

เสถียรภาพกำกับวงกว้างของแบบจำลองการแพร่ระบาดของเชื้อโรค

แบบ เอส อี ไอ อาร์ ที่มีอัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้น

GLOBAL STABILITY OF A SEIR EPIDEMIC MODEL WITH NONLINEAR INCIDENCE RATE

สลิลทิพย์ แดงกองโค^{*} สุภาวดี มีฟองฟู และณรงค์ฤทธิ์ คำชู

Salinthip Daengkongkho^{*}, Supawadee Mifongfoo, and Nalongrid Comchoo

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

^{*}corresponding author e-mail: dsalinthip@psru.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยนี้ได้ศึกษาแบบจำลองการแพร่ระบาดของเชื้อโรคแบบ เอส อี ไอ อาร์ ที่มีอัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งพบว่า ถ้า $R_0 \leq 1$ แล้วจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (P_0) มีเสถียรภาพกำกับวงกว้าง โดยการพิจารณาจากฟังก์ชันไลปูนอฟ และจุดสมดุลที่ติดเชื้อ (P_+) จะมีขอบเขตการมีอยู่ในช่วง $\left(0, \frac{C}{\mu}\right)$

คำสำคัญ: แบบจำลอง เอส อี ไอ อาร์ อัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้น เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับวงกว้าง

Abstract

In this paper we study a SEIR epidemic model with nonlinear incidence rate by determine the conditions $R_0 \leq 1$ of global stability of disease-free equilibrium point (P_0) by Lyapunov function. Moreover, endemic equilibrium point (P_+) bounded on $\left(0, \frac{C}{\mu}\right)$.

Keywords: SEIR model, nonlinear incidence rate, global stability

บทนำ

ในชีวิตประจำวันของคนเราต้องพบกับเชื้อโรคต่างๆ มากมาย ซึ่งโรคหลายชนิดมีสาเหตุมาจากเชื้อไวรัส โดยระดับความรุนแรงของโรคสามารถพิจารณาได้จากความสามารถในการแพร่เชื้อโรคนั้นๆ เช่น โรคเอดส์ ใช้มาลาเลีย เป็นต้น ซึ่งการติดเชืโรคนั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายอย่างเช่น ความสามารถในการแพร่เชื้อของเชื้อไวรัส ความสามารถในการรับเชื้อโรคของผู้ป่วย ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จึงเข้ามามีบทบาทในการศึกษาพฤติกรรมของเชื้อโรคเหล่านี้ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เปรียบเสมือนเครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมและการแพร่ของเชื้อโรค รวมไปถึงสามารถหาแนวทางในการควบคุมการแพร่กระจายของเชื้อโรคเหล่านี้ได้

ในการศึกษาถึงพฤติกรรมและการแพร่กระจายของเชื้อโรคนั้น ได้มีนักวิจัยทำการศึกษากันมานานหลายปี โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ในช่วงแรกๆ จะเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอการแพร่กระจายของเชื้อโรคแบบไม่ซับซ้อนมากนัก

Keshet (1988) ได้ศึกษาเรื่องแบบจำลองการแพร่ระบาดของเชื้อโรค เริ่มพื้นฐานมาจากแบบจำลองการแพร่ระบาดแบบ เอส ไอ อาร์ ริเริ่มคิดโดย Kermack และ Mckendrick ในปี 1927 ได้เสนอแบบจำลองการแพร่กระจายของเชื้อโรค *SIR* แบบพื้นฐาน โดยการศึกษาภายใต้สมมติฐานคือ จำนวนประชากรทั้งหมดไม่มีการเปลี่ยนแปลง นั่นคือไม่มีการเกิดและการตายเกิดขึ้นภายในระบบ และประชากรที่หายจากการติดเชืโรคแล้วจะมีภูมิคุ้มกันถาวรไม่กลับไปติดเชืโรคอีก

Wanbiao et al. (2004) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากร โดยมีอัตราการเกิดตามธรรมชาติและอัตราการตายตามธรรมชาติเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นแบบจำลองการแพร่กระจายของเชื้อโรคที่อธิบายการแพร่กระจายของเชื้อโรคภายใต้สมมติฐานขั้นพื้นฐานคือมีการคำนึงถึงการเกิดตามธรรมชาติ การตายตามธรรมชาติ การติดเชืและการหายจากโรคของประชากรในระบบ และสมมติให้ประชากรที่หายจากการติดเชืโรคมีภูมิคุ้มกันถาวร ไม่กลับไปติดเชืโรคอีก ซึ่งแบบจำลองดังกล่าว ได้ถูกนำมาใช้เป็นพื้นฐานของงานวิจัยระดับที่สูงขึ้นหลาย ๆ งานวิจัย

หลังจากนั้น Li & Jin (2005) ได้ทำการศึกษาแบบจำลองการแพร่กระจายของเชื้อโรคแบบ *SEIR* เมื่อ *E* (Exposed) คือจำนวนประชากรที่ติดเชืโรคแต่ยังไม่แสดงอาการ และ *I* หมายถึงจำนวนประชากรที่ติดเชืโรคที่แสดงอาการ

ต่อมา Li et al., (2006) ได้ทำการศึกษาแบบจำลองของ Kermack และ Mckendrick เพิ่มเติม โดยตั้งสมมติฐานให้มีการย้ายถิ่นเข้ามาเกี่ยวข้อง โดยสมมติให้อัตราของจำนวนประชากรเริ่มต้นทั้งหมดที่เข้ามาในระบบ ณ ช่วงเวลาหนึ่งประกอบด้วยอัตราการเกิดตาม

ธรรมชาติและอัตราการย้ายถิ่นเข้า โดยตั้งสมมติฐานให้ประชากรที่ย้ายถิ่นเข้ามามีกลุ่มของประชากรที่ยังไม่ติดเชื้อโรคและกลุ่มของประชากรที่ติดเชื้อโรคอยู่แล้วแต่ยังไม่แสดงอาการ

Capasso & Serio (1978) และ Connell (2010) กล่าวไว้ว่า อัตราการติดเชื้อเป็นสิ่งสำคัญในแบบจำลองการแพร่เชื้อโรค และมีนักวิจัยหลายท่านได้ให้ข้อเสนอแนะว่ากระบวนการแพร่เชื้อโรคให้เป็นอัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้น ในแบบจำลองการแพร่เชื้อโรคหลาย ๆ งานวิจัยให้ βSI และ $\frac{\beta SI}{N}$ เป็นอัตราการติดเชื้อโรคที่ใช้กันบ่อยโดยที่ βSI ตั้งอยู่บนพื้นฐานของกฎมวลซึ่งจะเหมาะกับโรคที่เกิดจากการติดเชื้อโรค เช่น โรคไข้หวัด โรคหัดหวัด โรคหัดเยอรมัน อื่น ๆ ยกเว้นโรคที่เกิดจากการมีเพศสัมพันธ์ ในขณะที่ $\frac{\beta SI}{N}$ จะเหมาะกับจำนวนประชากรที่มีขนาดใหญ่เพียงพอ ภายหลังจากการศึกษาการแพร่เชื้อหวัด โรค ฌ เกาะบาหลี่ ประเทศอินโดนีเซีย

Capasso & Serio (1978) ได้กล่าวว่า เมื่อปี 1973 ได้นำเสนออัตราการติดเชื้อที่มีความอิ่มตัว $g(I)$ ขึ้นมาในแบบจำลองการแพร่ระบาดของเชื้อโรคที่ซึ่ง $g(I) = \frac{\beta I}{1 + \omega I}$ จะเข้าสู่ความอิ่มตัวเมื่อ I มีขนาดใหญ่ ซึ่งอัตราการติดเชื้อ $g(I)$ มีความสมเหตุสมผลมากกว่าอัตราการติดเชื้อ βSI เนื่องจากว่าอัตราการติดเชื้อแบบ $\frac{\beta I}{1 + \omega I}$ มีขอบเขตของอัตราการติดเชื้อโรคเมื่อประชากรที่ยังไม่เคยติดเชื้อหรือประชากรที่ติดเชื้อโรคแล้วเพิ่มมากขึ้น

ดังนั้น ในบทความวิจัยนี้จะศึกษาแบบจำลองการแพร่ระบาดของเชื้อโรคแบบ เอส อี ไอ อาร์ ที่มีอัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้น $\frac{\beta I}{1 + \omega I}$ โดยจะวิเคราะห์เงื่อนไขที่ทำให้จุดสมดุลไม่มีเชื้อโรคมีเสถียรภาพกำกับวงกว้าง

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาการแพร่ระบาดของเชื้อโรคแบบ เอส อี ไอ อาร์ ที่มีอัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้น ความรู้พื้นฐานนับว่ามีความสำคัญและจำเป็นต่อผู้ที่สนใจ ซึ่งได้แก่ บทนิยามและทฤษฎีบทดังนี้

บทนิยาม 1 [4] แบบจำลอง เอส อี ไอ อาร์ (S, E, I, R) เป็นแบบจำลองที่แบ่งกลุ่มประชากรที่ศึกษาออกเป็น 4 กลุ่มย่อย และกำหนดบทบาทของแต่ละกลุ่มประชากรย่อย ดังนี้

1. กลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible : s) เป็นกลุ่มที่ยังไม่ได้รับเชื้อโรคและมีโอกาสที่จะติดเชื้อได้
2. กลุ่มที่ติดเชื้อแฝง (Exposed : E) เป็นกลุ่มที่ได้รับเชื้อโรค เชื้อโรคแฝงตัวอยู่แต่ไม่แสดงอาการของโรคและมีโอกาสที่จะแพร่เชื้อได้

3. กลุ่มที่ติดเชื้อ (Infectives : I) เป็นกลุ่มที่รับเชื้อโรค แสดงอาการของโรคและสามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้

4. กลุ่มที่หายจากการติดเชื้อ (Recovered : R) เป็นกลุ่มที่ได้รับการรักษาหรือมีภูมิคุ้มกัน

บทนิยาม 2 [2] Basic reproduction number (R_0) หมายถึง จำนวนเฉลี่ยผู้ป่วยรายใหม่ในประชากรที่ไม่มีภูมิคุ้มกันที่เกิดจากผู้ป่วยรายแรกแพร่เชื้อให้

ข้อตกลง อัตราการติดเชื้อด้วยฟังก์ชัน $g(I)$ คือ

$$g(I) = \frac{\beta I}{1 + \omega I}$$

ที่ซึ่ง $\beta I > 0$ คืออัตราที่เชื้อโรคมีความสามารถในการแพร่เชื้อได้

$\frac{1}{(1 + \omega I)} > 0$ คือปริมาณของผลกระทบที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของจำนวน

ประชากรเสี่ยงต่อการติดเชื้อ เมื่อประชากรเสี่ยงต่อการติดเชื้อมีจำนวนประชากรเพิ่มมากขึ้น

บทนิยาม 3 [4] จุดสมดุล (Equilibrium point)

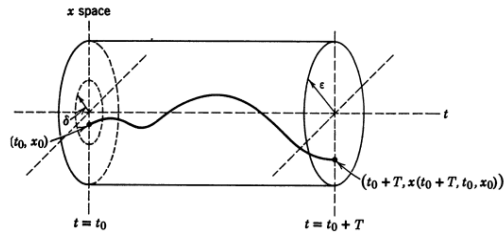
$$\left. \begin{aligned} \dot{w} &= f(w(t), x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{x} &= g(w(t), x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y} &= h(w(t), x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z} &= i(w(t), x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

จุดสมดุลของระบบสมการ (1) คือจุดสมดุล $(\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ที่ทำให้ระบบสมการ (1) เป็น 0 นั่นคือ $f(\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = g(\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = h(\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = i(\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$

บทนิยาม 4 [8] สมมติให้ $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ สำหรับ $\dot{x} = f(t, x)$ และ $f(t, 0) \equiv 0$ ที่ซึ่ง $t \in [0, \infty)$ ผลเฉลย $x = 0$ จะเรียกว่า เสถียรภาพไลปูนอฟ (Lyapunov stable) หรือเสถียรภาพ (stable) ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ และ $t_0 \geq 0$ แล้วจะมี $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ ถ้า $|x_0| < \delta$ แล้ว $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ สำหรับ $t \in [t_0, \infty)$

ผลเฉลย $x = 0$ จะเรียกว่าเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically stable) ถ้าผลเฉลย $x = 0$ เป็นเสถียรภาพ และสำหรับบาง $b = b(t_0)$ ซึ่งถ้า $|x_0| < b$ แล้ว $|x(t, t_0, x_0)| \rightarrow 0$ ที่ $t \rightarrow \infty$

$x = 0$ จะเรียกว่าไม่เสถียร (Unstable) ถ้า $x = 0$ ไม่สอดคล้องกับนิยามของเสถียรภาพไลปูนอฟ



ภาพที่ 1 เสถียรภาพ (Stability) จาก Ordinary Differential Equations (หน้า 26), โดย Jack, 2009.

บทนิยาม 5 [7] พิจารณาระบบสมการของสมการไม่เป็นเชิงเส้น

$$\dot{x} = f(x), \quad f(\bar{0}) = 0 \quad (2)$$

เราได้ให้ความหมายของฟังก์ชันไลปูนอฟ $V(x)$ ดังต่อไปนี้

1. $V(x)$ และอนุพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
2. $V(x)$ ฟังก์ชันเป็นบวกแน่นอน นั่นคือ $V(\bar{0}) = 0$ และ $V(x) > 0$ สำหรับ

$x \neq \bar{0}$ ในย่านใกล้เคียง $\|x\| \leq k$ ณ จุดสมดุล

3. อนุพันธ์ของ $V(x)$ ที่สอดคล้องกับ (2) กล่าวคือ

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \dot{x}_n \\ &= \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} f_2(x) + \dots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} f_n(x) \end{aligned} \quad (3)$$

เป็น negative semidefinite นั่นคือ $\dot{V}(\bar{0}) = 0$ สำหรับทุก x ที่สอดคล้องกับ $\|x\| \leq k$, $\dot{V}(x) \leq 0$

ทฤษฎีบท 6 [7] จุดสมดุลของระบบสมการ (1) จะเสถียรภาพเชิงเส้น ถ้ามีฟังก์ชันไลปูนอฟ

ทฤษฎีบท 7 [1] เซต $A \subset \mathbb{R}$ จะเป็นเซตกระชับ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตปิด และมีขอบเขต

ทฤษฎีบท 8 [7] หลักการไม่แปรเปลี่ยน (The Invariance Principle) ให้ $\Omega \subset D$ เป็นเซตกระชับไม่แปรเปลี่ยนบวก ที่สอดคล้องกันกับ $\dot{x} = f(x)$ ให้ $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหาอนุพันธ์ได้ นั่นคือ $\dot{V}(x) \leq 0$ ใน Ω ให้ E เป็นเซตของทุกๆจุดใน Ω ที่ซึ่ง $\dot{V}(x) = 0$ ให้ M เป็นเซตไม่แปรเปลี่ยนที่ใหญ่ที่สุดใน E แล้วทุกๆผลเฉลยที่เริ่มใน Ω จะเข้าสู่ M ที่ $t \rightarrow \infty$

ทฤษฎีบท 9 [7] ให้ $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ สามารถหาอนุพันธ์ต่อเนื่องได้ และ $\dot{V}(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n$ และให้ $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$ แล้ว จุดสมดุลเป็นเสถียรภาพกำกับวงกว้าง

ในบทความวิจัยแบบจำลองการแพร่ระบาดของเชื้อโรคแบบ เอส อี ไอ อาร์ ที่มีอัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้นที่ศึกษา คือ

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}(t) &= C - \beta_{10}S(t)E(t) - \frac{\beta_{20}S(t)I(t)}{1 + \omega I(t)} - \beta_{30}S(t)R(t) - \mu S(t), \\ \dot{E}(t) &= \beta_{10}S(t)E(t) + \frac{\beta_{20}S(t)I(t)}{1 + \omega I(t)} + \beta_{30}S(t)R(t) - \gamma_0 E(t) - (\mu + \alpha_{10})E(t), \\ \dot{I}(t) &= \gamma_0 E(t) - k_0 I(t) - (\mu + \alpha_{20})I(t), \\ \dot{R}(t) &= k_0 I(t) - \mu R(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ที่ซึ่ง	$N(t)$	แทน	จำนวนประชากรทั้งหมด ณ เวลา t ใด ๆ
	$S(t)$	แทน	จำนวนประชากรเสี่ยงต่อการติดเชื้อโรค ณ เวลา t ใด ๆ
	$E(t)$	แทน	จำนวนประชากรที่ได้รับเชื้อโรคและเชื้อโรดยังแฝงตัวอยู่ ไม่แสดงอาการ ณ เวลา t ใด ๆ
	$I(t)$	แทน	จำนวนประชากรที่ติดเชื้อโรคแสดงอาการ ณ เวลา t ใด ๆ
	$R(t)$	แทน	จำนวนประชากรที่มีภูมิคุ้มกันการติดเชื้อโรค ณ เวลา t ใด ๆ
	$\mu > 0$	คือ	อัตราการตายตามธรรมชาติของประชากร
	$S(t), E(t), I(t), R(t)$		
	$\alpha_{10} > 0$	คือ	อัตราการตายเนื่องมาจากการติดเชื้อของประชากร $E(t)$
	$\alpha_{20} > 0$	คือ	อัตราการตายเนื่องมาจากการติดเชื้อของประชากร $I(t)$
	$\gamma_0 > 0$	คือ	อัตราของประชากร $E(t)$ กลายไปเป็นกลุ่มประชากร $I(t)$
	$k_0 > 0$	คือ	อัตราคงที่ที่มีภูมิคุ้มกันการติดเชื้อโรคของประชากร $I(t)$
	$\beta_{10} > 0$	คือ	อัตราของประชากร $S(t)$ เจอกับประชากร $E(t)$ แล้ว $S(t)$ กลายไปเป็นประชากร $E(t)$
	$\beta_{20} > 0$	คือ	อัตราของประชากร $S(t)$ เจอกับประชากร $I(t)$ แล้ว $S(t)$ กลายไปเป็นประชากร $I(t)$
	$\beta_{30} > 0$	คือ	อัตราของประชากร $S(t)$ เจอกับประชากร $R(t)$ แล้ว $S(t)$ กลายไปเป็นประชากร $R(t)$
	$C \geq 0$	คือ	ค่าคงที่ของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคเริ่มต้น

ต่อไปนี้จะใช้ชื่อย่อต่อไปนี้ให้ $S(t) = S, E(t) = E, I(t) = I, R(t) = R$

กำหนดให้ $\mu dt = d\tau$ จะได้ว่า $dt = \frac{1}{\mu} d\tau$ ที่ซึ่ง τ คือเวลา สำหรับ $\tau > 0$ แทนค่า $dt = \frac{1}{\mu} d\tau$

ในระบบสมการ (4) และให้ $\beta_1 = \frac{\beta_{10}}{\mu}, \beta_2 = \frac{\beta_{20}}{\mu}, \beta_3 = \frac{\beta_{30}}{\mu}, \gamma = \frac{\gamma_0}{\mu}, \alpha_1 = \frac{\alpha_{10}}{\mu}, \alpha_2 = \frac{\alpha_{20}}{\mu}$

และ $k = \frac{k_0}{\mu}$ จะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} &= \frac{C}{\mu} - \beta_1 SE - \frac{\beta_2 SI}{1 + \omega I} - \beta_3 SR - S, \\ \frac{dE}{d\tau} &= \beta_1 SE + \frac{\beta_2 SI}{1 + \omega I} + \beta_3 SR - (1 + \gamma + \alpha_1) E, \\ \frac{dI}{d\tau} &= \gamma E - (1 + k + \alpha_2) I, \\ \frac{dR}{d\tau} &= kI - R \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

เนื่องจาก $N = S + E + I + R$ จะได้ว่า $N' = S' + E' + I' + R'$ ดังนั้น

$$\frac{dN}{d\tau} = \frac{C}{\mu} - N - \alpha_1 E - \alpha_2 I \quad \text{และแทนค่า } 1 + \gamma + \alpha_1 = \delta, \quad 1 + k + \alpha_2 = m,$$

$S = N - E - I - R$ จะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= \left(\beta_1 E + \frac{\beta_2 I}{1 + \omega I} + \beta_3 R \right) (N - E - I - R) - \delta E, \\ \frac{dI}{d\tau} &= \gamma E - mI, \\ \frac{dR}{d\tau} &= kI - R, \\ \frac{dN}{d\tau} &= \frac{C}{\mu} - N - \alpha_1 E - \alpha_2 I \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ดังนั้นจะศึกษาระบบสมการ (6) ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตปิด T ที่ซึ่ง

$$T = \left\{ (E, I, R, N) \in \mathbb{R}_+^4 : 0 \leq E + I + R \leq N \leq \frac{C}{\mu} \right\}$$

ผลการวิจัย

จากการศึกษาบทความวิจัยเรื่อง เสถียรภาพกำกับวงกว้างของแบบจำลองการแพร่ระบาดของเชื้อโรคแบบ เอส อี ไอ อาร์ ที่มีอัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้น โดยบทนิยาม 3 ได้ว่า

จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค คือ $P_0 = (S_0, E_0, I_0, R_0) = \left(\frac{C}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ และจุดสมดุลที่ติดเชื้อโรค

คือ $P_+ = (S_+, E_+, I_+, R_+)$ เมื่อ

$$S_+ = \frac{C(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma) [\mu(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma) + \omega \gamma (C - \mu N_+)]}{\{(\beta_1 m + \beta_3 k \gamma) [\mu(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma) + \omega \gamma (C - \mu N_+)] + \beta_2 \gamma [\mu(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma)]\} \cdot (C - \mu N_+) + [\mu(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma) + \omega \gamma (C - \mu N_+)] [\mu(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma)]}$$

$$E_+ = \frac{m(C - \mu N_+)}{\mu(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma)},$$

$$I_+ = \frac{\gamma(C - \mu N_+)}{\mu(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma)},$$

$$R_+ = \frac{k\gamma(C - \mu N_+)}{\mu(\alpha_1 m + \alpha_2 \gamma)}$$

และได้ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค มีเสถียรภาพกำกับวงกว้าง ดังนี้

ทฤษฎีบท 14 ถ้า $R_0 \leq 1$ แล้วจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค P_0 เป็นเสถียรภาพกำกับวงกว้างใน T

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชัน $L = \frac{m\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}{\delta m} E + \frac{\beta_2 + k\beta_3}{m} I + \beta_3 R$ และ

$$L'|_{(6)} = \left(\frac{\beta_1 E + \beta_1 E \omega I + \beta_2 I + \beta_3 R + \beta_3 R \omega I}{1 + \omega I} \right) \left[\frac{\frac{m\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}{\delta m} S}{(\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R)(1 + \omega I)} - \frac{\beta_1 E + \beta_1 E \omega I + \beta_2 I + \beta_3 R + \beta_3 R \omega I}{\beta_1 E + \beta_1 E \omega I + \beta_2 I + \beta_3 R + \beta_3 R \omega I} \right]$$

$$\leq \left(\frac{\beta_1 E + \beta_1 E \omega I + \beta_2 I + \beta_3 R + \beta_3 R \omega I}{1 + \omega I} \right) \left[\frac{A(m\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}{\delta m \mu} - \frac{(\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R)(1 + \omega I)}{\beta_1 E + \beta_1 E \omega I + \beta_2 I + \beta_3 R + \beta_3 R \omega I} \right]$$

$$= \left(\frac{\beta_1 E + \beta_1 E m I + \beta_2 I + \beta_3 R + \beta_3 R m I}{1 + m I} \right) \left[R_0 - \frac{(\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R)(1 + m I)}{\beta_1 E + \beta_1 E m I + \beta_2 I + \beta_3 R + \beta_3 R m I} \right]$$

เนื่องจาก $R_0 \leq 1$ ดังนั้น $L'(x) \leq 0$ นอกจากนี้ยังได้อีกว่า $L' = 0$ เมื่อ

$$E = I = R = 0$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าเรามีฟังก์ชันไลปูนอฟ และจากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคจะเสถียร จากทฤษฎีบท 8 และทฤษฎีบท 9 ให้ $M = \{(S, E, I, R) : L' = 0\}$ เป็นเซตไม่แปรเปลี่ยนที่ใหญ่ที่สุด จะได้ว่า ถ้า $R_0 \leq 1$ แล้วจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค P_0 เป็นเสถียรภาพกำกับวงกว้างใน T

อภิปรายผล

ในการทำบทความวิจัยต่อไป อาจเพิ่มตัวแปรอื่นๆเพื่อให้แบบจำลองมีความใกล้เคียงกับความเป็นจริงและสมเหตุสมผลมากยิ่งขึ้น

สรุปผลการวิจัย

ถ้า $R_0 \leq 1$ แล้วจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค P_0 เป็นเสถียรภาพกำกับวงกว้าง นั้นหมายถึงเมื่อเวลาผ่านไปในช่วงเวลาหนึ่งเชื้อโรคจะหายไปในที่สุด ซึ่งวิธีการทำให้จำนวนเฉลี่ยผู้ป่วยรายใหม่ในประชากรที่ไม่มีภูมิคุ้มกันที่เกิดจากผู้ป่วยรายแรกแพร่เชื้อให้ (R_0) ลดลง อาจทำได้โดยออกกกำลังกายเป็นประจำ รับประทานอาหารที่มีประโยชน์ต่อร่างกายเพื่อเสริมสร้างภูมิคุ้มกันต้านทานโรค ตรวจสุขภาพหรือฉีดวัคซีนเพื่อเพิ่มภูมิคุ้มกันในการติดเชื้โรค

เอกสารอ้างอิง

- วัชรพงษ์ โชติพิรุณกิจ. (2546). คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้าขั้นสูง. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Connell, M.C. (2010). Global stability for an SIR epidemic model with delay and nonlinear incidence. **Nonlinear Analysis : Real World Applications**, 11, 3106-3109.
- Keshet, L.E. (1988). **Mathematical Model in Biology**. Random House.
- Li, G. Jin, Z. (2005). Global stability of a SEIR epidemic model with infectious force in latent infected and immune period. **Chaos, Solitons and Fractals**. 25, 1177-1184.
- Li, G. Wang, W. Jin, Z. (2006). Global stability of an SEIR epidemic model with constant immigration. **Chaos, Solitons and Fractals**, 30, 1012-1019.
- Jack, K. H. (2009). **Ordinary Differential Equations**, Florida. Krieger Publishing.
- Capasso, V. & Serio, G. (1978). A generalization of the Kermack-Mckendrick deterministic epidemic model. **Math Biosci**, 42, 41-61.
- Wanbiao, M. Song, M. & Takeuchi, Y. (2004). Global stability of an SIR epidemic model with time delay. **App Math Lett**, 17, 1141-1145.