

เกมนิมและปริศนาไม้ขีดไฟ

NIM AND MATCH PUZZLE

กรรณิการ์ อานทอง* ณ์ฐพล แก้วแดง สมปอง ตุนันท์ และจิรพนธ์ คำด้อย

Kannika Arnthong* Nattapon Kaewdaeng Sompong Tunan and Jirapon Khumtui

Faculty of Education, Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000

*corresponding author e-mail: tpok2555@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการหาลักษณะเฉพาะบางประการของเกมนิมและแบบรูปความสัมพันธ์ของจำนวนก้อนไม้ขีดไฟซึ่งบทความนี้จัดทำขึ้นเพื่อวิเคราะห์หาวิธีการและกลยุทธ์ในการเล่นเกมและหาแบบรูปของพจน์ทั่วไปของแบบรูปจำนวนไม้ขีดไฟโดยใช้ สมภาค ลำดับเลขคณิต ลำดับพหุนามดีกรีสอง แบบรูปความสัมพันธ์ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลมาช่วยในการวิเคราะห์

คำสำคัญ: เกมนิม แบบรูปสมภาค ลำดับเลขคณิต ลำดับพหุนามดีกรีสอง

Abstract

The aim of this paper are to fine some characteristics of Nim's game and to find the pattern of relationship in Matches puzzle. We found the sufficient condition to win the Nim's game. Moreover, we found the pattern of Mathches puzzle by using congruence, arithmetic sequence, quadratic polynomials sequence and some mathematical skill.

Keywords: Nim, Pattern, Congruences, Arithmetic Sequence, Sequence of Quadratic Polynomials

บทนำ

จากการศึกษาทราบว่าเกมนิมไม่มีหลักฐานที่ชัดเจน แต่จากหลักฐานของชาวยุโรปพบว่า นิม (nim) (วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี, 2558) มีมาตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ 16 โดย ชาลส์ ลีโอนาร์ด บลูตัน (Charles L. Bouton) แห่งมหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ดเป็นผู้ตั้งชื่อเกมนี้นิม และได้พัฒนาทฤษฎี

บทเกี่ยวกับเกมนี้ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1901 อาจจะมาจกภาษาเยอรมันคำว่า nimm! ซึ่งแปลว่า take! หรือมาจากภาษาอังกฤษดั้งเดิม ซึ่งก็แปลว่า take เหมือนกัน

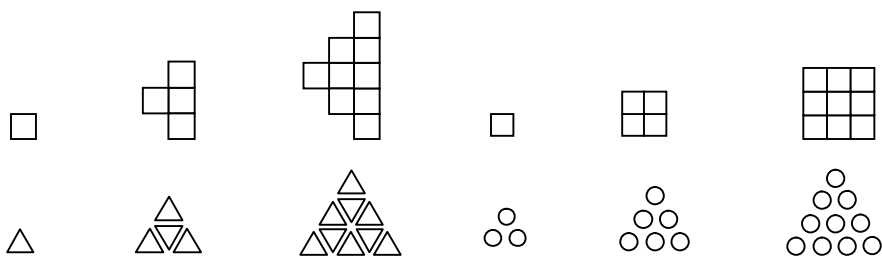
แบบรูป (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, 2554) กำเนิดขึ้นจากการเขียนจำนวนของชาวกรีกโบราณโดยใช้สัญลักษณ์จุดแทนรูปที่เพิ่มในแบบที่มีความสัมพันธ์กันซึ่งแบบรูปที่จะกล่าวถึงนี้เป็นแบบรูปในลักษณะต่างๆ โดยแสดงให้เห็นรูปแบบของการจัดลำดับ เพื่อจะใช้การสังเกต การวิเคราะห์ การให้เหตุผลในการบอกความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ที่พบเห็นได้อย่างถูกต้องจนถึงขั้นสรุปเป็นลักษณะทั่วไปซึ่งในบทความนี้ได้ศึกษาแบบรูปจำนวน 5 รูปแบบ ในแต่ละรูปแบบนั้นคณะผู้จัดทำได้เลือกรูปแบบที่มีส่วนประกอบของรูปทรงเรขาคณิตซึ่งมาประกอบกันเป็นแบบรูปดังกล่าวที่สามารถเห็นได้ในชีวิตประจำวัน ได้แก่ นาฬิกาทราย กังหันลม พรหมปูพื้น ดัมเบล และกระดุกสัตว์

ในบทความนี้ได้หาแบบรูปทั่วไปของเกมนิม และหากลยุทธ์ในการเล่นเกมนิมให้ชนะอยู่เสมอโดยใช้สมภาคเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ลักษณะเฉพาะดังกล่าว นอกจากนี้ยังได้หาแบบรูปทั่วไปของเกมปริศนาไม้ขีดไฟโดยได้หาแบบรูปความสัมพันธ์ของแบบรูปไม้ขีดไฟกับจำนวนกำนันไม้ขีดไฟโดยใช้ลำดับเลขคณิต และลำดับพหุนาม สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการคำนวณหาปริมาณการใช้วัสดุในการสร้างแบบจำลองโครงสร้างของสิ่งต่าง ๆ และการคำนวณอื่น ๆ ในลักษณะเดียวกันนี้

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง แบบรูปตารางตัวเลข บทนิยาม และทฤษฎีบทที่นำไปใช้ในการหาพจน์ทั่วไปของการเล่นเกมนิมและเกมปริศนาไม้ขีดไฟ ดังนี้

1.แบบรูปและความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตและรูปอื่น ๆ

แบบรูป (patterns) หรืออนุกรม([patterns and relations] แบบรูปและความสัมพันธ์, 2558) คือ ชุดของตัวเลข หรือรูปภาพที่มีความสัมพันธ์กันอย่างใดอย่างหนึ่ง ในลักษณะของจำนวน รูปร่าง สี หรือขนาด ตามกฎเกณฑ์ที่กำหนด ซึ่งเมื่อทราบกฎเกณฑ์หรือความสัมพันธ์ที่กำหนดในแต่ละแบบรูป จะสามารถบอก คาดเดาหรือคาดการณ์ได้ว่า รูปเรขาคณิต หรือจำนวนถัดไปคืออะไรเช่น



ตาราง (พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ.2542, 2558) คือช่องสี่เหลี่ยมที่เกิดจากเส้นขนานในแนวยืนกับแนวนอนตัดกันตัวเลข (พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ.2542, 2558)

คือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวนจริงจากความหมายของตารางและตัวเลขดังกล่าวสามารถสรุปความหมายของตารางตัวเลขได้ดังนี้ ตารางตัวเลขคือช่องสี่เหลี่ยมที่เกิดจากเส้นขนานในแนวยืนกับแนวนอนตัดกันที่มีจำนวนจริงที่ไม่ติดกันบรรจุในแต่ละช่องของสี่เหลี่ยม

2. บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทในการหากลยุทธ์ในการเล่นเกมนิรมและแบบรูปของพจน์ทั่วไปของเกมปริศนาไม้ขีดไฟ โดยเริ่มต้นจากการศึกษาจากนิยามการหารลงตัวและสมภาค ซึ่งสัญลักษณ์แทนสมภาคนี้ได้คิดค้นโดยนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Karl Freidrich Gauss) ได้ใช้สัญลักษณ์แทน a สมภาค b มอดุโล m คือ $a \equiv b \pmod{m}$

บทนิยาม 2.1 (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ, 2552) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ จะกล่าวว่า b หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $a = bc$ เรียก b ว่าเป็นตัวหาร (divisor) ของ a และเรียก a ว่าเป็นพหุคูณ (multiple) ของ b ใช้สัญลักษณ์ $b|a$ แทน “ b หาร a ลงตัว”

บทนิยาม 2.2 (สมวงษ์ แปลงประสพโชค, 2545) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มและ m เป็นจำนวนเต็มบวกเรากล่าวว่า a สมภาค b มอดุโล m (a congruent b modulo m) ถ้า m หาร $a - b$ ลงตัวเขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{m}$

ข้อสังเกต จากนิยาม 2.1 และ 2.2 เราจะได้ว่า

$$1. a \equiv b \pmod{m} \text{ ก็ต่อเมื่อ } m | a - b$$

2. $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ เศษเหลือจากการหาร a ด้วย m เท่ากับ เศษเหลือจากการหาร b ด้วย m

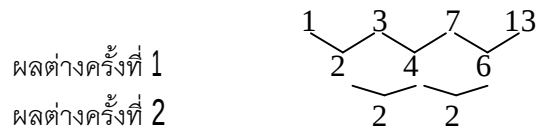
ทฤษฎีบท 2.3 (สมวงษ์ แปลงประสพโชค, 2545) ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $a = b + km$

บทนิยาม 2.4 (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ, 2554) ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่าลำดับจำกัด (finite sequence) และเรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่า ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

บทนิยาม 2.5 (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ, 2554) ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequence) คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า ผลต่างร่วม (common difference)

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, 2552) คือ การเขียนแสดงพจน์ทั่วไป a_n ในรูปที่มี n เป็นตัวแปร เมื่อแทน n ด้วยสมาชิกในเซต $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ แล้วได้พจน์ที่ $1, 2, 3, \dots, m$ ของลำดับตรงตามที่กำหนด วิธีการหาพจน์ทั่วไปเช่นนี้ โดยทั่วไปใช้การสังเกตความสัมพันธ์ของพจน์ต่างๆ และความสัมพันธ์ระหว่างพจน์กับลำดับที่ของพจน์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ $1, 3, 7, 13, \dots$ เป็นลำดับใด ๆ จากลำดับที่กำหนดให้สามารถหาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกันได้ดังนี้



จะเห็นว่าผลต่างครั้งที่สองเป็นค่าคงตัวและมีค่าเท่ากับ 2 ให้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป

$a_n = an^2 + bn + c$ แทน n ในพจน์ทั่วไปด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้

$$a_1 = 1 = a + b + c \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$a_2 = 3 = 4a + 2b + c \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$a_3 = 7 = 9a + 3b + c \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$a_4 = 13 = 16a + 4b + c \quad \dots\dots\dots(4)$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่า a, b และ c ได้ดังนี้

$$(2) - (1) \quad 2 = 3a + b \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$(3) - (2) \quad 4 = 5a + b \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$(6) - (5) \quad 2 = 2a$$

$$a = 1$$

แทน a ใน (5) ด้วย 1 จะได้ $b = -1$ แทน a และ b ใน (1) ด้วย 1 และ -1 ตามลำดับ จะได้ $c = 1$ ดังนั้น $a_n = n^2 - n + 1$ จากตัวอย่างดังกล่าวเมื่อแทน n ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ a_1, a_2, a_3 และ a_4 เท่ากับค่าที่กำหนดให้ แสดงว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้เป็นการหากลยุทธ์ในการเล่นเกมนิมให้ชนะและหาแบบรูปและความสัมพันธ์ของปริศนาไม้ขีดไฟ

ในการหากลยุทธ์ในการเล่นเกมนิมให้ชนะนั้น จะต้องออกแบบ ตารางตัวเลขหลาย ๆ แบบ ซึ่งเราได้ทำการทดสอบตารางข้างต้น ดังนี้ ตารางตัวเลข 1 ถึง 50 ตารางตัวเลข 1 ถึง 40

เสมอ จากกติกาที่ว่ากาบาทได้ไม่เกิน 3 ตัวเลขเรียงต่อกันและต้องกาบาทอย่างน้อย 1 ตัวเลข มีความสัมพันธ์ คือ

$$\text{ระยะห่างระหว่างพจน์} = (\text{จำนวนตัวเลขที่ต้องกาบาทเรียงต่อกัน}) + 1$$

$$4 = 3 + 1$$

ลำดับที่กล่าวมาข้างต้นมีความสัมพันธ์กับ 2 และ 4 ดังนี้

$$4 \mid (26 - 2)$$

$$4 \mid (22 - 2)$$

$$4 \mid (18 - 2)$$

⋮

$$4 \mid (2 - 2)$$

โดยบทนิยามของสมภาคจะได้

$$26 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$22 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$18 \equiv 2 \pmod{4}$$

⋮

$$2 \equiv 2 \pmod{4}$$

ดังนั้นตัวเลขที่กาบาทเป็นตัวสุดท้ายในแต่ละรอบของผู้เล่น คือ $x \equiv 2 \pmod{4}$ หรือจำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต $\{x \in \mathbb{N} \mid x \equiv 2 \pmod{4}, 1 < x < 30\}$

ถ้าเปลี่ยนตารางตัวเลขให้บรรจุตัวเลขตั้งแต่ m ถึง 30 โดยที่ $m < 30$ เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย แต่ละคนกาบาทได้ไม่เกิน n เมื่อ $1 \leq n < 30 - m$ ตัวเรียงต่อกัน โดยเริ่มกาบาทตั้งแต่เลข 30, 29, 28, ..., m ตามลำดับ คนใดกาบาทที่เลข m เป็นผู้แพ้ระยะห่างระหว่างพจน์คือ $n + 1$ จะได้กลยุทธ์ในการเล่น โดยตัวเลขที่กาบาทเป็นตัวสุดท้ายในแต่ละรอบของผู้เล่นคือ ..., $(m + 1) + 3(n + 1), (m + 1) + 2(n + 1), (m + 1) + (n + 1), m + 1$

จากลำดับข้างต้นจะได้ว่า

⋮

$$(n + 1) \mid [((m + 1) + 3(n + 1)) - (m + 1)]$$

$$(n + 1) \mid [((m + 1) + 2(n + 1)) - (m + 1)]$$

$$(n + 1) \mid [((m + 1) + (n + 1)) - (m + 1)]$$

$$(n + 1) \mid [(m + 1) - (m + 1)]$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \vdots \\ ((m+1)+3(n+1)) & \equiv (m+1)(\text{mod}(n+1)) \\ ((m+1)+2(n+1)) & \equiv (m+1)(\text{mod}(n+1)) \\ ((m+1)+(n+1)) & \equiv (m+1)(\text{mod}(n+1)) \\ (m+1) & \equiv (m+1)(\text{mod}(n+1)) \end{aligned}$$

จากข้างต้นจะได้ว่าตัวเลขสุดท้ายในแต่ละรอบที่ผู้เล่นกากบาทได้แก่ $x \equiv (m+1)(\text{mod}(n+1))$ จากลำดับข้างต้นทราบว่าจะระยะห่างระหว่างพจน์เท่ากับ n เสมอ จากกติกาที่ว่ากากบาทได้ไม่เกิน $1 \leq n < 30 - m$ ตัวเลขเรียงต่อกันและต้องกากบาทอย่างน้อย 1 ตัวเลขมีความสัมพันธ์ คือ $\{x \in \mathbb{N} | x \equiv (m+1)(\text{mod}(n+1)), m < x < 30\}$

ถ้าเปลี่ยนตารางตัวเลขให้บรรจุตัวเลขตั้งแต่ a ถึง b โดยที่ $a, b \in \mathbb{Z}, a < b$ เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย แต่ละคนกากบาทได้ไม่เกิน n เมื่อ $1 \leq n < b - a$ ตัวเลขเรียงต่อกัน โดยเริ่มกากบาทตั้งแต่เลข $b, b-1, b-2, \dots, a$ ตามลำดับ คนใดกากบาทที่เลข a เป็นผู้แพ้ ระยะห่างระหว่างพจน์คือ $n+1$ จะได้กลยุทธ์ในการเล่น โดยตัวเลขที่กากบาทเป็นตัวเลขสุดท้ายในแต่ละรอบของผู้เล่นคือ $\dots, (a+1)+3(n+1), (a+1)+2(n+1), (a+1)+(n+1), a+1$ จากลำดับข้างต้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \vdots \\ (n+1) & | [((a+1)+3(n+1)) - (a+1)] \\ (n+1) & | [((a+1)+2(n+1)) - (a+1)] \\ (n+1) & | [((a+1)+(n+1)) - (a+1)] \\ (n+1) & | [(a+1) - (a+1)] \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \vdots \\ ((a+1)+3(n+1)) & \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1)) \\ ((a+1)+2(n+1)) & \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1)) \\ ((a+1)+(n+1)) & \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1)) \\ (a+1) & \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1)) \end{aligned}$$

ดังนั้นตัวเลขที่กากบาทเป็นตัวเลขสุดท้ายในแต่ละรอบของผู้เล่น คือ $x \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1))$ หรือจำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต $\{x \in \mathbb{Z} | x \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1)), a < x < b\}$

จากข้างต้นจะได้ว่าตัวเลขสุดท้ายในแต่ละรอบที่ผู้เล่นกากบาทได้แก่ $x \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1))$ จากลำดับข้างต้นทราบว่าระยะห่างระหว่างพจน์เท่ากับ n เสมอ จากกติกาที่ว่ากากบาทได้ไม่เกิน n ตัวเลขเรียงต่อกันและต้องกากบาทอย่างน้อย 1 ตัวเลข มีความสัมพันธ์ คือ $\{x \in \mathbb{Z} | x \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1)), a < x < b\}$

วิธีการสร้างกลยุทธ์ในการเล่นเกมโดยใช้ลำดับเลขคณิต

จากที่กล่าวมาข้างต้นยังมีวิธีการหากลยุทธ์ในการเล่นเกมโดยวิธีการใช้ลำดับเลขคณิต ซึ่งจากตาราง 1 พบว่าระยะห่างระหว่างพจน์เท่ากับ -4 เสมอ

ถ้าเปลี่ยนตารางตัวเลขให้บรรจุตัวเลขตั้งแต่ m ถึง 30 โดยที่ $m < 30$ เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย แต่ละคนกากบาทได้ไม่เกิน q เมื่อ $1 \leq q < 30 - m$ ตัวเรียงต่อกัน โดยเริ่มกากบาทตั้งแต่เลข $30, 29, 28, \dots, m$ ตามลำดับ คนใดกากบาทที่เลข m เป็นผู้แพ้จะได้กลยุทธ์ในการเล่นเกม โดยกากบาทเป็นตัวเลขสุดท้าย คือ $m+1$ ดังนี้

$$\text{พจน์ที่ } 1 = m+1$$

$$\text{พจน์ที่ } 2 = (m+1) - (-q-1)$$

$$\text{พจน์ที่ } 3 = (m+1) - 2(-q-1)$$

$$\vdots$$

$$\text{พจน์ที่ } n = (m+1) - (n-1)(-q-1)$$

ดังนั้นลำดับที่ได้คือ

$(m+1) - (n-1)(-q-1), (m+1) - (n-2)(-q-1), (m+1) - (n-3)(-q-1), \dots, m+1$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $[(m+1) - (n-1)(-q-1)] < 30$ ดังนั้นตัวเลขที่กากบาทเป็นตัวเลขสุดท้าย คือ $m+1$

ถ้าเปลี่ยนตารางตัวเลขให้บรรจุตัวเลขตั้งแต่ a ถึง b โดยที่ $a, b \in \mathbb{Z}, a < b$ เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย แต่ละคนกากบาทได้ไม่เกิน q เมื่อ $1 \leq q < b - a$ ตัวเรียงต่อกัน โดยเริ่มกากบาทตั้งแต่เลข $b, b-1, b-2, \dots, a$ ตามลำดับ คนใดกากบาทที่เลข a เป็นผู้แพ้จะได้กลยุทธ์ในการเล่นเกม โดยกากบาทเป็นตัวเลขสุดท้าย คือ $a+1$ ดังนี้

$$\text{พจน์ที่ } 1 = a+1$$

$$\text{พจน์ที่ } 2 = (a+1) - (-q-1)$$

$$\text{พจน์ที่ } 3 = (a+1) - 2(-q-1)$$

$$\vdots$$

$$\text{พจน์ที่ } n = (a+1) - (n-1)(-q-1)$$

$$= (a+1) + (n-1)(q+1)$$

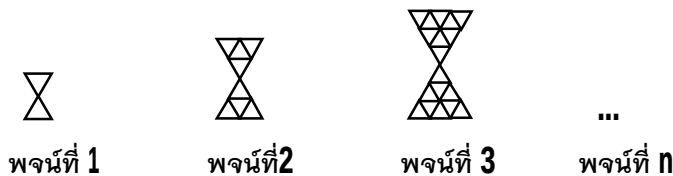
ดังนั้นลำดับที่ได้คือ

$(a+1)+(n-1)(q+1), (a+1)+(n-2)(-q-1), (a+1)+(n-3)(-q-1), \dots, a+1$
เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $[(a+1)+(n-1)(q+1)] < b$ ดังนั้นตัวเลขที่กากบาทเป็นตัวสุดท้ายคือ $a+1$

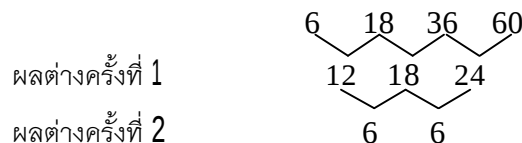
ในการหารูปทั่วไปของปริศนาไม้ขีดไฟ จะนำก้อนไม้ขีดไฟมาต่อเป็นรูปเรขาคณิตทั้งหมด 5 รูปแบบ ซึ่งในแต่ละรูปแบบจะมี จำนวนและแบบรูปของก้อนไม้ขีด ตามกฎเกณฑ์ที่กำหนด ซึ่งเมื่อทราบกฎเกณฑ์หรือความสัมพันธ์ที่กำหนดในแต่ละแบบรูป จะสามารถบอก คาดเดาหรือ คาดการณ์ได้ว่า รูปเรขาคณิต หรือจำนวนถัดไปคืออะไรดังนี้

วิธีการหาจำนวนไม้ขีดของรูปที่ n

รูปแบบที่ 1



วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกันได้ดังนี้



จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองเป็นค่าคงตัว และมีค่าเท่ากับ 6 ให้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่

ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$ แทน n ในพจน์ทั่วไปด้วย 1, 2, 3 และ 4

จะได้ $a_1 = 6 = a + b + c \dots\dots\dots(1)$

$a_2 = 18 = 4a + 2b + c \dots\dots\dots(2)$

$a_3 = 36 = 9a + 3b + c \dots\dots\dots(3)$

$a_4 = 60 = 16a + 4b + c \dots\dots\dots(4)$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่า a, b และ c ได้ดังนี้

$(2)-(1) \quad 12 = 3a + b \dots\dots\dots(5)$

$(4)-(3) \quad 24 = 7a + b \dots\dots\dots(6)$

$(6)-(5) \quad 12 = 4a$

$a = 3$

แทน a ใน (5) ด้วย 3 จะได้ $b = 3$ แทน a และ b ใน (1) ด้วย 3 และ 3

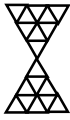
ตามลำดับ จะได้ $c = 0$ จะได้ $a_n = 3n^2 + 3n$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของแบบรูปกับจำนวนก้อนไม้ขีดไฟในแต่ละรูปเป็นลำดับ ดังนี้

6, 18, 36, ..., $3n^2 + 3n$

พจน์ที่ 1  $= 3(1)^2 + 3(1) = 6$

พจน์ที่ 2  $= 3(2)^2 + 3(2) = 18$

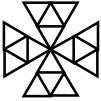
พจน์ที่ 3  $= 3(3)^2 + 3(3) = 36$

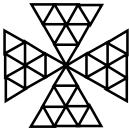
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
พจน์ที่ n $= 3(n)^2 + 3(n)$

รูปแบบที่ 2, 3, 4 และ 5 มีแนวคิดในการทำงานเหมือนกันกับรูปแบบที่ 1

รูปแบบที่ 2

พจน์ที่ 1  $= 6(1)^2 + 6(1) = 12$

พจน์ที่ 2  $= 6(2)^2 + 6(2) = 36$

พจน์ที่ 3  $= 6(3)^2 + 6(3) = 72$

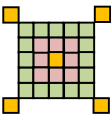
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
พจน์ที่ n $= 6n^2 + 6n$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของแบบรูปกับจำนวนก้อนไม้ขีดไฟในแต่ละรูปเป็นลำดับ ดังนี้

12, 36, 72, ..., $6n^2 + 6n$

รูปแบบที่ 3

พจน์ที่ 1  $= 8(1)^2 - 4(1) + 16 = 20$

พจน์ที่ 2		$=8(2)^2 - 4(2) + 16 = 40$
พจน์ที่ 3		$=8(3)^2 - 4(3) + 16 = 76$
⋮	⋮	⋮
พจน์ที่ n		$=8n^2 - 4n + 16$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของแบบรูปกับจำนวนก้านไม้ขีดไฟในแต่ละรูปเป็นลำดับ ดังนี้

$$20, 40, 76, \dots, 8n^2 - 4n + 16$$

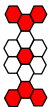
รูปแบบที่ 4

พจน์ที่ 1		$=4(1)^2 + 6(1) - 6 = 4$
พจน์ที่ 2		$=4(2)^2 + 6(2) - 6 = 22$
พจน์ที่ 3		$=4(3)^2 + 6(3) - 6 = 48$
⋮	⋮	⋮
พจน์ที่ n		$=4n^2 + 6n - 6$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของแบบรูปกับจำนวนก้านไม้ขีดไฟในแต่ละรูปเป็นลำดับ ดังนี้

$$4, 22, 48, \dots, 4n^2 + 6n - 6$$

รูปแบบที่ 5

พจน์ที่ 1		$=9(1)^2 - 3(1) + 30 = 36$
พจน์ที่ 2		$=9(2)^2 - 3(2) + 30 = 60$
พจน์ที่ 3		$=9(3)^2 - 3(3) + 30 = 102$
⋮	⋮	⋮
พจน์ที่ n		$=9n^2 - 3n + 30$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของแบบรูปกับจำนวนก้อนไม้ขีดไฟในแต่ละรูปเป็นลำดับ ดังนี้
 $36, 60, 102, \dots, 9n^2 - 3n + 30$

สรุปผลการวิจัย

กลยุทธ์ในการเล่นเกมนิม ผู้ชนะจะต้องกากบาทตัวเลขในแต่ละรอบเป็นตัวเลขสุดท้าย คือตัวเลขที่เป็นสมาชิกของเซต $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv (a+1)(\text{mod}(n+1)), a < x < b\}$ และ ลำดับ เลขคณิต ดังนี้ $(a+1) + (n-1)(q+1), (a+1) + (n-2)(-q-1), (a+1) + (n-3)(-q-1), \dots, a+1$ และการหารูปแบบทั่วไปของแบบรูปความสัมพันธ์ของเกมปริศนา ไม้ขีดไฟ โดยรูปแบบที่ 1 ถึง 5 มีรูปทั่วไปดังนี้

รูปแบบที่ 1	$a_n = 3n^2 + 3n$
รูปแบบที่ 2	$a_n = 6n^2 + 6n$
รูปแบบที่ 3	$a_n = 8n^2 - 4n + 16$
รูปแบบที่ 4	$a_n = 4n^2 + 6n - 6$
รูปแบบที่ 5	$a_n = 9n^2 - 3n + 30$

เอกสารอ้างอิง

- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2552). พีชคณิต (มโนคติเบื้องต้นทางพีชคณิต พหุนาม และสมการพหุนาม จำนวนเชิงซ้อน ทฤษฎีของพหุนาม พหุนามหลายตัวแปร). พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: บริษัท ด้านสุทธาการพิมพ์ จำกัด.
- พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2542. (2558). ตารางและตัวเลข(ออนไลน์). แหล่งที่มา <http://rirs3.royin.go.th/>. เข้าถึงวันที่ 22 พฤศจิกายน 2558.
- วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี. (2558). นิยม. แหล่งที่มา <https://th.wikipedia.org/>. เข้าถึงวันที่ 22 พฤศจิกายน 2558.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2554). หนังสือเรียนรายวิชา พื้นฐานคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตร การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). หนังสือเรียนรายวิชา พื้นฐานคณิตศาสตร์เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). หนังสือเรียนรายวิชา พื้นฐาน คณิตศาสตร์เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). หนังสือเรียนรายวิชา
เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). หนังสือเรียนรายวิชา
เพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค.
ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2554). หนังสือเรียนรายวิชา
เพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค. (2545). ทฤษฎีจำนวน. พิมพ์ครั้งที่ 6. สถาบันราชภัฏพระนคร.
- Pleam Academy.(2558). [Patterns and Relations] แบบรูปและความสัมพันธ์ (อนุกรม)(ออนไลน์).
แหล่งที่มา: <http://plearnacademy.blogspot.com/>. เข้าถึงวันที่ 22 พฤศจิกายน 2558.