Journal of Engineering and Digital Technology (JEDT)
Vol.10 No.2 July - December 2022

การวิเคราะห์การแพร่กระจายของโรคด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคปากและเท้าเปื่อยในประเทศไทย

ชะญานุศภัฒค์ รัตนะวรวงศ์*

*สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา, พระนครศรีอยุธยา, ประเทศไทย

*ผู้ประพันธ์บรรณกิจ อีเมล: pormarch@yahoo.co.th

รับต้นฉบับ: 10 ตุลาคม 2565; รับบทความฉบับแก้ไข: 24 พฤศจิกายน 2565; ตอบรับบทความ: 24 พฤศจิกายน 2565
เผยแพร่ออนไลน์: 22 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

โรคปากและเท้าเปื่อยเป็นโรคที่ติดต่อที่เกิดขึ้นในสัตว์พบว่ามีการแพร่ระบาดได้ในช่วงปลายฝนต้นหนาวของทุกปี ซึ่งเกิดจากเชื้อไวรัสแอฟโท มีทั้งหมด 7 ชนิดคือ ชนิด A, O, C, SAT 1, SAT 2, SAT 3 และ Asia 1 สำหรับในประเทศไทยพบเพียง 3 ชนิด คือ ชนิด A, O และ Asia 1 ไวรัสชนิดนี้ถูกพบได้ในสารคัดหลั่งในสัตว์ที่มีการติดเชื้อและยังพบได้ในน้ำนมและน้ำเชื้อในสัตว์ติดเชื้อ ด้วยเล็งเห็นความสำคัญของสถานการณ์การระบาดของโรค ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลรายงานสถานการณ์การระบาดของโรคปากและเท้าเปื่อยในช่วงปี พ.ศ. 2556–2565 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหา โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคปากและเท้าเปื่อย พิจารณาหาจุดสมดุลของแบบจำลองและพิจารณาหาผลเฉลยเชิงตัวเลข พร้อมทั้งหาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะการระบาดไร้โรค และสภาวะการระบาดเรื้อรัง แล้วนำมาแสดงในรูปแบบของค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ซึ่งผลลัพธ์เชิงตัวเลขนำมาวิเคราะห์การควบคุมของโรค และเป็นแนวทางสำหรับลดการระบาดของโรคปากและเท้าเปื่อย

คำสำคัญ **:** ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน จุดสมดุลภายใต้สภาวะการระบาดเรื้อรัง จุดสมดุลภายใต้สภาวะการระบาดไร้โรค ความเสถียรภาพ

Analysis of Disease Spread with Mathematical Models for Foot and Mouth Disease in Thailand

Chayanusaphat Rattanaworawong*

[*]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Phranakhon Si Ayutthaya Rajabhat University, Phra Nakhon Si Ayutthaya, Thailand

*Corresponding Author. E-mail address: pormarch@yahoo.co.th

Received: 10 October 2022; Revised: 24 November 2022; Accepted: 24 November 2022
Published online: 22 December 2022

Abstract

Foot and mouth disease is a contagious disease of animals. It was found that it spreads out in the late rainy season and the early winter in every year. It is caused by seven aphthoviruses: A, O, C, SAT 1, SAT 2, SAT 3 and Asia 1. In Thailand, only three aphthoviruses was found (i.e., A, O and Asia 1). These viruses were found in the secretions, milk and semen of the infected animals. Since the pandemic is significant, we studied the problems from the reports of the pandemic of the foot and mouth disease from 2013–2022, analyzed and searched for the solutions by creating the mathematical model(s) of the foot and mouth disease, finding the balance point(s) of the model(s), considering the numerical results and identifying the conditions of the stability(ies) of disease free equilibrium state and disease endemic equilibrium state. The results were shown in the form of basic reproductive numbers. The numerical results were analyzed for controlling the disease and providing the guidelines for reducing the pandemic of the foot and mouth disease.

***Keywords*:** Basic reproductive numbers, Disease endemic equilibrium state, Disease free equilibrium state, Stability

1) บทนำ

โรคปากและเท้าเปื่อย (Foot and Mouth Disease: FMD) หรือที่นิยมเรียกกันว่า “โรคกีบ” หรือ “โรคเอฟเอ็มดี”เป็นโรคสำคัญที่เกิดขึ้นในสัตว์กีบคู่ อาทิเช่น โค กระบือ แพะ แกะ สุกร เป็นต้น โรคปากและเท้าเปื่อยมีผลกระทบต่อภาคอุตสาหกรรมการผลิตสัตว์และเศรษฐกิจของประเทศไทยเป็นอย่างสูง

โรคปากและเท้าเปื่อย มีสาเหตุมาจากเชื้อไวรัสแอฟโท จัดอยู่ในกลุ่ม Picornavirus ขนาด 28 nm รูปร่างแบบ icosahedral Single-stranded RNA, 8.4 kb ปัจจุบันมีทั้งหมด 7 ชนิด คือ ชนิด A, O, C, SAT 1, SAT 2, SAT 3 และ Asia 1 สำหรับในประเทศไทยพบเพียง 3 ชนิด คือ ชนิด A, O และ Asia 1 ไวรัสชนิดนี้ถูกพบได้ในสัตว์ที่มีการติดเชื้อ และยังพบได้ในน้ำนมและน้ำเชื้อในสัตว์ติดเชื้อนั้นในระยะเวลา 4 วันก่อนที่จะแสดงอาการของการติดเชื้อ สัตว์ที่ฟื้นจากการติดเชื้อยังเป็นพาหะของไวรัสชนิดนี้ด้วย

อาการของสัตว์ที่ได้รับเชื้อโรคปากและเท้าเปื่อย จะพบได้หลังจากมีการรับเชื้อไวรัสไปแล้วประมาณ 2–8 วัน ซึ่งเป็นระยะฟักตัวของเชื้อโรค สัตว์ที่ได้รับเชื้อจะแสดงอาการซึม ไข้สูง น้ำลายไหล มีเม็ดตุ่มใส พุพอง เกิดขึ้นภายในปาก ลิ้น เหงือก เพดานปาก ข้างแก้ม ซอกกีบ ต่อมาเม็ดตุ่มจะแตกเป็นแผล สัตว์แสดงอาการขาเจ็บ เดินกะเผลก น้ำลายไหลมากขึ้น มีแผลในปาก ลิ้น เท้า และหัวนม สัตว์ที่ติดเชื้อแสดงอาการความรุนแรงแตกต่างกันขึ้นอยู่กับภูมิต้านทานโรค ความแข็งแรงของสัตว์ และปริมาณเชื้อโรค โรคปากและเท้าเปื่อยพบอัตราการป่วยค่อนข้างสูง แต่อัตราการเสียชีวิตต่ำ มักพบการเสียชีวิตในลูกสัตว์ขนาดเล็ก ซึ่งเกิดจากสภาวะกล้ามเนื้อหัวใจตายในโคนม อัตราการให้นมจะลดลงและจะหยุดการให้นมในที่สุด ส่วนในสัตว์ที่มีการตั้งครรภ์อาจทำให้เกิดการแท้งคุกคามและยังส่งผลต่อการผสมพันธุ์ครั้งถัดไปอาจจะผสมพันธุ์ไม่ติด สำหรับในโคเนื้อจะส่งผลกระทบต่อการเลี้ยงและการเจริญเติบโตของสัตว์ นอกจากนี้สัตว์บางตัวอาจไม่สามารถกลับมามีผลผลิตได้เหมือนเดิม หากในสัตว์ที่ไม่ได้รับการฉีดวัคซีนจะแสดงอาการรุนแรงและต้องใช้เวลาในการฟื้นฟูสุขภาพนานมาก

สัตว์ที่ได้รับเชื้อชนิด A, O และ Asia 1 จะทำให้สัตว์ป่วยแสดงอาการเหมือนกัน แต่ไม่สามารถให้ภูมิคุ้มกันต่างชนิดได้ นั่นคือถ้าสัตว์ที่ได้รับวัคซีนปากและเท้าเปื่อยชนิด A หรือสัตว์เคยป่วยเป็นโรคปากและเท้าเปื่อยชนิด A มาก่อน สัตว์จะมีภูมิคุ้มกันเฉพาะต่อโรคปากและเท้าเปื่อยชนิด A เท่านั้น แต่จะไม่มีภูมิคุ้มกันต่อโรคปากและเท้าเปื่อยชนิด O หรือชนิด Asia 1 ดังนั้นหากมีโรคปากและเท้าเปื่อยชนิด O หรือชนิด Asia 1 ระบาด สัตว์ก็อาจจะติดโรคปากและเท้าเปื่อยชนิดนี้ได้

การติดต่อและการแพร่กระจายของเชื้อโรค สามารถแพร่กระจายได้โดยการสัมผัสโดยตรง การเคลื่อนย้ายสัตว์พาหะ อาหารที่ปนเปื้อนเชื้อ ส่วนปัจจัยการติดต่อขึ้นอยู่กับปริมาณไวรัสที่สัตว์ได้รับเข้าสู่ร่างกายและทำให้เกิดโรค ความไวต่อการติดโรค เช่น โค กระบือ จะไวต่อการติดเชื้อ สุกรติดเชื้อได้บางสายพันธุ์ แกะติดโรคได้ง่ายแต่ไม่แสดงอาการและระดับภูมิคุ้มกันในตัวสัตว์ที่เกิดจากการฉีดวัคซีน

2) ข้อมูลการวิจัย

สำหรับข้อมูลการระบาดของโรคนี้ พบมีการรายงานสถานการณ์การระบาดของโรคจากศูนย์สารสนเทศเพื่อเฝ้าระวังและควบคุมโรคระบาดสัตว์ สำนักควบคุม ป้องกันและบำบัดโรคสัตว์ กรมปศุสัตว์ ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 : จำนวนรายงานสถานการณ์การระบาดของโรคปากและเท้าเปื่อยในช่วงปี พ.ศ. 2556–2565 แยกเป็นรายปี ข้อมูลถึงเดือน กันยายน 2565

ปี	ชนิด A	ชนิด O	ไม่ทราบชนิด	รวม
2556	23	1	5	29
2557	65	67	33	165
2558	17	126	44	187
2559	42	166	51	259
2560	12	59	21	92
2561	37	60	16	113
2562	22	107	31	160
2563	-	129	46	175
2564	11	15	17	43
2565	11	19	17	47
รวมทั้งหมด	**240**	**749**	**281**	**1,270**

จากข้อมูลรายงานสถานการณ์การระบาดของโรคปากและเท้าเปื่อยในช่วงปี พ.ศ. 2556–2565 พบว่าในประเทศไทยจะพบโรคปากและเท้าเปื่อยชนิด O มากที่สุดและช่วงการระบาดของโรคนี้จะมีมากในช่วงปลายฝนต้นหนาวของทุกปี และปัจจุบันไม่พบว่าชนิด Asia 1 ระบาดในประเทศไทยมาตั้งแต่ต้นปี พ.ศ. 2541 จนกระทั่งทุกวันนี้ [1]–[2]

ได้มีการศึกษาเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคปากและเท้าเปื่อยในปี พ.ศ. 2548 โดย Keeling ได้อธิบายถึง

การนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาการระบาดของโรคเท้าและปากเปื่อย [3] ในปี พ.ศ. 2554 โดย Mushayabasa และคณะ ได้ทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และวิเคราะห์แบบจำลอง [4] แล้วในปี พ.ศ. 2564 โดย Chanchaidechachai และคณะ ได้ศึกษาแบบจำลองเชิงพื้นที่ของการระบาดของโรคปากและเท้าเปื่อย [5] และแบบจำลอง [6]–[9] เป็นแบบจำลองที่ใช้สำหรับการศึกษาโรคเท้าและปากเปื่อย มีการสร้างแบบจำลองในรูปแบบที่ต่างกัน ดูความเสี่ยงในการแพร่ระบาดของโรคภายใต้วิธีการควบคุม และผลกระทบของปัจจัยด้านสิ่งแวดล้อมต่าง ๆ เช่น ฤดูกาล สภาพภูมิอากาศในการระบาด

ด้วยเล็งเห็นความสำคัญของสถานการณ์การระบาดของโรค ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลรายงานสถานการณ์การระบาดของโรคปากและเท้าเปื่อยในช่วงปี พ.ศ. 2556–2565 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหา โดยการปรับปรุงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคปากและเท้าเปื่อยของ S. Mushayabasa ในปี 2544 ทำการวิเคราะห์ความเสถียรภาพภายในและความเสถียรภาพวงกว้างของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ตรวจสอบค่าพารามิเตอร์ที่มีส่งผลต่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ที่เป็นตัวชี้วัดในการที่จะสามารถควบคุมการระบาดของโรคนี้ได้ เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนการระบาด และใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวัง ของศูนย์สารสนเทศเพื่อเฝ้าระวังและควบคุมโรคระบาดสัตว์ สำนักควบคุม ป้องกัน และบำบัดโรคสัตว์ กรมปศุสัตว์

3) การดำเนินงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยจำแนกกลุ่มประชากรของสัตว์ออกเป็น 5 กลุ่ม ได้แก่ ประชากรสัตว์ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรค, ประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้, ประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้, ประชากรสัตว์ที่ฟื้นจากการติดเชื้อ และประชากรสัตว์ที่มีสภาวะภูมิคุ้มกัน ซึ่งจะทำการหาจุดสมดุล เพื่อวิเคราะห์ตัวแบบทางคณิตศาสตร์โดยกำหนดให้ความหมายของสัญลักษณ์ดังตารางที่ 2 [3]–[13]

ตารางที่ 2 : สัญลักษณ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคปากและเท้าเปื่อย

สัญลักษณ์	คำธิบาย
S_{NF}	จำนวนของประชากรสัตว์ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรค
E_{NF}	จำนวนของประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้
I_{NF}	จำนวนของประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้
R_{NF}	จำนวนของประชากรสัตว์ที่ฟื้นจากการติดเชื้อ
V_{NF}	จำนวนของประชากรสัตว์ที่มีสภาวะภูมิคุ้มกัน
N	จำนวนของประชากรสัตว์ทั้งหมด
p	อัตราการเกิดประจำปีของประชากรสัตว์
μ	อัตราการตายโดยธรรมชาติของประชากรสัตว์
σ	อัตราการเปลี่ยนกลุ่มจากกลุ่มประชากรสัตว์ที่ฟื้นจากการติดเชื้อไปกลุ่มประชากรสัตว์ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรค
τ_1	อัตราการฉีดวัคซีน
τ_2	อัตราการลดลงของภูมิคุ้มกัน
q_1	อัตราการแพร่เชื้อ
q_2	อัตราการเปลี่ยนกลุ่มจากกลุ่มประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปกลุ่มประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้
θ	อัตราการเสียชีวิตจากโรค
α	อัตราการฟื้นจากการติดเชื้อ

เราสามารถสร้างระบบสมการเชิงอนุพันธ์เพื่ออธิบายการแพร่กระจายของโรคปากและเท้าเปื่อยได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}S_{NF} = pN - \mu S_{NF} + \sigma R_{NF} + \tau_2 V_{NF} - \tau_1 S_{NF} - q_1 E_{NF} S_{NF} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}E_{NF} = q_1 E_{NF} S_{NF} - \mu E_{NF} - \theta E_{NF} - q_2 E_{NF} I_{NF} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}I_{NF} = q_2 E_{NF} I_{NF} - \mu I_{NF} - \theta I_{NF} - \alpha I_{NF} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}R_{NF} = \alpha I_{NF} - \mu R_{NF} - \sigma R_{NF} \quad 4)$$

$$\frac{d}{dt}V_{NF} = \tau_1 S_{NF} - \tau_2 V_{NF} - \mu V_{NF} - \theta V_{NF} \quad (5)$$

3.1) จุดสมดุล

พิจารณาจุดสมดุล $\left(S_{NF}^{*}, E_{NF}^{*}, I_{NF}^{*}, R_{NF}^{*}, V_{NF}^{*}\right)$ ได้จากการกำหนดให้ขวามือของสมการ (1)–(5) ให้เท่ากับ 0 จะได้จุดสมดุล 2 จุดคือจุดสมดุลภายใต้สภาวะการระบาดไร้โรค

$$E_1\left(\frac{Np(\theta+\mu+\tau_2)}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu\left(\begin{matrix}\theta+\mu\\+\tau_2\end{matrix}\right)},0,0,0,\frac{Np\tau_1}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu\left(\begin{matrix}\theta+\mu\\+\tau_2\end{matrix}\right)}\right)$$

และสภาวะการระบาดเรื้อรัง $E_2\left(S_{NF}^{*}, E_{NF}^{*}, I_{NF}^{*}, R_{NF}^{*}, V_{NF}^{*}\right)$ เมื่อ

$$S_{NF}^{*}=\frac{\left(Npq_2\binom{\mu+}{\sigma}-\alpha\sigma\binom{\theta+}{\mu}\right)\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}}{\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}\right)}$$

$$E_{NF}^{*}=\frac{\alpha+\theta+\mu}{q_2}$$

$$I_{NF}^{*}=\frac{\binom{\mu+}{\sigma}\left(q_1\left(Npq_2-\binom{\theta+}{\mu}\binom{\theta}{+\mu}{+\alpha}\right)\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}-\binom{\theta+}{\mu}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}\right)\right)}{q_2\left(\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)}$$

$$R_{NF}^{*}=\frac{\alpha\left(q_1\left(Npq_2-\binom{\theta+}{\mu}\binom{\theta}{+\mu}{+\alpha}\right)\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}-\binom{\theta+}{\mu}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)}{q_2\left(\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)}$$

$$V_{NF}^{*}=\frac{\tau_1\left(Np(\mu+\sigma)q_2-\alpha\sigma(\theta+\mu)\right)}{\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)}$$

3.2) วิเคราะห์ความเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะการระบาดไร้โรค

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลจะพิจารณาเครื่องหมายของค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ของเมทริกซ์จาโคเบียน จากสมการ (1)–(5) นำมาเขียนในรูปของเมทริกซ์จาโคเบียนได้ดังนี้

$$J_{\left(S_{NF}^{*},E_{NF}^{*},I_{NF}^{*},R_{NF}^{*},V_{NF}^{*}\right)}=\begin{bmatrix}-\mu-\tau_1 & -q_1S_{NF}^{*} & 0 & \sigma & \tau_2\\ -q_1E_{NF}^{*} & & & & \\ q_1E_{NF}^{*} & -\theta-\mu & -q_2E_{NF}^{*} & 0 & 0\\ & -q_2I_{NF}^{*} & & & \\ & +q_1S_{NF}^{*} & & & \\ 0 & q_2I_{NF}^{*} & -\alpha-\theta & 0 & 0\\ & & -\mu+q_2E_{NF}^{*} & & \\ 0 & 0 & \alpha & -\mu & 0\\ & & & -\sigma & \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & -\theta\\ & & & & -\mu\\ & & & & -\tau_2\end{bmatrix} \quad (6)$$

ค่าลักษณะเฉพาะ สามารถหาได้จากผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะ

$$\det(J-\lambda I_5)=0 \quad (7)$$

ความเสถียรภาพภายใต้จุดสมดุล

$$E_1\left(\frac{Np(\theta+\mu+\tau_2)}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}},0,0,0,\frac{Np\tau_1}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}}\right)$$

จากการแก้สมการลักษณะเฉพาะจะได้ค่าลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\lambda_1=-\alpha-\theta-\mu,\ \lambda_2=-\sigma-\mu,$$

$$\lambda_3=\frac{Npq_1(\theta+\mu+\tau_2)-(\theta+\mu)\left((\theta+\mu)\tau_1+\mu(\theta+\mu+\tau_2)\right)}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu(\theta+\mu+\tau_2)},$$

$$\lambda_4=\frac{-\theta-2\mu-\tau_2-\tau_1-\sqrt{\tau_1^2-2\tau_1(\theta-\tau_2)+(\theta+\tau_2)^2}}{2},$$

$$\lambda_5=\frac{-\theta-2\mu-\tau_2-\tau_1+\sqrt{\tau_1^2-2\tau_1(\theta-\tau_2)+(\theta+\tau_2)^2}}{2}$$

ค่าลักษณะเฉพาะข้างต้นมีค่าเป็นลบ เมื่อ

$$\frac{(\theta+\mu)\left((\theta+\mu)\tau_1+\mu(\theta+\mu+\tau_2)\right)}{Npq_1}>\theta+\mu+\tau_2,$$

$$\tau_1^2+(\theta+\tau_2)^2>2\tau_1(\theta-\tau_2)$$

และ $\tau_1^2-2\tau_1(\theta-\tau_2)+(\theta+\tau_2)^2<(\theta+2\mu+\tau_2+\tau_1)^2$

3.3) วิเคราะห์ความเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะการระบาดเรื้อรัง

ความเสถียรภาพภายใต้จุดสมดุล

$E_2\left(S_{NF}^{*},E_{NF}^{*},I_{NF}^{*},R_{NF}^{*},V_{NF}^{*}\right)$ จะได้สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$\lambda^5+b_4\lambda^4+b_3\lambda^3+b_2\lambda^2+b_1\lambda++b_0=0 \quad (8)$$

โดยที่ $b_4=\dfrac{(\alpha+\theta+\mu)q_1+q_2(\theta+3\mu+\sigma+\tau_1+\tau_2)}{q_2}$

$$\begin{aligned}b_3=\frac{1}{q_2\left(\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\alpha}{+\mu}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu}{+\sigma}q_2\left(\binom{\theta}{+\mu}\tau_1\right)\right)}\Bigg(&-q_2\tau_1\tau_2\left(\left(\alpha\mu+\binom{\theta}{+\mu}\binom{\alpha}{+\mu}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu}{+\sigma}q_2\left(\binom{\theta}{+\mu}\tau_1\right)\right)\\ &+\binom{\alpha}{+\theta}{+\mu}q_1^2\left(Npq_2(\mu+\sigma)-\alpha\sigma(\theta+\mu)\right)(\theta+\mu+\tau_2)\\ &+\binom{\alpha}{+\theta}{+\mu}(\mu+\sigma)q_2\left(q_1\left(\binom{\theta}{+\mu}\binom{\alpha}{+\theta}{+\mu}-Npq_2\right)\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\theta}{+\mu}q_2\left((\theta+\mu)\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}\right)\right)\\ &+\left(\binom{\alpha}{+\theta}{+\mu}q_1+q_2\binom{\mu}{+\tau_1}\right)\left(\left(\alpha\mu+\binom{\theta}{+\mu}\binom{\alpha}{+\mu}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu}{+\sigma}q_2\left(\binom{\theta}{+\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)\\ &+\left(\binom{\alpha}{+\theta}{+\mu}q_1+q_2\binom{2\mu}{+\sigma}{+\tau_1}\right)\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\left(\left(\alpha\mu+\binom{\theta}{+\mu}\binom{\alpha}{+\mu}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu}{+\sigma}q_2\left(\binom{\theta}{+\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)\Bigg)\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\sigma\begin{pmatrix}\mu+\\\sigma\end{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}q_1\left(\left(\left(\theta+\mu\right)\left(\alpha+\theta+\mu\right)-Npq_2\right)\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\right)\\+\left(\theta+\mu\right)q_2\left(\left(\theta+\mu\right)\tau_1+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\right)\end{pmatrix}\\+\left(\mu+\sigma\right)^2\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}q_1\\+q_2\begin{pmatrix}\mu\\+\tau_1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\left(\theta+\mu\right)\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\\-Npq_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\left(\theta+\mu\right)q_2\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1\\+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\-\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}q_2\tau_1\tau_2\begin{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\left(\theta+\mu\right)\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}-Npq_2\end{pmatrix}\left(\theta+\mu+\tau_2\right)\\+\left(\theta+\mu\right)q_2\left(\left(\theta+\mu\right)\tau_1+\mu\begin{pmatrix}\theta+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}q_1\\+q_2\begin{pmatrix}\mu\\+\tau_1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\left(\theta+\mu\right)\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\\-Npq_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\left(\theta+\mu\right)q_2\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1\\+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\+\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1^2\left(Npq_2\left(\mu+\sigma\right)-\alpha\sigma\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\left(\theta+\mu\right)\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\\-Npq_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\left(\theta+\mu\right)q_2\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1\\+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\+\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}q_2\begin{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\left(\theta+\mu\right)\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\\-Npq_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\left(\theta+\mu\right)q_2\begin{pmatrix}\left(\theta+\mu\right)\tau_1\\+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}}{q_2\left(\left(\alpha\mu+\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\mu\end{pmatrix}\right)q_1\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}q_2\left(\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\right)\right)}$$

$$b_0 = \frac{\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\\-Npq_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}q_2\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1\\+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}\\+\alpha\begin{pmatrix}\mu\\+2\sigma\end{pmatrix}\end{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}q_2\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1\\+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}}{q_2\left(\left(\alpha\mu+\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\mu\end{pmatrix}\right)q_1\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}q_2\left(\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\right)\right)}$$

$$b_2 = \frac{\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}q_1^2\begin{pmatrix}Npq_2\left(\mu+\sigma\right)\\-\alpha\sigma\left(\theta+\mu\right)\end{pmatrix}\left(\theta+\mu+\tau_2\right)\\+\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}q_2\begin{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\left(\theta+\mu\right)\begin{pmatrix}\alpha+\theta\\+\mu\end{pmatrix}\\-Npq_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\left(\theta+\mu\right)q_2\begin{pmatrix}\left(\theta+\mu\right)\tau_1\\+\mu\begin{pmatrix}\theta+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\+\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\theta\\+\mu\end{pmatrix}q_1\\+q_2\begin{pmatrix}\mu\\+\tau_1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mu\\+\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\mu\end{pmatrix}\end{pmatrix}q_1\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\\+\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}q_2\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1\\+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{pmatrix}}{q_2\left(\left(\alpha\mu+\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\+\mu\end{pmatrix}\right)q_1\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu\\+\sigma\end{pmatrix}q_2\left(\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\end{pmatrix}\tau_1+\mu\begin{pmatrix}\theta\\+\mu\\+\tau_2\end{pmatrix}\right)\right)}$$

ค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ จะมีส่วนจริงเป็นลบ เมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh – Hurwitz ต่อไปนี้

$b_0 > 0, b_4 > 0, b_3 b_4 > b_2, b_0 b_4 + b_2 b_3 b_4 > b_1 b_4^2 + b_2^2,$

$b_0 b_2 b_3 + 2 b_0 b_1 b_4 + b_1 b_2 b_3 b_4 > b_0^2 + b_1 b_2^2 + b_0 b_3^2 b_4 + b_1^2 b_4^2$

ดังนั้นจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีความเสถียรภาพภายในเมื่อ $R_0 > 1$ โดยที่ [8]

$$R_0 = \frac{(\theta + \mu + \tau_2) N p q_1}{\binom{\theta}{+\mu} q_2 \left(\binom{\theta}{+\mu} \tau_1 + \mu \binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2} \right) + q_1^2 \binom{\theta}{+\mu} \binom{\theta}{+\mu}{+\alpha} \binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}}$$

4) ผลการวิจัย

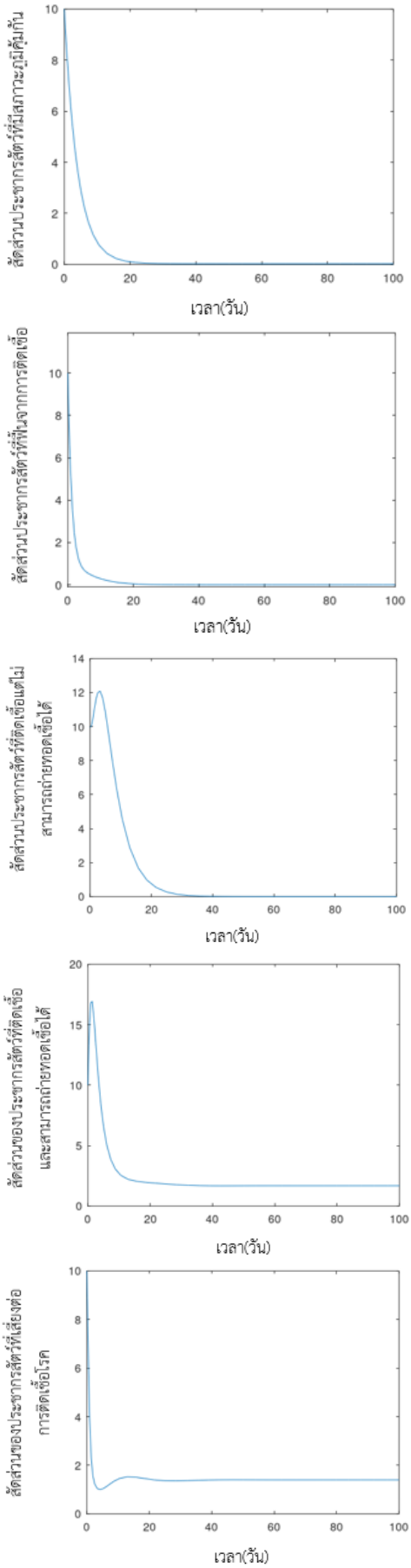
ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ได้จากการรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับโรคปากเท้าเปื่อย ซึ่งแสดงดังตารางที่ 3, 4 และตารางที่ 5 [1]–[2]

ตารางที่ 3 : ค่าพารามิเตอร์ต่างของโรคปากเท้าเปื่อย สำหรับสภาวะการระบาดไร้โรค [1]

สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
N	$1,000$	ตัว
p	$\frac{1}{8*365}$	ต่อตัว ต่อวัน
μ	$\frac{1}{20*365}$	ต่อตัว ต่อวัน
σ	0.799999	ต่อตัว ต่อวัน
τ_1	0.005	ต่อตัว ต่อวัน
τ_2	$\frac{1}{3*7}$	ต่อตัว ต่อวัน
q_1	$\frac{1}{7}$	ต่อตัว ต่อวัน
q_2	0.00005	ต่อตัว ต่อวัน
θ	$\frac{1}{5}$	ต่อตัว ต่อวัน
α	$\frac{1}{4*7}$	ต่อตัว ต่อวัน

จากรูปที่ 1 พบว่าผลเฉลยลู่เข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะการระบาดไร้โรค $E_1 (1.4009589041095891, 0, 0, 0, 2.8272952265)$ โดยที่ $R_0 = 0.00253922$

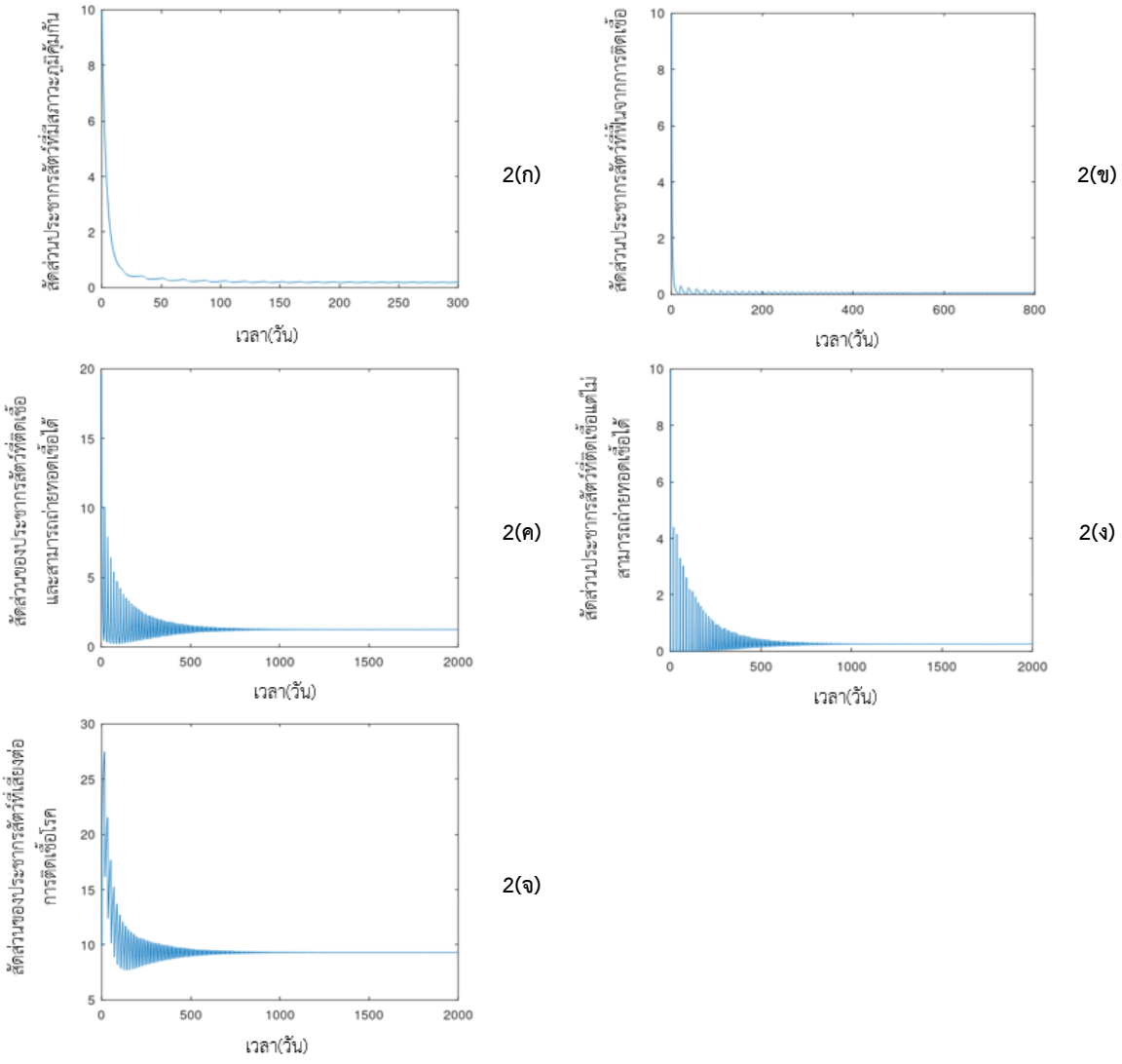
รูปที่ 2 จะเห็นได้ว่าผลเฉลยลู่เข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะการระบาด $E_2 (9.30665, 0.26205, 1.25487, 0.05601, 0.18781)$ โดยที่ $R_0 = 25.7303$ และรูปที่ 3 จะเห็นได้ว่าผลเฉลยลู่เข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะการระบาด $E_2 (1.4803, 1.116, 0.2951, 0.0058, 0.4996)$ โดยที่ $R_0 = 1.00832$



รูปที่ 1 : กราฟแสดงสัดส่วน $S_{NF}, E_{NF}, I_{NF}, R_{NF}, V_{NF}$ เทียบกับเวลา

ตารางที่ 4 : ค่าพารามิเตอร์ต่างของโรคปากเท้าเปื่อย สำหรับสภาวะการระบาดเชื้อรัง

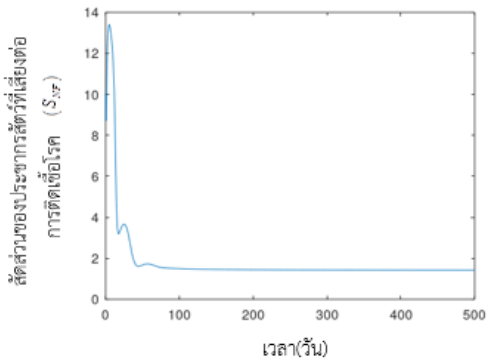
สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
N	$1,000$	ตัว
p	$\frac{1}{8*365}$	ต่อตัว ต่อวัน
μ	$\frac{1}{20*365}$	ต่อตัว ต่อวัน
σ	0.799999	ต่อตัว ต่อวัน
τ_1	0.005	ต่อตัว ต่อวัน
τ_2	$\frac{1}{3*7}$	ต่อตัว ต่อวัน
q_1	$\frac{1}{7}$	ต่อตัว ต่อวัน
q_2	0.9	ต่อตัว ต่อวัน
θ	$\frac{1}{5}$	ต่อตัว ต่อวัน
α	$\frac{1}{4*7}$	ต่อตัว ต่อวัน



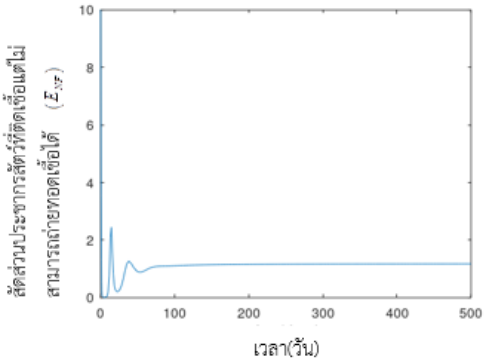
รูปที่ 2 : กราฟแสดงสัดส่วน S_{NF} , E_{NF} , I_{NF} , R_{NF} , V_{NF} เทียบกับเวลา

ตารางที่ 5 : ค่าพารามิเตอร์ต่างของโรคปากเท้าเปื่อย สำหรับสภาวะการระบาดเรื้อรัง

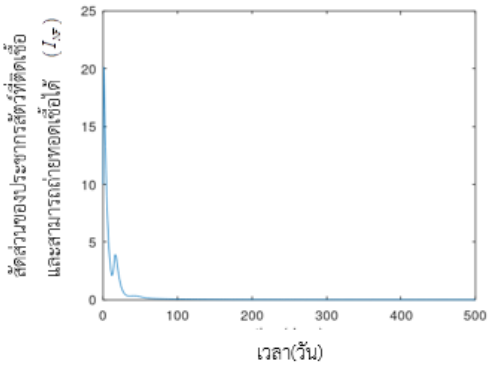
สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
N	$1,000$	ตัว
p	$\frac{1}{8*365}$	ต่อตัว ต่อวัน
μ	$\frac{1}{20*365}$	ต่อตัว ต่อวัน
σ	0.799999	ต่อตัว ต่อวัน
τ_1	0.005	ต่อตัว ต่อวัน
τ_2	$\frac{1}{3*7}$	ต่อตัว ต่อวัน
q_1	$\frac{1}{7}$	ต่อตัว ต่อวัน
q_2	0.0202	ต่อตัว ต่อวัน
θ	$\frac{1}{5}$	ต่อตัว ต่อวัน
α	$\frac{1}{4*7}$	ต่อตัว ต่อวัน



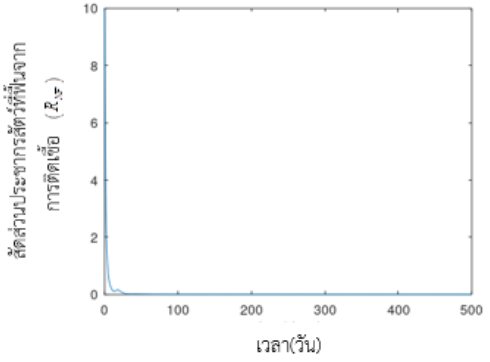
3(ก)



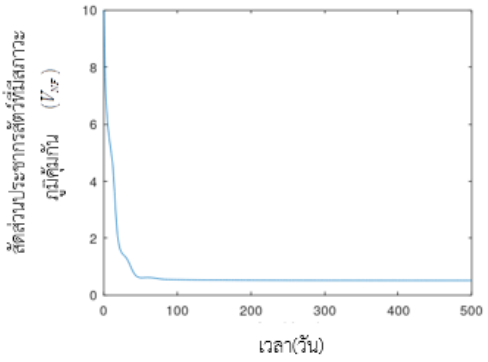
3(ข)



3(ค)

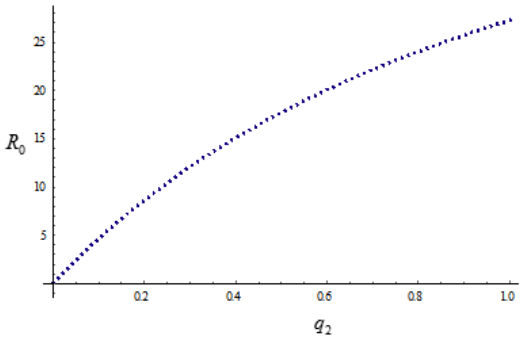


3(ง)



3(จ)

รูปที่ 3 : กราฟแสดงสัดส่วน S_{NF} , E_{NF} , I_{NF} , R_{NF} , V_{NF} เทียบกับเวลา



รูปที่ 4 : กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง q_2 กับ R_0

ในสภาวะการระบาดเรื้อรังในรูปที่ 2 และรูปที่ 3 พบว่าถ้าเปลี่ยนอัตราการเปลี่ยนกลุ่มจากกลุ่มประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปกลุ่มประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จาก $q_2 = 0.9$ ไปเป็น $q_2 = 0.0202$ ส่งผลให้ค่าสืบพันธ์พื้นฐานเข้าใกล้ 1 ดังแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง q_2 กับ R_0 ในรูปที่ 4

5) การหาความเสถียรภาพวงกว้าง

5.1) ทฤษฎีบท 1

ให้ $\mathrm{E}_1\left(\mathrm{S}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{E}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{I}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{R}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{V}^*_{\mathrm{NF}}\right) =$

$$\mathrm{E}_1\left(\frac{Np(\theta+\mu+\tau_2)}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}},0,0,0,\frac{Np\tau_1}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}}\right)$$

ถ้า $R_0 < 1$ จุดสมดุล ณ สภาวะการระบาดไร้โรค จะมีความเสถียรภาพวงกว้างบน $\Omega = \left\{\left(\mathrm{S}_{\mathrm{NF}},\mathrm{E}_{\mathrm{NF}},\mathrm{I}_{\mathrm{NF}},\mathrm{R}_{\mathrm{NF}},\mathrm{V}_{\mathrm{NF}}\right) \in \text{¡}^{5}_{+}\right\}$ ภายใต้เงื่อนไข

$$\mu > p$$
$$pN + \sigma R_{NF} + \tau_2 V_{NF} > (\mu + \tau_1 + q_1 E_{NF}) S_{NF}$$
$$\tau_1 S_{NF} > (\tau_2 + \mu + \theta) V_{NF}$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชันไลปูนอฟ

$$\omega(t) = \left(S_{NF} - S^*_{NF} \ln S_{NF}\right) + I_{NF} + R_{NF} + E_{NF} + \left(V_{NF} - V^*_{NF} \ln V_{NF}\right)$$

จะได้

$$\frac{d\omega}{dt} = S'_{NF}\left(1 - \frac{S^*_{NF}}{S_{NF}}\right) + E'_{NF} + I'_{NF} + R'_{NF} + V'_{NF}\left(1 - \frac{V^*_{NF}}{V_{NF}}\right)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = (pN - \mu S_{NF} + \sigma R_{NF} + \tau_2 V_{NF} - \tau_1 S_{NF} - q_1 E_{NF} S_{NF})\left(1 - \frac{S^*_{NF}}{S_{NF}}\right) + (q_1 E_{NF} S_{NF}$$
$$-\mu E_{NF} - \theta E_{NF} - q_2 E_{NF} I_{NF}) + (q_2 E_{NF} I_{NF} - \mu I_{NF} - \theta I_{NF} - \alpha I_{NF}) + (\alpha I_{NF}$$
$$-\mu R_{NF} - \sigma R_{NF}) + (\tau_1 S_{NF} - \tau_2 V_{NF} - \mu V_{NF} - \theta V_{NF})\left(1 - \frac{V^*_{NF}}{V_{NF}}\right)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = pN - \mu S_{NF} - \mu E_{NF} - \mu I_{NF} - \mu R_{NF} - \mu V_{NF} - \left(\frac{pN}{S_{NF}} - \mu + \frac{\sigma R_{NF}}{S_{NF}} + \frac{\tau_2 V_{NF}}{S_{NF}}\right.$$
$$\left. - \tau_1 - q_1 E_{NF}\right) S^*_{NF} - \theta E_{NF} - \theta I_{NF} - \theta V_{NF} - \left(\frac{\tau_1 S_{NF}}{V_{NF}} - \tau_2 - \mu - \theta\right) V^*_{NF}$$

เนื่องจาก

$$\mathrm{S}^*_{\mathrm{NF}} = \frac{Np(\theta+\mu+\tau_2)}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}}, \mathrm{V}^*_{\mathrm{NF}} = \frac{Np\tau_1}{(\theta+\mu)\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -(\mu - p)N - \left(\frac{pN}{S_{NF}} - \mu + \frac{\sigma R_{NF}}{S_{NF}} + \frac{\tau_2 V_{NF}}{S_{NF}} - \tau_1 - q_1 E_{NF}\right) S^*_{NF}$$
$$-\theta\left(E_{NF} + I_{NF} + V_{NF}\right) - \left(\frac{\tau_1 S_{NF}}{V_{NF}} - \tau_2 - \mu - \theta\right) V^*_{NF}$$

แล้วจะได้ว่า $\frac{d\omega}{dt} < 0$ เมื่อ $\mu > p, \tau_1 S_{NF} > (\tau_2 + \mu + \theta) V_{NF}$

$$pN + \sigma R_{NF} + \tau_2 V_{NF} > (\mu + \tau_1 + q_1 E_{NF}) S_{NF}$$

ดังนั้น $\mathrm{E}_1\left(\mathrm{S}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{E}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{I}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{R}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{V}^*_{\mathrm{NF}}\right)$ มีความเสถียรภาพวงกว้างบน Ω [14], [15]

5.2) ทฤษฎีบท 2

ให้ $\mathrm{E}_2\left(\mathrm{S}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{E}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{I}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{R}^*_{\mathrm{NF}},\mathrm{V}^*_{\mathrm{NF}}\right)$ เมื่อ

$$\mathrm{S}^*_{\mathrm{NF}} = \frac{\left(Npq_2\binom{\mu+}{\sigma} - \alpha\sigma\binom{\theta+}{\mu}\right)\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}}{\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}\right)}$$

$$\mathrm{E}^*_{\mathrm{NF}} = \frac{\alpha+\theta+\mu}{q_2}$$

$$\mathrm{I}^*_{\mathrm{NF}} = \frac{\binom{\mu+}{\sigma}\left(q_1\left(Npq_2 - \binom{\theta+}{\mu}\binom{\theta}{+\mu}{+\alpha}\right)\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2} - \binom{\theta+}{\mu}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1 + \mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)}{q_2\left(\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)}$$

$$\mathrm{R}^*_{\mathrm{NF}} = \frac{\alpha\left(q_1\left(Npq_2 - \binom{\theta+}{\mu}\binom{\theta}{+\mu}{+\alpha}\right)\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2} - \binom{\theta+}{\mu}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1 + \mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)}{q_2\left(\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)\right)}$$

$$\mathrm{V}^*_{\mathrm{NF}} = \frac{\tau_1\left(Np(\mu+\sigma)q_2 - \alpha\sigma(\theta+\mu)\right)}{\left(\alpha\mu+\binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}+\binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1+\mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)}$$

ถ้า $R_0 > 1$ จุดสมดุล ณ สภาวะการระบาดเรื้อรังจะมีความเสถียรภาพวงกว้างบน $\Omega = \left\{\left(\mathrm{S}_{\mathrm{NF}},\mathrm{E}_{\mathrm{NF}},\mathrm{I}_{\mathrm{NF}},\mathrm{R}_{\mathrm{NF}},\mathrm{V}_{\mathrm{NF}}\right) \in \text{¡}^{5}_{+}\right\}$ ภายใต้เงื่อนไข

$$\mu > p$$
$$pN + \sigma R_{NF} + \tau_2 V_{NF} > (\mu + \tau_1 + q_1 E_{NF}) S_{NF}$$
$$\tau_1 S_{NF} > (\tau_2 + \mu + \theta) V_{NF}$$
$$Np(\mu+\sigma)q_2 > \alpha\sigma(\theta+\mu)$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชันไลปูนอฟ

$$\omega(t) = \left(S_{NF} - S^*_{NF} \ln S_{NF}\right) + I_{NF} + R_{NF} + E_{NF} + \left(V_{NF} - V^*_{NF} \ln V_{NF}\right)$$

จะได้

$$\frac{d\omega}{dt} = S'_{NF}\left(1-\frac{S^*_{NF}}{S_{NF}}\right) + E'_{NF} + I'_{NF} + R'_{NF} + V'_{NF}\left(1-\frac{V^*_{NF}}{V_{NF}}\right)$$
$$= pN - \mu S_{NF} - \mu E_{NF} - \mu I_{NF} - \mu R_{NF} - \mu V_{NF}$$
$$-(\frac{pN}{S_{NF}} - \mu + \frac{\sigma R_{NF}}{S_{NF}} + \frac{\tau_2 V_{NF}}{S_{NF}} - \tau_1 - q_1 E_{NF})S^*_{NF}$$
$$-\theta E_{NF} - \theta I_{NF} - \theta V_{NF} - (\frac{\tau_1 S_{NF}}{V_{NF}} - \tau_2 - \mu - \theta)V^*_{NF}$$

เนื่องจาก

$$S^*_{NF} = \frac{\left(Npq_2\binom{\mu+}{\sigma} - \alpha\sigma\binom{\theta+}{\mu}\right)\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}}{\left(\alpha\mu + \binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta+\mu}{+\tau_2} + \binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1 + \mu\binom{\theta+\mu}{+\tau_2}\right)}$$

$$V^*_{NF} = \frac{\tau_1\left(Np(\mu+\sigma)q_2 - \alpha\sigma(\theta+\mu)\right)}{\left(\alpha\mu + \binom{\theta+}{\mu}\binom{\mu+}{\sigma}\right)q_1\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2} + \binom{\mu+}{\sigma}q_2\left(\binom{\theta+}{\mu}\tau_1 + \mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right)}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -(\mu - p)N - \left(\frac{pN}{S_{NF}} - \mu + \frac{\sigma R_{NF}}{S_{NF}} + \frac{\tau_2 V_{NF}}{S_{NF}} - \tau_1 - q_1 E_{NF}\right)S^*_{NF}$$
$$-\theta(E_{NF} + I_{NF} + V_{NF}) - (\frac{\tau_1 S_{NF}}{V_{NF}} - \tau_2 - \mu - \theta)V^*_{NF}$$

แล้วจะได้ว่า $\frac{d\omega}{dt} < 0$ เมื่อ $\mu > p, \tau_1 S_{NF} > (\tau_2 + \mu + \theta)V_{NF}$

$pN + \sigma R_{NF} + \tau_2 V_{NF} > (\mu + \tau_1 + q_1 E_{NF})S_{NF}$

และ $Np(\mu+\sigma)q_2 > \alpha\sigma(\theta+\mu)$

ดังนั้น $E_2\left(S^*_{NF}, E^*_{NF}, I^*_{NF}, R^*_{NF}, V^*_{NF}\right)$ มีความเสถียรภาพวงกว้างบน Ω

6) สรุปผล

ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคเท้าปากเปื่อย เพื่อศึกษาการระบาดของโรคปากเท้าเปื่อยในประเทศไทย โดยรวบรวมข้อมูลจากศูนย์สารสนเทศเพื่อเฝ้าระวังและควบคุมโรคระบาดสัตว์ สำนักควบคุม ป้องกันและบำบัดโรคสัตว์ กรมปศุสัตว์ มาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ของจำนวนประชากรสัตว์ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรค ประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ประชากรสัตว์ที่ฟื้นจากการติดเชื้อ และประชากรสัตว์ที่มีสภาวะภูมิคุ้มกัน

จากการศึกษา พบว่าได้จุดสมดุลทั้งหมดสองจุดคือ จุดสมดุล ณ สภาวะการระบาดไร้โรคและจุดสมดุล ณ สภาวะการบาดเรื้อรังที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของพารามิเตอร์ และได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานคือ

$$R_0 = \frac{(\theta+\mu+\tau_2)Npq_1}{\binom{\theta}{+\mu}q_2\left(\binom{\theta}{+\mu}\tau_1 + \mu\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}\right) + {q_1}^2\binom{\theta}{+\mu}\binom{\theta}{+\mu}{+\alpha}\binom{\theta}{+\mu}{+\tau_2}}$$

พบว่าในสภาวะการระบาดไร้โรคจะเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง $R_0 = 0.00253922 < 1$ และในสภาวะการระบาดเรื้อรังจะเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหนึ่ง $R_0 = 25.7303 > 1$

ภายใต้สภาวะการระบาดเรื้อรังพบว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีผลต่อการลู่เข้าหาจุดสมดุลคือค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่น้อยจะลู่เข้าหาจุดสมดุลเร็วกว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่มาก พารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานคืออัตราการเปลี่ยนกลุ่มจากกลุ่มประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปกลุ่มประชากรสัตว์ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (q_2) การควบคุมโรคเท้าปากเปื่อยสามารถควบคุม q_2 ที่มีผลต่อค่าสืบพันธ์พื้นฐาน หากเกิดการระบาดของโรค ค่าสืบพันธ์พื้นฐานจะมีค่ามากกว่า 1 ควบคุม q_2 ให้เข้าใกล้ 0.0202 ทำให้ค่าสืบพันธ์พื้นฐานเข้าใกล้ 1 จะสามารถทำการควบคุมการระบาดของโรคนี้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

REFERENCES

[1] Bureau of Disease Control and Veterinary Services, Department of Livestock Development, “Epidemic Situation,” (in Thai), 2022. [Online]. Available: http://esmartsur.net/Report_Situation.aspx

[2] T. Yano *et al.*, “Foot and Mouth Disease outbreak in Chiang Mai and Lamphun area during 2007-2011,” (in Thai), *Chiang Mai Vet. J.,* vol. 11, no. 3, pp. 277–287, 2013.

[3] M. J. Keeling, “Models of foot-and-mouth disease,” *Proc. Biol. Sci.,* vol. 272, no. 1569, pp. 1195–1202, Jun. 2005, doi: 10.1098/rspb.2004.3046.

[4] S. Mushayabasa, C. P. Bhunu, and M. Dhlamini, “Impact of vaccination and culling on controlling foot and mouth disease: A mathematical modelling approach,” *World J. Vaccines*, vol. 1, no. 4, pp. 156–161, Nov. 2011, doi: 10.4236/wjv.2011.14016.

[5] T. Chanchaidechachai, M. C. M. de Jong, and E. A. J. Fischer, “Spatial model of foot-and-mouth disease outbreak in an endemic area of Thailand,” *Prev. Vet. Med.*, vol. 195, Oct. 2021, Art. no. 105468.

[6] S. Mushayabasa, D. Posny, and J. Wang, “Modeling the intrinsic dynamics of foot-and-mouth disease,” *Math. Biosci. Eng.*, vol. 13, no. 2, pp. 425–442, Apr. 2016, doi: 10.3934/mbe.2015010.

[7] M. Kobayashi, T. E. Carpenter, B. F. Dickey, and R. E. Howitt, "A dynamic, optimal disease control model for foot-and-mouth-disease: II. Model results and policy implications," *Prev. Vet. Med.*, vol. 79, no. 2–4, pp. 274–286, May 2007, doi: 10.1016/j.prevetmed.2007.01.001.

[8] W. J. Klaring and W. Timischl, "Mathematical models for the spread and control of foot-and-mouth disease during the 1973 epidemic in Austria," *Biom. J.*, vol. 21, no. 7, pp. 675–680, 1979, doi: 10.1002/bimj.4710210711.

[9] F. Mugabi, J. Mugisha, B. Nannyonga, H. Kasumba, and M. Tusiime, "Parameter-dependent transmission dynamics and optimal control of foot and mouth disease in a contaminated environment," *J. Egypt. Math. Soc.*, vol. 27, Dec. 2019, Art. no. 53. doi: 10.1186/s42787-019-0058-1.

[10] A. H. Cabezas, M. W. Sanderson, and V. V. Volkova, "A meta-population model of potential foot-and-mouth disease transmission, clinical manifestation and detection within U.S. Beef Feedlots," *Front. Vet. Sci.*, vol. 7, Sep. 2020, Art. no. 527558, doi: 10.3389/fvets.2020.527558.

[11] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology.* New York, NY, USA: Random House, 1998.

[12] K. Abodayeh, M. S. Arif, A. Raza, M. Rafiq, M. Bibi, and A. Nazeer, "Numerical techniques for stochastic foot and mouth disease epidemic model with the impact of vaccination," *Adv. Differ. Equ.*, Jan. 2020, Art. no. 34.

[13] P. G. Smith, "Concepts of herd protection and immunity," *Proc. Vaccinol.*, vol. 2, no. 2, pp. 134–139, 2010.

[14] T. Changpuek, P. Pongsumpun, and I. M. Tang, "Analysis of mathematical model for swine flu transmission by age group," *Far East J. Math. Sci. (FJMS)*, vol. 73, no. 2, pp. 201–229, 2013.

[15] W. Mumtong, P. Pongsumpun, and I. M. Tang, "Analysis of model for menstrual cycle with the effect of body mass index," *Far East J. Math. Sci. (FJMS)*, vol. 93, no. 2, pp. 243–266, 2014.