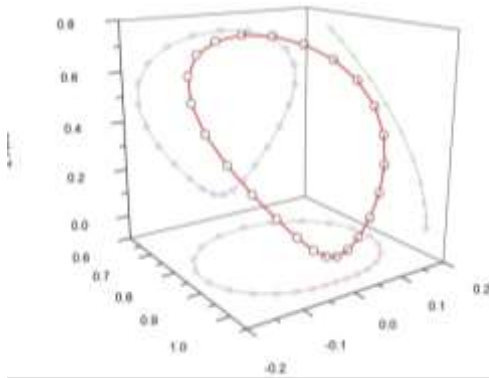
ดังนั้นซึ่งเมื่อเปลี่ยนหน่วยเป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมง

$$R\vec{v} = R\omega \cdot [(\cos \varepsilon - 1) \cdot \hat{j} + (\sin \varepsilon) \hat{k}] = V \cdot [(\cos \varepsilon - 1) \cdot \hat{j} + (\sin \varepsilon) \hat{k}]$$

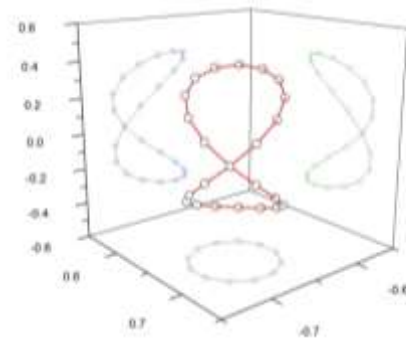
จะเห็นว่าสอดคล้องกับสมการ

Error! Reference source not found. พอดี ซึ่งแสดงให้เห็นว่า

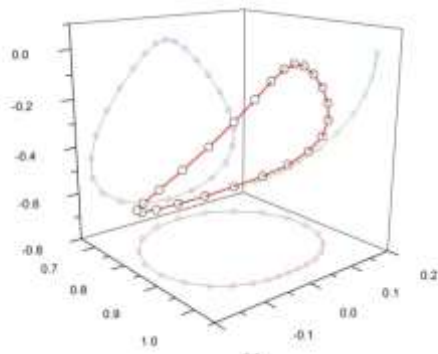
คำตอบของวิธีการใช้เมตริกซ์การหมุนสอดคล้องกับคำตอบของการแข่งขันทุกประการ



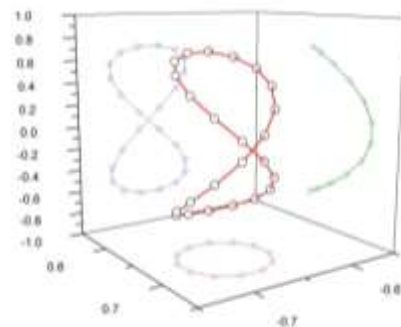
(ก) $(\theta_0, \phi_0) = (0^\circ, +\varepsilon)$



(ค) $(\theta_0, \phi_0) = (+45^\circ, 0^\circ)$

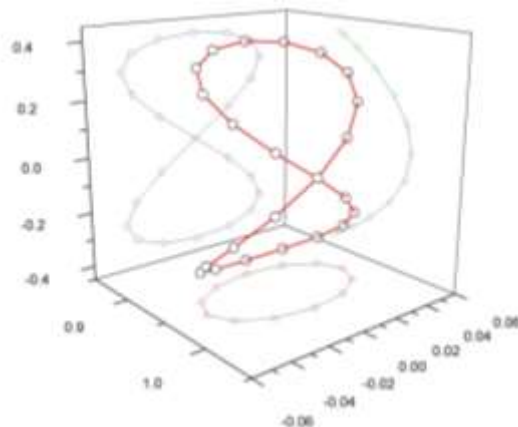


(ข) $(\theta_0, \phi_0) = (0^\circ, -\varepsilon)$



(ง) $(\theta_0, \phi_0) = (-45^\circ, 0^\circ)$

รูปที่ 4 เส้นทางเดินบนผิวโลกเมื่อจุดเริ่มต้นอยู่ในแนวเหนือใต้และตะวันออกตะวันตกของจุดอ้างอิง



รูปที่ 3 เส้นทางเคลื่อนที่ตามโจทย์ของ IOAA

จากสมการ (18) ยังสามารถทำให้หาจุดวกกลับซึ่งไม่สามารถทำได้โดยใช้การวิเคราะห์เชิงคุณภาพได้ ที่จุดวกกลับองค์ประกอบของเวกเตอร์ความเร็วตามแนวแกน y จะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นเมื่อ ω และ ε คงที่ $\cos 2\lambda = 0$ ซึ่งจะเป็นไปได้เมื่อ $2\lambda = m\frac{\pi}{2} \rightarrow \lambda = m\left(\frac{\pi}{4}\right)$ โดยที่ m เป็นจำนวนคี่ ซึ่งตรงกับเวลา $t = m\left(\frac{T}{8}\right)$ ซึ่งในที่นี้ตรงกับ 3, 9, 15, 21 ชั่วโมงตามลำดับสอดคล้อง

ล้องกับรูปที่ 3 ซึ่งเมื่อแทนค่าลงในสมการ (17) จะได้ตำแหน่งที่เป็นจุดวกกลับคือ

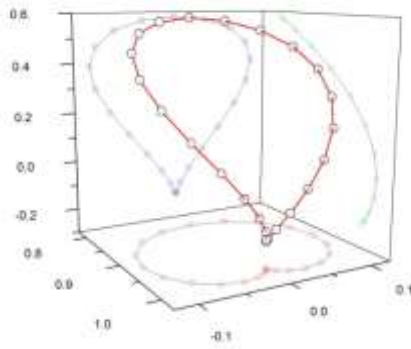
$$\vec{r}_r\left(\lambda = \frac{m\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon + 1 \\ \pm(\cos \varepsilon - 1) \\ \pm\sqrt{2} \sin \varepsilon \end{bmatrix}$$

ซึ่งจากสมการ (10) จะได้ว่าจุดวกกลับอยู่ที่ละติจูด $\phi = \pm \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varepsilon\right) = 16^\circ 20' 9.84''$

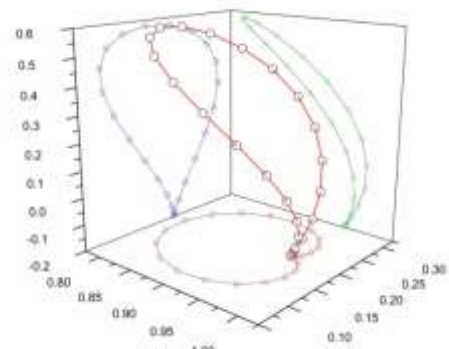
การคำนวณโดยใช้เมตริกซ์การหมุนนี้ยังแสดงให้เห็นถึงเส้นทางบนผิวโลกที่แตกต่างออกไปจากแบบแอนาเล็มมาอีกด้วย เส้นทางจะมีลักษณะเปลี่ยนไป ถ้ากำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นของการเดินทางเปลี่ยนไปจากที่โจทย์กำหนดนี้ดังแสดงในรูปที่ 4 และรูปที่ 5

สรุปผลการวิเคราะห์

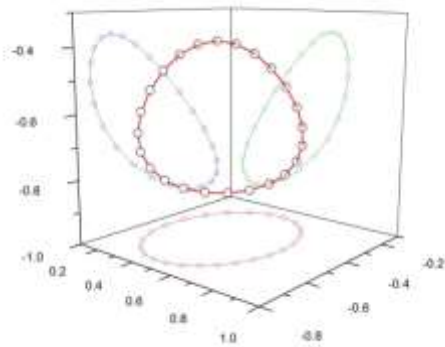
การวิเคราะห์เส้นทางเคลื่อนที่บนผิวโลกจากปัญหาภาคทฤษฎีข้อที่ 13 ในการแข่งขันดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 6 พบว่าการใช้เมตริกซ์การหมุนได้



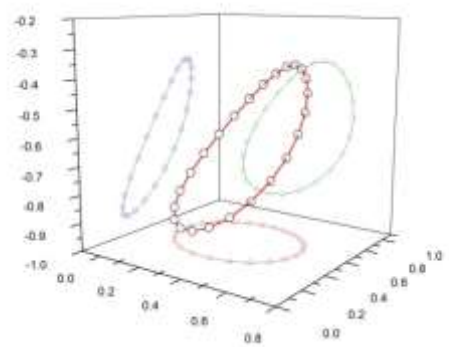
$$(ก) (\theta_0, \phi_0) = (0^\circ, 12^\circ)$$



$$(ค) (\theta_0, \phi_0) = (12^\circ, 12^\circ)$$



$$(ข) (\theta_0, \phi_0) = (-45^\circ, -45^\circ)$$



$$(ง) (\theta_0, \phi_0) = (60^\circ, -45^\circ)$$

รูปที่ 5 เส้นทางเดินบนผิวโลกเมื่อจุดเริ่มต้นอื่น ๆ

ให้คำตอบทั่วไปได้เป็นอย่างดี วิธีนี้ออกจากจะสามารถที่จะแก้ปัญหากรณีเฉพาะตามที่โจทย์ต้องการได้แล้ว ยังได้แสดงให้เห็นว่าตำแหน่งและและความเร็วที่เวลาต่าง ๆ ขึ้นกับตำแหน่งและเวลาเริ่มต้น ลักษณะเส้นทางบนผิวโลกไม่จำเป็นต้องเป็นรูปแอนาเล็มมาตามที่ได้เคยได้ไว้แต่เพียงอย่างเดียว และยังสามารถคำนวณหาความเร็ว (ทั้งขนาดและทิศทาง) บนผิวโลกที่จุดต่าง ๆ ได้ รวมถึงจุดวกกลับในกรณีเฉพาะตามที่โจทย์กำหนดซึ่งไม่สามารถหาได้โดยการวิเคราะห์เชิงคุณภาพ

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ คณะกรรมการจัดการแข่งขัน โอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ ที่อนุญาตให้แปลและเผยแพร่ข้อสอบเป็นภาษาไทย

ขอขอบคุณ อาจารย์ ดร. สธน วิจารย์วรรณลักษณ์ ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และหัวหน้าทีมตัวแทนประเทศไทยในการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 3 และครั้งที่

6 ที่กรุณาอ่านต้นฉบับให้ความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์กับการเขียนบทความนี้

ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สรศักดิ์ คำนวณพงศ์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ รองหัวหน้าทีมตัวแทนประเทศไทยในการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 8 สำหรับเอกสารอ้างอิง [1] และ [2]

เอกสารอ้างอิง

- [1] Solutions: Celestial Coordinate Systems. In Aniket Sule, eds. A Problem Book in Astronomy and Astrophysics, 115-116. Suceava : Cygnus Publishing House, 2014.
- [2] Sandu, Mihail. Problems 2007-2013 Solutions, Comments, Details, Extensions. translated by Mihaela Iancu. Suceava: Cygnus Publishing House, 2014.

- [3] <http://www.manager.co.th/Science/ViewNews.aspx?NewsID=9550000016487>
- [4] <http://cse.ssl.berkeley.edu/bmendez/ay10/2002/notes/lec2.html>
- [5] <http://astroschool.science.cmu.ac.th/>
- [6] <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth>
- [7] http://en.wikipedia.org/wiki/Octant_%28solid_geometry%29