

การคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่ถูกกระตุ้น
ด้วยแรงภายนอกที่ขึ้นอยู่กับเวลาในการเคลื่อนที่
ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ

CALCULATION OF VELOCITY OF CHARGED PARTICLE ACTIVATED
BY TIME-DEPENDENT EXTERNAL FORCE FOR MOTION
IN UNIFORM MAGNETIC FIELD

เอมอร วันเอก¹ เจษฎาพร ปาคำวัง² กาญจน์ คุ่มทรัพย์³ และ อาทิตย์ หูเต้ม^{3*}

Aimon Wanaek¹, Jetsadaporn Pakamwang², Kan Khoomsab³, and Artit Hutem^{2*}

¹สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตต์

²สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

³สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

¹Division of Physics Faculty of Science and Technology, Uttaradit Rajabhat University

²Division of Computer Science, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

³Division of Science Education Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

*corresponding author e-mail: artithutem@pcru.ac.th

(Received: 20 February 2024; Revised: 16 September 2024; Accepted: 22 September 2024)

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ในงานวิจัยนี้เพื่อแสดงวิธีการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และในแนวแกน z ซึ่งอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ถูกแรงภายนอกกระตุ้นให้เคลื่อนที่ภายในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอตลอดเวลา โดยใช้เทคนิควิธีการแปรตัวพารามิเตอร์เพื่อหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า ซึ่งผลการวิจัยแสดงว่าความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ที่เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กมีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบสั่นเหมือนกลุ่มคลื่นขนาดประจุไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กเริ่มต้นแปรผกผันกับขนาดของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้สามารถนำสมการความเร็วของประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ไปสร้างสื่อในการเรียนการสอนที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อเรื่องแม่เหล็กไฟฟ้าในรายวิชาฟิสิกส์ได้

คำสำคัญ: ความเร็ว แม่เหล็ก แรงภายนอก สนามแม่เหล็ก

Abstract

This research aimed to show the method of the time-dependent velocity of electrically charged particle $+q$ in y axes and z axes. In which electrically charged particle $+q$ are stimulated by external forces to move within an area with a magnetic field. Electrically charged particles are stimulated by external forces to move in the presence of a magnetic field. The magnetic field is always constant. The research results show that the time-dependent velocity of electrically charged particle $+q$ in y axes and z axes moving in a magnetic field which has an oscillating motion similar to a wave group. The magnitude of charge particle and magnetic initial value varies inversely with the time-dependent velocity of electrically charged particle $+q$ in y axes and z axes. In this research, we can use the electric charge particle velocity equation in y axes and z axes to create instructional media related to the topic of electromagnetic in physics course.

Keywords: Velocity, Magnetic forces, External force, Magnetic field

บทนำ

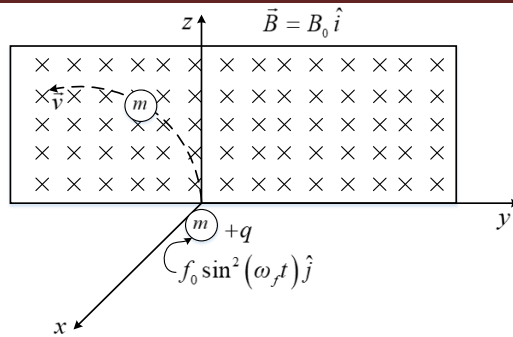
อนุภาคมวล m มีประจุไฟฟ้า $+q$ เคลื่อนที่อยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กตลอดเวลาเพื่อหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวแกน x และแนวแกน y (วูธิพันธุ์ และสุวรรณ, 2548) และคำนวณหาการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวแกน x และในแนวแกน y ด้วยในการสอบแข่งขัน สอวน. ได้มีโจทย์เกี่ยวกับการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่สนามแม่เหล็กมีทิศพุ่งในแนวแกน x แสดงได้ดังนี้ $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560) ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ความสำคัญในการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ที่เป็นฟังก์ชันเวลามีลักษณะเป็นการสั่นตามเวลา ซึ่งในการคำนวณในระบบนี้ไม่มีแรงภายนอกไปกระตุ้นต่ออนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ นักเรียนที่เรียนสอวน.เรียนในหัวข้อนี้ได้มีการถามเกี่ยวกับกรณีที่อนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ถูกแรงภายนอกไปกระตุ้นต่ออนุภาคประจุไฟฟ้าในระบบสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสม่ำเสมอ $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ Nawafleh (2011) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายใต้สนามแม่เหล็กแรง โดยใช้วิธีแฮมิลตันจาโคเบียนใช้ลากรางเจียน ซึ่งต้องทราบพลังงานจลน์ในระบบและพลังงานศักย์ในระบบหลังจากการคำนวณแล้วความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าอยู่ในรูปอินทิกรัล โดยมีเงื่อนไข $qB \gg mc$

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้มีการออกแบบระบบให้อนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ มวล m เคลื่อนที่ภายในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กขนาด $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ อย่างสม่ำเสมอโดยที่อนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ (David, 1999) เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กด้วยความเร็ว $\vec{v} = v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ (สมพงษ์, 2543) และมีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\vec{f}_{ex}(t) = f_0 \sin^2(\omega_f t) \hat{j}$ (Dubik & Malachowski, 2021; Wang & Hezabr 2023; Hutem & Masoongnoen, 2021) วัตถุประสงค์เพื่อคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน z ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา โดยงานวิจัยนี้ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน (Goldstein, 2002) และใช้คณิตศาสตร์เรื่องวิธีแก้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สองแบบไม่เอกพันธ์ (Riley & Hobson, 2006) ในการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ดังกล่าว ซึ่งงานวิจัยนี้จะแสดงวิธีการคำนวณความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในหัวข้อวิธีดำเนินการวิจัยต่อไป โดยสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อของเรื่องแม่เหล็กไฟฟ้าในรายวิชาฟิสิกส์ได้

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ภายในสนามแม่เหล็ก

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ มวล m ในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กขนาด $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ อย่างสม่ำเสมอ B_0 คือ ค่าสนามแม่เหล็กเริ่มต้นซึ่งมีทิศทางตามเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ (Wang & Hezabr, 2023; Pétri, 2020) โดยที่อนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กด้วยความเร็ว $\vec{v} = v_y(t) \hat{j} + v_z(t) \hat{k}$ (วุทธิพันธุ์ และสุวรรณ, 2548) โดยที่ $v_y(t)$ เป็นความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในทิศทางตามเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{j}$ และตัวแปร $v_z(t)$ เป็นความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในทิศทางตามเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{k}$ และมีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\vec{f}_{ex}(t) = f_0 \sin^2(\omega_f t) \hat{j}$ (Kuaykaew et al., 2016) ซึ่งงานวิจัยนี้ใช้แรงภายนอกเป็นฟังก์ชันไซน์ยกกำลังสองเพื่อให้ประจุไฟฟ้า $+q$ มีการเคลื่อนที่เป็นแบบลู่ฟังก์ชันไซน์ยกกำลังสองเป็นบวก ต่อมาผู้วิจัยต้องการศึกษาพฤติกรรมของความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของประจุไฟฟ้า $+q$ ที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กโดยที่ f_0 เป็นแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก และ $\omega_f = 2\pi f$ ค่าความถี่เชิงมุม ซึ่ง f เป็นค่าความถี่ซึ่งแรงภายนอกนี้ไปกระทำต่ออนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ (Repko, Repko & Allan, 1991; William, Richard & Richard, 1994) ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ เคลื่อนที่เข้าในสนามแม่เหล็ก $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ ในระบบพิกัดฉาก ด้วยความเร็ว $\vec{v} = v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

จากภาพที่ 1 จะมีแรงสนามแม่เหล็ก $\vec{F}_B$ ที่กระทำต่ออนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ (สมพงษ์, 2543; David, 1999) ดังนี้

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) = qB_0 v_z \hat{j} - qB_0 v_y \hat{k} \quad (1)$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (Atamp, 1990) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ มวล m (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560) ดังสมการที่ 2

$$qB_0 v_z \hat{j} - qB_0 v_y \hat{k} + f_0 \sin^2(\omega_f t) \hat{j} = m \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + m \frac{dv_z}{dt} \hat{k} \quad (2)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในทิศทาง $\hat{j}$ จะได้สมการการเคลื่อนที่ ดังสมการที่ 3

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{qB_0}{m} v_z + \frac{f_0}{m} \sin^2(\omega_f t) \quad (3)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในทิศทาง $\hat{k}$ จะได้สมการการเคลื่อนที่ ดังสมการที่ 4

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{qB_0}{m} v_y \quad (4)$$

ต่อไปนำสมการที่ 3 ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้ดังสมการที่ 5

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = \frac{qB_0}{m} \frac{dv_z}{dt} + \frac{2f_0}{m} \omega_f \sin(\omega_f t) \cos(\omega_f t) \quad (5)$$

นำสมการที่ 4 แทนในสมการที่ 5 แล้วใช้ $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ จะได้ดังสมการที่ 6

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 v_y = \frac{f_0 \omega_f}{m} \sin(2\omega_f t) \quad (6)$$

เรากำหนดให้ $\omega_B = qB_0/m$ แทนในสมการที่ 6 จะได้ดังสมการที่ 7

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_B^2 v_y = \frac{f_0 \omega_f}{m} \sin(2\omega_f t) \quad (7)$$

สมการที่ 7 จะถูกเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองแบบไม่เอกพันธ์ (Tikjha et al., 2018) ต่อมาทำการหาอนุพันธ์ของสมการที่ 4 เทียบกับเวลา จะได้ดังสมการที่ 8 ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dv_z}{dt} \right) = - \left(\frac{qB_0}{m} \right) \frac{dv_y}{dt}$$

นำสมการที่ 3 แทนลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_z}{dt^2} &= - \frac{qB_0}{m} \left(\frac{qB_0}{m} v_z + \frac{f_0}{m} \sin^2(\omega_f t) \right) \\ \frac{d^2 v_z}{dt^2} + \omega_B^2 v_z &= - \frac{qB_0 f_0}{m^2} \sin^2(\omega_f t) \end{aligned} \quad (8)$$

สมการที่ 8 จะถูกเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองแบบไม่เอกพันธ์ ต่อมาทำการหาผลเฉลยของสมการที่ 7 คือ ความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าในแนวแกน y จะได้ $v_y(t) = v_y^h(t) + v_y^i(t)$ โดยที่งานวิจัยนี้หาผลเฉลย $v_y^h(t)$ จากสมการที่ 7 ทางขวามือของสมการที่ 7 จะมีค่าเป็นศูนย์และใช้สมการช่วย จะได้ดังสมการที่ 9

$$v_y^h(t) = A \sin(\omega_B t + \varphi) \quad (9)$$

ต่อมาในงานวิจัยนี้ได้ทำการหาผลเฉลยเฉพาะ $v_y^i(t)$ ของสมการที่ 7 $v_y^i(t) = u_{y1}(t)v_{y1}(t) + u_{y2}(t)v_{y2}(t)$ โดยใช้เทคนิควรอนสเกียน ซึ่งต้องมีการกำหนด $v_{y1}(t) = \cos(\omega_B t)$ $v_{y2}(t) = \sin(\omega_B t)$ และ $f(t) = (f_0 \omega_f / m) \sin(2\omega_f t)$ ทำการหาดีเทอร์มิแนนต์ดังสมการที่ 10

$$W_{sk} = \begin{vmatrix} v_{y1}(t) & v_{y2}(t) \\ v'_{y1}(t) & v'_{y2}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega_B t) & \sin(\omega_B t) \\ -\omega_B \sin(\omega_B t) & \omega_B \cos(\omega_B t) \end{vmatrix} = \omega_B \quad (10)$$

ต่อมาหาดีเทอร์มิแนนต์ของ W_{sk1} ในกรณีที่มี $f(t)$ ดังสมการที่ 11

$$W_{sk1} = \begin{vmatrix} 0 & v_{y2}(t) \\ f(t) & v'_{y2}(t) \end{vmatrix} = - \frac{f_0 \omega_f}{m} \sin(\omega_B t) \sin(2\omega_f t) \quad (11)$$

ต่อมาหาดีเทอร์มิแนนต์ของ W_{sk2} ในกรณีที่มี $f(t)$ ดังสมการที่ 12

$$W_{sk2} = \begin{vmatrix} v_{y1}(t) & 0 \\ v'_{y1}(t) & f(t) \end{vmatrix} = \frac{f_0 \omega_f}{m} \cos(\omega_B t) \sin(2\omega_f t) \quad (12)$$

นำสมการที่ 11 หารสมการที่ 10 และทำการอินทิเกรตเทียบกับ t (Moonsri et al., 2022) จะได้ดังสมการที่ 13

$$\begin{aligned}\frac{du_{y1}}{dt} &= \frac{W_{sk1}}{W_{sk}} = -\frac{f_0\omega_f}{\omega_B m} \sin(\omega_B t) \sin(2\omega_f t) \\ u_{y1}(t) &= -\frac{f_0\omega_f}{2\omega_B m} \left(\frac{\sin((\omega_B - 2\omega_f)t)}{(\omega_B - 2\omega_f)} - \frac{\sin((\omega_B + 2\omega_f)t)}{(\omega_B + 2\omega_f)} \right)\end{aligned}\quad (13)$$

ต่อมานำสมการที่ 12 หาคด้วยสมการที่ 10 และทำการอินทิเกรตเทียบกับ t จะได้ดังสมการที่ 14

$$\begin{aligned}\frac{du_{y2}}{dt} &= \frac{W_{sk2}}{W_{sk}} = \frac{f_0\omega_f}{\omega_B m} \cos(\omega_B t) \sin(2\omega_f t) \\ u_{y2}(t) &= \frac{f_0\omega_f}{2\omega_B m} \left(\frac{(1 - \cos((2\omega_f - \omega_B)t))}{(2\omega_f - \omega_B)} + \frac{(1 - \cos((2\omega_f + \omega_B)t))}{(2\omega_f + \omega_B)} \right)\end{aligned}\quad (14)$$

นำสมการที่ 13 และสมการที่ 14 และ $v_{y1}(t)$, $v_{y2}(t)$ แทนลงใน $v_y^i(t)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยเฉพาะของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า (Hutem, 2024; Nawafleh, 2011) จะได้ดังสมการที่ 15

$$\begin{aligned}v_y(t) &= A \sin(\omega_B t + \phi) + \frac{f_0\omega_f \cos(\omega_B t)}{2\omega_B m} \left(\frac{\sin((\omega_B + 2\omega_f)t)}{(\omega_B + 2\omega_f)} - \frac{\sin((\omega_B - 2\omega_f)t)}{(\omega_B - 2\omega_f)} \right) \\ &+ \frac{f_0\omega_f \sin(\omega_B t)}{2\omega_B m} \left(\frac{(1 - \cos((2\omega_f - \omega_B)t))}{(2\omega_f - \omega_B)} + \frac{(1 - \cos((2\omega_f + \omega_B)t))}{(2\omega_f + \omega_B)} \right)\end{aligned}\quad (15)$$

สมการที่ 15 เป็นความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y (Masongnoen et al., 2021; Wang & Hezabr, 2023) ซึ่งมีลักษณะเป็นการสั่นแบบกลุ่มคลื่น (Wave group) ทำการหาผลเฉลยของสมการที่ 8 คือ ความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าในแนวแกน z ดังสมการที่ 16

$$\begin{aligned}v_z(t) &= A \sin(\omega_B t + \phi) \\ &+ \frac{qB_0 f_0 \cos(\omega_B t)}{2\omega_B m^2} \left(\frac{(1 - \cos(\omega_B t))}{\omega_B} - \frac{(1 - \cos((\omega_B - 2\omega_f)t))}{2(\omega_B - 2\omega_f)} + \frac{(1 - \cos((\omega_B + 2\omega_f)t))}{2(\omega_B + 2\omega_f)} \right) \\ &+ \frac{qB_0 f_0 \sin(\omega_B t)}{2\omega_B m^2} \left(\frac{\sin((\omega_B - 2\omega_f)t)}{2(\omega_B - 2\omega_f)} + \frac{\sin((\omega_B + 2\omega_f)t)}{2(\omega_B + 2\omega_f)} - \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

2. การพิจารณาความสัมพันธ์ตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และตัวแปรควบคุม

จากสมการที่ 15-16 แสดงถึงลักษณะการเคลื่อนที่ของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ตามลำดับ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้มีการกำหนดตัวแปรต้น เช่น

ประจุไฟฟ้า q แรงเริ่มต้นของแรงภายนอก f_0 ขนาดของความถี่เชิงเส้น f และขนาดของสนามแม่เหล็กเริ่มต้น B_0 ในทิศ i ตัวแปรตาม คือ ความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ และตัวแปรควบคุม ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังตารางที่ 1 เพื่อทำการศึกษาลักษณะการเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าที่มีความเร็วในแนวแกน y และแกน z ในลักษณะการสั่นแบบกลุ่มคลื่นที่มีความถี่เชิงมุมเปลี่ยนค่าเพียงเล็กน้อย และดูลักษณะความสมมาตรของกลุ่มคลื่นในความเร็วของประจุไฟฟ้า ดังตารางที่ 1 ได้มีการแสดงสีของเส้นกราฟความเร็วของประจุไฟฟ้าในแนวแกน y คือ $v_y(t)$ และแสดงสีของเส้นกราฟความเร็วของประจุไฟฟ้าในแนวแกน z คือ $v_z(t)$

ตารางที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และตัวแปรควบคุม

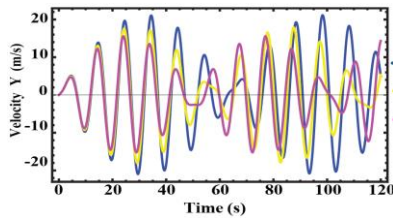
ปริมาณคำนวณ (ตัวแปรตาม)	ตัวแปรควบคุม	ตัวแปรต้น $v_y(t)$	ตัวแปรต้น $v_z(t)$
ความเร็วประจุไฟฟ้า $v_y(t)$ และ ความเร็วประจุไฟฟ้า $v_z(t)$	$m = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$. $A = 0.5 \text{ a.u.}$	$q_1 = 0.0250 \text{ C}$ 	$q_1 = 0.0250 \text{ C}$ 
	$B_0 = 0.055 \text{ T}$. $f = 0.047 \text{ Hz}$	$q_2 = 0.0255 \text{ C}$ 	$q_2 = 0.0255 \text{ C}$ 
	$f_0 = 0.01 \text{ N}$. $\varphi = 0 \text{ a.u.}$	$q_3 = 0.0260 \text{ C}$ 	$q_3 = 0.0260 \text{ C}$ 
	$m = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$. $A = 0.5 \text{ a.u.}$	$f_{10} = 0.010 \text{ N}$ 	$f_{10} = 0.010 \text{ N}$ 
	$B_0 = 0.055 \text{ T}$. $f = 0.047 \text{ Hz}$	$f_{20} = 0.013 \text{ N}$ 	$f_{20} = 0.013 \text{ N}$ 
	$q = 0.025 \text{ C}$. $\varphi = 0 \text{ a.u.}$	$f_{30} = 0.016 \text{ N}$ 	$f_{30} = 0.016 \text{ N}$ 
	$m = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$. $A = 0.5 \text{ a.u.}$	$f_1 = 0.045 \text{ Hz}$ 	$f_1 = 0.045 \text{ Hz}$ 
	$B_0 = 0.055 \text{ T}$. $f_0 = 0.01 \text{ N}$.	$f_2 = 0.046 \text{ Hz}$ 	$f_2 = 0.046 \text{ Hz}$ 
	$q = 0.025 \text{ C}$. $\varphi = 0 \text{ a.u.}$	$f_3 = 0.047 \text{ Hz}$ 	$f_3 = 0.047 \text{ Hz}$ 
	$m = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$. $A = 0.5 \text{ a.u.}$	$B_{10} = 0.055 \text{ T}$ 	$B_{10} = 0.055 \text{ T}$ 
	$f = 0.047 \text{ Hz}$ $f_0 = 0.01 \text{ N}$.	$B_{20} = 0.056 \text{ T}$ 	$B_{20} = 0.056 \text{ T}$ 
	$q = 0.025 \text{ C}$. $\varphi = 0 \text{ a.u.}$	$B_{30} = 0.057 \text{ T}$ 	$B_{30} = 0.057 \text{ T}$ 

ผลการวิจัย

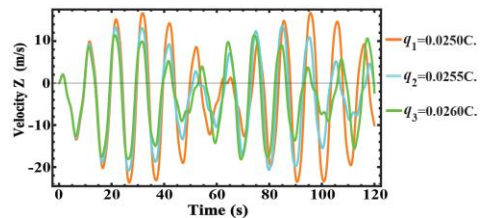
ผลการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ภายในสนามแม่เหล็กสอดคล้องกับความสัมพันธ์ตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และตัวแปรควบคุม

สมการที่ 15 คือ ความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และสมการที่ 16 คือ ความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน z ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาซึ่งในงานวิจัยนี้แสดงผลการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ทั้งสองแกน

ดั่งภาพที่ 2 ถึงภาพที่ 5 เริ่มต้นนำสมการที่ 15 และสมการที่ 16 มาแสดงการเปรียบเทียบ โดยมีตัวแปรต้นที่ทำการเปลี่ยนแปลงค่า คือ ขนาดของประจุไฟฟ้า $q_1 = 0.0250 \text{ C}$. $q_2 = 0.0255 \text{ C}$. $q_3 = 0.0260 \text{ C}$. ดั่งภาพที่ 2(a) และภาพที่ 2(b)



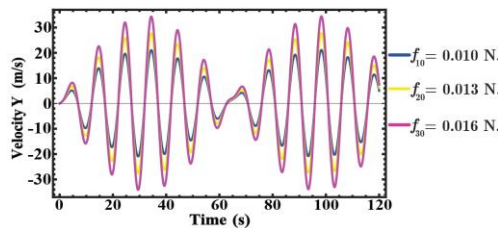
(a)



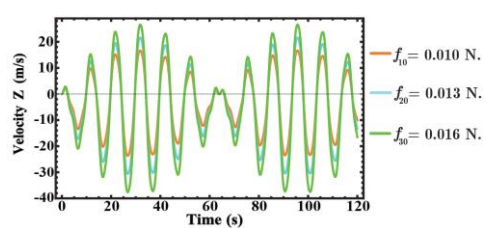
(b)

ภาพที่ 2 (a) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y ในกรณี que เปลี่ยนแปลงขนาดของประจุไฟฟ้า q และ (b) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน z ในกรณี que เปลี่ยนแปลงขนาดของประจุไฟฟ้า q

นำสมการที่ 15 และสมการที่ 16 มาแสดงการเปรียบเทียบ โดยมีตัวแปรต้นที่ทำการเปลี่ยนแปลงค่า คือ ขนาดของแรงเริ่มต้น $f_{10} = 0.010 \text{ N}$. $f_{20} = 0.013 \text{ N}$. $f_{30} = 0.016 \text{ N}$. ดั่งภาพที่ 3(a) และภาพที่ 3(b)



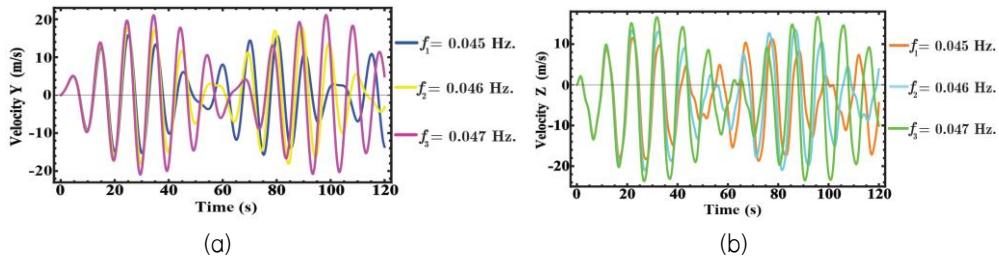
(a)



(b)

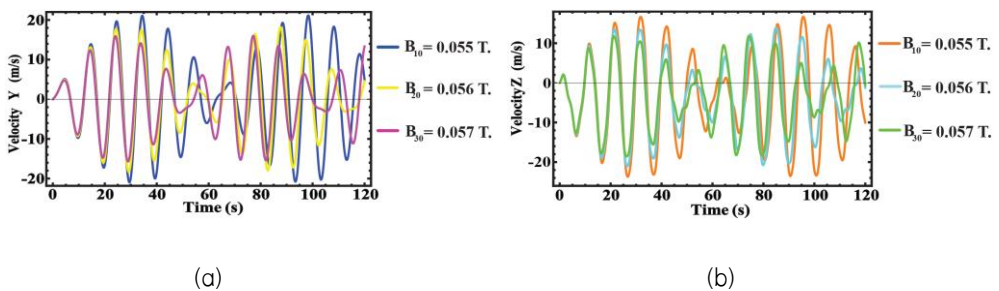
ภาพที่ 3 (a) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y ในกรณี que เปลี่ยนแปลงขนาดของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 และ (b) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน z ในกรณี que เปลี่ยนแปลงขนาดของแรงภายนอกเริ่มต้น f_0

นำสมการที่ 15 และสมการที่ 16 มาแสดงการเปรียบเทียบ โดยมีตัวแปรต้นที่ทำการเปลี่ยนแปลงค่า คือ ขนาดของความถี่เชิงเส้น $f_1 = 0.045 \text{ Hz}$ $f_2 = 0.046 \text{ Hz}$ $f_3 = 0.047 \text{ Hz}$ ดั่งภาพที่ 4(a)–(b)



ภาพที่ 4 (a) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงขนาดของความถี่เชิงเส้น f และ (b) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน z ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงขนาดของความถี่เชิงเส้น f

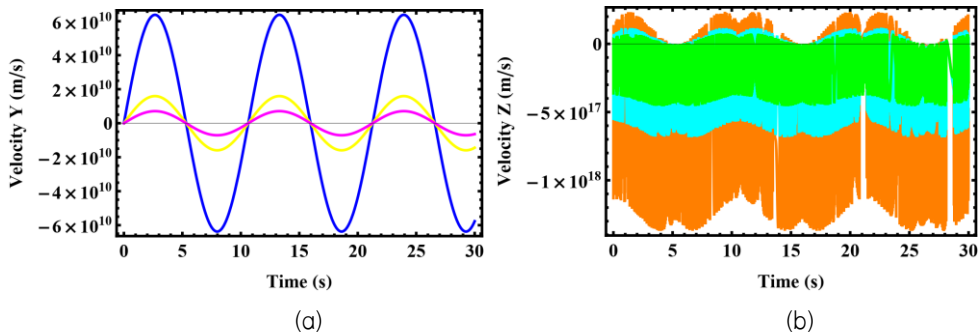
นำสมการที่ 15 และสมการที่ 16 มาแสดงการเปรียบเทียบ โดยมีตัวแปรต้นที่ทำให้การเปลี่ยนแปลงค่า คือ ขนาดของสนามแม่เหล็กเริ่มต้น $B_{10} = 0.055 T$, $B_{20} = 0.056 T$, $B_{30} = 0.057 T$. ดังภาพที่ 5(a)–(b)



ภาพที่ 5 (a) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y กรณีที่เปลี่ยนแปลงขนาดของสนามแม่เหล็กเริ่มต้น B_0 และ (b) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน z ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงขนาดของสนามแม่เหล็กเริ่มต้น B_0

จากตารางที่ 1 งานวิจัยนี้ได้กำหนดค่าเชิงตัวเลขของตัวแปรต้นประจุไฟฟ้า ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น ค่าความถี่ และค่าสนามแม่เหล็ก ให้มีความสอดคล้องกับสมการที่ 15 และสมการที่ 16 ซึ่งสมการที่ 16 ลักษณะของสมการความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน z ไม่เหมือนกับสมการความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y คือ มีพารามิเตอร์ของมวลอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เป็นกำลังสอง และอีกเหตุผลหนึ่ง คือ การคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ทั้งสองแกนนี้ใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันซึ่งไม่ได้ใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพ จึงไม่ได้พิจารณากรอบอ้างอิงที่มีการเคลื่อนที่ และงานวิจัยนี้ได้กำหนดค่าพารามิเตอร์ให้สอดคล้องกับข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกวิชาการ สอน. ประจำปี 2541

และหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมฟิสิกส์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 4 ในเนื้อหาไฟฟ้าสถิต และหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมฟิสิกส์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 5 ในเนื้อหาแม่เหล็กไฟฟ้า ต่อไปทำการแสดงพล็อตกราฟของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z โดยการกำหนดมวลของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ เป็นมวลโปรตอน $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $A = 0.5 \text{ a.u.}$, $B_0 = 0.055 \text{ T}$, $f = 0.047 \text{ Hz}$, $f_0 = 0.01 \text{ N}$, $\varphi = 0 \text{ a.u.}$ ส่วนขนาดประจุไฟฟ้า เป็นจำนวนเท่า $q_1 = 1.0 (1.6 \times 10^{-19}) \text{ C}$, $q_2 = 2.0 (1.6 \times 10^{-19}) \text{ C}$ และ $q_3 = 3.0 (1.6 \times 10^{-19}) \text{ C}$ ดังภาพที่ 6(a)–(b)



ภาพที่ 6 (a) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงขนาดของประจุไฟฟ้า q และ (b) แสดงความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน z ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงขนาดของประจุไฟฟ้า q

จากภาพที่ 6(b) จะเห็นได้ว่าเวลาการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในเวลาน้อยมากเส้นกราฟไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ได้จึงเป็นเหตุผลให้ต้องกำหนดค่าพารามิเตอร์ให้เหมือนมัธยมศึกษาตอนปลาย

อภิปรายผล

จากภาพที่ 2(a) และภาพที่ 2(b) ถ้าขนาดของประจุไฟฟ้า q มีค่าเพิ่มมากขึ้นทำให้ขนาดความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z มีขนาดลดลงสำหรับการเคลื่อนที่ภายใต้สนามแม่เหล็กขนาด $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ สม่าเสมอ (Ranveer, 2018) ซึ่งอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ มีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบคลื่นเหมือนกลุ่มคลื่น (Wave groups) หรือระลอกคลื่น (Wave packets) ถ้าขนาดของประจุไฟฟ้า q มีค่าเพิ่มมากขึ้นพิจารณาที่เวลามากขึ้นขนาดของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z มีจำนวนขนาดของลูกกลุ่มคลื่นเพิ่มมากขึ้นตามเส้นกราฟสีชมพู และเส้นกราฟสีเขียวอ่อนทำให้อนุภาคประจุไฟฟ้ามีการสั่นขึ้นลงเป็นแบบ

กลุ่มคลื่นเร็วมากขึ้นเป็นผลมาจากแรงภายนอก $f_0 \sin^2(\omega_f t)$ จากภาพที่ 3(a) และภาพที่ 3(b) โดยมีตัวแปรต้นที่ทำการเปลี่ยนแปลงค่า คือ ขนาดของแรงเริ่มต้น f_0 ดังนี้ $f_{10} = 0.010 N$, $f_{20} = 0.013 N$, และ $f_{30} = 0.016 N$. ถ้าขนาดของแรงเริ่มต้นมีค่าเพิ่มมากขึ้นทำให้ขนาดความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z มีขนาดเพิ่มขึ้นไปด้วย ถ้าขนาดของแรงเริ่มต้นมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อพิจารณา ณ ที่เวลามากขึ้นทำให้ขนาดความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z มีลักษณะเป็นลูกกลุ่มคลื่นคงที่ ถ้าทำการเปรียบเทียบขนาดความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y กับขนาดความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแกน z จะเห็นได้ว่าขนาดของความเร็ว $v_y(t)$ มีขนาดมากกว่า $v_z(t)$ ดังนี้ $v_y(t) = 34 \text{ m/s}$ ส่วน $v_z(t) = 26 \text{ m/s}$ โดยประมาณ ณ ช่วงเวลา 120–140 วินาทีทั้ง $v_y(t)$ และ $v_z(t)$ เกิดการแยกออกของแอมพลิจูดของความเร็วทั้งสอง $+q$ (Repko, Repko & Allan, 1991; William, Richard & Richard 1994) โดยการแยกออกของแอมพลิจูดของความเร็วของ $v_y(t)$ มีการแยกออกมากกว่าความเร็วของ $v_z(t)$ ตามเส้นกราฟสีชมพู และเส้นกราฟสีเขียวอ่อน

จากภาพที่ 4(a) และภาพที่ 4(b) โดยมีตัวแปรต้นที่ทำการเปลี่ยนแปลงค่า คือ ขนาดของความถี่เชิงเส้น $f_1 = 0.045 \text{ Hz}$, $f_2 = 0.046 \text{ Hz}$ และ $f_3 = 0.047 \text{ Hz}$ ถ้าขนาดของความถี่เชิงเส้นมีค่ามากขึ้นส่งผลให้ขนาดของความเร็ว $v_y(t)$ และ $v_z(t)$ มีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก $v_y(t) = 12 \rightarrow 22 \text{ m/s}$ โดยประมาณ และ $v_z(t) = 8 \rightarrow 16 \text{ m/s}$ โดยประมาณ และถ้าขนาดของความถี่เชิงเส้นมีค่ามากขึ้น ณ เวลาที่เพิ่มขึ้นส่งผลให้ขนาดของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ที่แสดงพฤติกรรมเป็นกลุ่มคลื่นลดลงจาก 3 ลูก กลุ่มคลื่นกลายเป็น 2 ลูกกลุ่มคลื่นจากเส้นกราฟสีน้ำเงินเปลี่ยนเส้นกราฟสีชมพู และจากเส้นกราฟสีน้ำตาลเปลี่ยนเส้นกราฟสีเขียวอ่อนตามลำดับ จากภาพที่ 5(a) และภาพที่ 5(b) โดยมีตัวแปรต้นที่ทำการเปลี่ยนแปลงค่า คือ สนามแม่เหล็กเริ่มต้น B_0 ดังนี้ $B_{10} = 0.055 T$, $B_{20} = 0.056 T$, และ $B_{30} = 0.057 T$. ถ้าขนาดของสนามแม่เหล็กเริ่มต้นมีค่าเพิ่มมากขึ้นส่งผลให้ขนาดของความเร็วอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z มีขนาดลดลง เช่น $v_y(t) = 15 \rightarrow 12 \text{ m/s}$ และ $v_z(t) = 16 \rightarrow 10 \text{ m/s}$ โดยประมาณ แต่ถ้าขนาดของสนามแม่เหล็กเริ่มต้นมีค่าเพิ่มมากขึ้น ณ เวลาที่เพิ่มมากขึ้น เกิดจำนวนลูกกลุ่มคลื่นที่เพิ่มมากขึ้นทั้งความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z เช่น $v_y(t)$ ณ สนามแม่เหล็กเริ่มต้น $B_{10} = 0.055 T$, ถูกเปลี่ยนเป็น $B_{30} = 0.057 T$ ส่งผลให้จำนวนลูกกลุ่มคลื่นเปลี่ยนจาก 3 ลูกกลุ่มคลื่นกลายเป็น 3.50 ลูกกลุ่มคลื่น $v_z(t)$ (Hutem, 2024) ก็เช่นกัน ข้อเสนอแนะในการพัฒนาเพื่อศึกษางานวิจัยนี้ต่อไปจึงควรพิจารณาเพิ่มแรงภายนอกในทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{k}$ แกน z และควรเพิ่มเทคนิคการสร้างกราฟความเร็วแบบ 3 มิติ ที่มีการปรับเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์

สรุปผลการวิจัย

ค่าของพารามิเตอร์ของประจุไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กเริ่มต้นแปรผกผันกับขนาดของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ค่าพารามิเตอร์ของความถี่เชิงเส้นแปรผันโดยตรงกับขนาดของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ส่วนค่าพารามิเตอร์ของแรงเริ่มต้นแปรผันโดยตรงกับขนาดของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการเรียนการสอนที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อของเรื่องแม่เหล็กไฟฟ้าในรายวิชาฟิสิกส์โดยการใช้สมการความเร็วของประจุไฟฟ้า $+q$ ในแนวแกน y และแกน z ดังสมการที่ 15

$$v_y(t) = A \sin(\omega_B t + \varphi) + \frac{f_0 \omega_f \cos(\omega_B t)}{2\omega_B m} \left(\frac{\sin((\omega_B + 2\omega_f)t)}{(\omega_B + 2\omega_f)} - \frac{\sin((\omega_B - 2\omega_f)t)}{(\omega_B - 2\omega_f)} \right) + \frac{f_0 \omega_f \sin(\omega_B t)}{2\omega_B m} \left(\frac{(1 - \cos((2\omega_f - \omega_B)t))}{(2\omega_f - \omega_B)} + \frac{(1 - \cos((2\omega_f + \omega_B)t))}{(2\omega_f + \omega_B)} \right) \quad (15)$$

และสมการที่ 16

$$v_z(t) = A \sin(\omega_B t + \varphi) + \frac{qB_0 f_0 \cos(\omega_B t)}{2\omega_B m^2} \left(\frac{(1 - \cos(\omega_B t))}{\omega_B} - \frac{(1 - \cos((\omega_B - 2\omega_f)t))}{2(\omega_B - 2\omega_f)} + \frac{(1 - \cos((\omega_B + 2\omega_f)t))}{2(\omega_B + 2\omega_f)} \right) + \frac{qB_0 f_0 \sin(\omega_B t)}{2\omega_B m^2} \left(\frac{\sin((\omega_B - 2\omega_f)t)}{2(\omega_B - 2\omega_f)} + \frac{\sin((\omega_B + 2\omega_f)t)}{2(\omega_B + 2\omega_f)} - \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B} \right) \quad (16)$$

ตามลำดับมาสร้างกราฟความเร็วแบบที่สามารถเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เชิงตัวเลขได้ภายในหน้าจอเพียงหน้าจอเดียวโดยใช้ภาษาไพทอนหรือโปรแกรมทางคณิตศาสตร์

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ และสาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์ ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่และเวลาในการทำงานวิจัยจนกระทั่งงานสำเร็จลงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- วูทธิพันธุ์ ปรัชญพทุทธิ, และสุวรรณ คูสำราญ. (2548). **ฟิสิกส์ (แม่เหล็กไฟฟ้า)**. กรุงเทพฯ: โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน. มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา.
- สมพงษ์ ใจดี. (2543). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 3**. (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ฟิสิกส์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีฝ่ายบริการวิชาการและบริหารทรัพยากร.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ฟิสิกส์ เล่ม 5 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีฝ่ายบริการวิชาการและบริหารทรัพยากร.
- Atamp, A. (1990). **Introduction to classical mechanics**. United States America: Prentice–Hall.
- David, J.G. (1999). **Introduction to electrodynamics**. (3th edition). New Jersey: Prentice–Hall International, Inc.
- Dubik, A., & Malachowski, M.J. (2021). Basic features of a charged particle dynamics in a laser beam with static axial magnetic field. **OPTO–ELECTRONICS REVIEW**, 17(4), 275–286.
- Goldstein, P.S. (2002). **Classical Mechanics**. (3th edition). United States America: Prentice–Hall.
- Hutem, A. (2024). Reckoning of time–velocity of change particle activated by time–dependent Cosine function external force in motion into uniform magnetic field. **Journal of Science and Technology CRRU**, 3(1), 35–47.
- Hutem, A., & Masoongnoen, N. (2021). SOLVE THE SERIES OF RLC CIRCUIT VIA THE TIME–DEPENDENT VOLTAGE SINE FUNCTION USING WRONSKIAN'S OF DIFFERENTIAL EQUATION. **PSRU Journal of Science and Technology**, 6(2), 22–35.
- Kuaykaew, S., Kerdmee, S., Banyenugam, P., Moonsri, P., & Hutem, A. (2016). The Analytical Description of Projectile Motion of Cricket Ball in a Linear Resisting Medium the Storm Force. **Applied Mechanics and Materials**, 855, 188–191.
- Masoongnoen, N., Suwanwong S., Ellis, T., & Hutem, A. (2021). Evaluation of the Time–dependent Electric Charge in the Series of RLC Circuit Loop Under the Time–dependent Voltage Cosine Function. **Journal of Science and Technology Buriram Rajabhat University**, 5(2), 21–34.
- Moonsri, P., Pakamwang, J., & Hutem, A. (2022). Calculation of electric charge, electric field, and electric potential of spherical conductors containing volume charge density of the sine function. **VRU Research and Development Journal Science and Technology**, 17(3), 61–74.
- Nawafleh, K.I. (2011). Motion of a Charged Particle in a Strong Magnetic Field as a Lagrangian Linear in Velocities. **Jordan Journal of Physics**, 4(1), 39–42.
- Pétri, J. (2020). A relativistic particle pusher for ultra–strong electromagnetic fields. **J. Plasma Phys.**, 86(4), 1–38.

- Ranveer, K.S. (2018). **On the classical dynamics of charged particle in special class of spatially non-uniform magnetic field**. Retrieved September, 11, 2023, from <https://arxiv.org/pdf/1807.05216>
- Repko, J.M., Repko, W.W., & Allan, S. (1991). Charged particle trajectories in simple nonuniform magnetic fields. **American Journal of Physics**, 59(7), 652–655.
- Riley, K.F., & Hobson, M.P. (2006). **Mathematical Methods for Physics and Engineering**. (3th edition). New York: Cambridge University Press.
- Tikjha, W., Normai, T., Jittburus, U., & Pumila, A. (2018). Periodic with period 4 of a piecewise linear system of differential equations with initial conditions being some points on positive y axis. **PSRU Journal of Science and Technology**, 3(2), 26–34.
- Wang, Y., & Hezabr, A. (2023). Knowledge Analysis of Charged Particle Motion in Uniform Electromagnetic Field Based on Maxwell Equation. **Applied Mathematics and Nonlinear Sciences**, 8(1), 1539–1550.
- William, M., Richard, E., & Richard, N. (1994). Relativistic (an)harmonic oscillator. **American Journal of Physics**, 62(6), 531–535.