การเป็นคาบ 4 ของระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วงที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นบางจุดบนแกน Y ทางบวก

PERIODIC WITH PERIOD 4 OF A PIECEWISE LINEAR SYSTEM OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH INITIAL CONDITIONS BEING SOME POINTS ON POSITIVE Y AXIS

วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ* ฐิติกานต์ หน่อใหม่ อุไรวรรณ จิตต์บุรุษ และอรรถพล ภูมิลา

Wirot Tikjha* Thitikhan Normai Uraiwan Jittburus and Attaphol Pumila

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

*corresponding author e-mail: wirottik@psru.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วง $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 3$ และ $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 1$ จากการสำรวจสามารถหาผลเฉลยที่เป็นคาบ 4 ได้และพิสูจน์ได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวถูกดึงดูดด้วยวง 4 ของระบบสมการที่มีอยู่สองวงเราอธิบายพฤติกรรมของระบบสมการผ่านข้อความอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

คำสำคัญ: สมการเชิงผลต่าง ผลเฉลยที่เป็นคาบ วงของการเป็นคาบ

Abstract

This article presents a study of solution to a piecewise linear system of difference equations $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 3$ and $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ with initial condition $x_0 = 0$ and $y_0 \geq 1$. After investigations, we found some periodic with period 4 solutions and we proved that solutions with the initial condition are attracted by either one of two period 4 cycles. We explain behavior of solutions to the system via a mathematical inductive statement.

Keywords: difference equation, periodic solution, periodic cycle

บทนำ

การศึกษาความเสถียรกำกับเชิงเส้นของระบบสมการเชิงผลต่างส่วนใหญ่จะทำการศึกษาโดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการหาจาโคเบียนซึ่งต้องทำการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่สนใจ แต่ทฤษฎีบทดังกล่าวไม่สามารถประยุกต์ได้กับระบบสมการที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์เนื่องจากระบบสมการที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจุด ดังนั้นระบบสมการเชิงผลต่างที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์จึงต้องสร้างทฤษฎีบทเฉพาะมาทำการศึกษาความเสถียรกำกับเชิงเส้นระบบสมการที่มีค่าสัมบูรณ์เกิดปรากฏการณ์ chaos ได้กล่าวไว้ใน Devanney (1984) และ Barnsley et. al. (1991) และในปัญหาปลายเปิดซึ่งได้ถูกกล่าวไว้ใน Grove and Ladas (2005) ที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ดังนี้

$$x_{n+1} = |x_n| + ay_n + b, y_{n+1} = x_n + c\,|\,y_n\,| + d,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) \in R^2$ พารามิเตอร์ a,b,c และ d แต่ละจำนวนเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ -1 ถึง 1 มีผู้ศึกษาผลเฉลยของระบบสมการย่อยของระบบสมการ (1) เช่น Grove et al., (2012) ได้ค้นพบว่าพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1, y_{n+1} = x_n + |\,\mathrm{y}_n\,|,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

พบว่าทุก ๆ ผลเฉลยของระบบสมการ (2) เป็นไพรม์พีเรียด 3 ในที่สุด Tikjha et al. (2015) ได้ศึกษาระบบสมการเชิงผลต่าง

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2, y_{n+1} = x_n + |\,\mathrm{y}_n\,|,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

พบว่าทุก ๆ ผลเฉลยของระบบสมการ (3) เป็นไพรม์พีเรียด 3 ในที่สุดผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาระบบสมการที่ใกล้เคียงกับระบบสมการ (3) ได้แก่ระบบสมการ

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - b, y_{n+1} = x_n - |\,\mathrm{y}_n\,| + 1, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

เมื่อ b เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จันทิมา และคณะ (2560) ได้ศึกษาระบบสมการ (4) ดังกล่าวที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $0 < y_0 < 1$ และ $b = 3$ ทำให้ทราบว่าผลเฉลยของระบบสมการเป็นจุดสมดุลในที่สุดในบทความนี้ได้ศึกษาพฤติกรรมของระบบสมการ (4) ต่อจากบทความของ จันทิมา และคณะ (2560) โดยเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 1$

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อเป็นประโยชน์ทางวิชาการที่ได้ทราบพฤติกรรมโดยรวมของระบบสมการ (4) และอาจเป็นเครื่องมือให้นักคณิตศาสตร์นำไปใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไป

วิธีดำเนินการวิจัย

ทำการศึกษาบทความสมการเชิงผลต่างที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์จากนั้นทำการสำรวจพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการ (4) โดยใช้คอมพิวเตอร์โดยวิธีการทำซ้ำ(iteration) และเปลี่ยนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) เช่นเดียวกับบทความ Grove et al. (2012) Tikjha et al. (2010) และ Tikjha et al. (2015) เป็นค่าต่างๆ ที่มากพอที่จะสามารถคาดเดาพฤติกรรมของผลเฉลยโดยรวมได้ใน R^2 โดยที่ $x_0 = 0$ และ $y_0 \ge 1$ จากนั้นนำผลจากการสำรวจมาสร้างข้อความคาดการณ์และทำการพิสูจน์ซึ่งการพิสูจน์จำเป็นต้องอาศัยบทนิยามใน Grove and Ladas. (2005) ที่สำคัญดังต่อไปนี้

สมการเชิงผลต่าง (difference equation) อันดับ $k+1$ คือ สมการที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$x_{n+1} = f\left(x_n,\ x_{n-1},\ \dots,\ x_{n-k}\right), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \tag{5}$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากเซต J^{k+1} ไปยัง J ซึ่งเซต J เป็นช่วงบนจำนวนจริงหรือยูเนียนของช่วงบนจำนวนจริงและ J อาจเป็นเซตไม่ต่อเนื่อง ผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงผลต่าง (5) คือลำดับ $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงผลต่าง (5) สำหรับทุกๆ $n \ge 0$ เมื่อกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) $x_{-k},\ x_{-k+1},\ \dots,\ x_0 \in J$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_1 &= f\left(x_0,\ x_{-1},\ \dots,\ x_{-k}\right) \\ x_2 &= f\left(x_1,\ x_0,\ \dots,\ x_{-k+1}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

และได้ว่า $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (5) สำหรับทุกๆ $n \ge -k$ และสำหรับแต่ละเงื่อนไขเริ่มต้นจะได้ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ เพียงชุดเดียว ผลเฉลยของสมการเชิงผลต่าง (5) ซึ่งเป็นค่าคงที่ทุก ๆ $n \ge -k$ ถูกเรียกว่า ผลเฉลยสมดุล (equilibrium solution) ของสมการ (5) ถ้า $x_n = \bar{x}$ เป็นผลเฉลยสมดุล สำหรับทุกๆ $n \ge -k$ แล้ว $\bar{x}$ จะถูกเรียกว่า จุดสมดุล (equilibrium point) ของสมการ (5) ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ ของสมการเชิงผลต่าง (5) จะถูกเรียกว่าเป็น คาบ p (periodic with period p) ถ้ามีจำนวนเต็ม $p \ge 1$ ซึ่ง

$$x_{n+p} = x_n \text{ สำหรับทุกๆ } n \ge -k \tag{6}$$

เห็นได้ชัดว่าจุดสมดุลเป็นคาบ p สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก p เราจะกล่าวว่า ผลเฉลยเป็นไพรม์พีเรียด p (prime period p) ถ้า p เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (6) ในกรณีนี้เรียก p – อันดับ $\left(x_{n+1},\ x_{n+2},\ \dots,\ x_{n+p}\right)$ ว่าเป็น วง p (p – cycle) ของสมการ (5) ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ ของระบบสมการ (5) อาจยังไม่เป็นสมาชิกของวงหรือเป็นไพร์มพีเรียดตั้งแต่แรกหากทำการทำซ้ำผลเฉลยจนทำให้ผลเฉลยอยู่ในวงหรือผลเฉลยเป็นไพร์มพีเรียด

ผลเฉลยดังกล่าวถูกเรียกว่าคาบ p ในที่สุด (eventually prime period p) นั่นคือ มีจำนวนเต็ม $N \geq -k$ ซึ่ง $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ เป็นคาบ p ได้แก่ $x_{n+p} = x_n$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$

กำหนดให้ $L = \{(x, y) | x = 0 \, , \, y \geq 1\}$, $u_n = \dfrac{1+2^{2n}}{2^{2n}}$, $\delta_n = 2^{2n+1} - 3$ และ $\begin{pmatrix} x_0, y_0 \\ x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \\ x_3, y_3 \end{pmatrix}$ คือวง 4 ของระบบสมการที่ประกอบด้วยจุด $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3)

ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาผลเฉลยของระบบสมการ

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 3, y_{n+1} = x_n - |\,\mathrm{y}_n\,| + 1, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) เป็นจุดในบางบริเวณของ R^2 โดยที่ $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 1$ จากการสำรวจพบว่าผลเฉลยของระบบสมการ (7) มีผลเฉลยที่เป็นคาบ 4 ได้แก่

$$P_{4.1} = \begin{pmatrix} -5, -1 \\ 3, -5 \\ 5, -1 \\ 3, 5 \end{pmatrix} \text{ และ } P_{4.2} = \begin{pmatrix} 1, -3 \\ 1, -1 \\ -1, 1 \\ -3, -1 \end{pmatrix}$$

เราจะทำการพิสูจน์ว่าทุก ๆ ผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวเป็นคาบ 4 ในที่สุดด้วยทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (7) และ $(x_0, y_0) \in L$ จะได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการ (7) เป็นคาบ 4 ในที่สุด

พิสูจน์ เนื่องจาก $(x_0, y_0) \in L$ จะได้ว่า $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 1$

$$\begin{aligned} x_1 &= |x_0| - y_0 - 3 && = |0| - y_0 - 3 && = -y_0 - 3 < 0 \\ y_1 &= x_0 - |y_0| + 1 && = 0 - |y_0| + 1 && = -y_0 + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= |x_1| - y_1 - 3 && = |-y_0 - 3| - (-y_0 + 1) - 3 && = 2y_0 - 1 > 0 \\ y_2 &= x_1 - |y_1| + 1 && = -y_0 - 3 - |-y_0 + 1| + 1 && = -2y_0 - 1 < 0 \end{aligned}$$

$$x_3 = |x_2| - y_2 - 3 \quad = |2y_0 - 1| - (-2y_0 - 1) - 3 \quad = 4y_0 - 3 > 0$$
$$y_3 = x_2 - |y_2| + 1 \quad = 2y_0 - 1 - |-2y_0 - 1| + 1 \quad = -1$$

$$x_4 = |x_3| - y_3 - 3 \quad = |4y_0 - 3| - (-1) - 3 \quad = 4y_0 - 5$$
$$y_4 = x_3 - |y_3| + 1 \quad = 4y_0 - 3 - |-1| + 1 \quad = 4y_0 - 3 > 0$$

ถ้า $y_0 \ge \frac{5}{4}$ แล้ว $x_4 \ge 0$ จะได้ว่า

$$x_5 = |x_4| - y_4 - 3 \quad = |4y_0 - 5| - (4y_0 - 3) - 3 \quad = -5$$
$$y_5 = x_4 - |y_4| + 1 \quad = 4y_0 - 5 - |4y_0 - 3| + 1 \quad = -1$$

จะได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการ (7) เป็นไพร์มพีเรียด 4 ในที่สุดโดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับจำนวนเต็ม $n \ge 1$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

"สำหรับ $y_0 \in (1, u_n)$ จะได้ว่า

$$x_{4n+1} = -2^{2n+1} y_0 + \delta_n < 0$$
$$y_{4n+1} = -1$$
$$x_{4n+2} = 2^{2n+1} y_0 - \delta_n - 2 > 0$$
$$y_{4n+2} = -2^{2n+1} y_0 + \delta_n < 0$$

$$x_{4n+3} = 2^{2n+2} y_0 - 2\delta_n - 5 > 0$$
$$y_{4n+3} = -1$$
$$x_{4n+4} = 2^{2n+2} y_0 - 2\delta_n - 7$$
$$y_{4n+4} = 2^{2n+2} y_0 - 2\delta_n - 5 > 0$$

ถ้า $y_0 \in [u_{n+1}, \mathrm{u}_n)$ แล้ว $x_{4n+4} \ge 0$ และได้ว่า $(x_{4n+5}, y_{4n+5}) = (-5, -1) \in P_{4.2}$

ถ้า $y_0 \in (1, u_{n+1})$ แล้ว $x_{4n+4} < 0$"

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริงเมื่อ $n = 1$ สำหรับ $y_0 \in (1, u_1) = \left(1, \frac{5}{4}\right)$ จะได้ว่า

$$x_4 = 4y_0 - 5$$

พิจารณา $x_{4(1)+1} = x_5 = |x_4| - y_4 - 3 = -8y_0 + 5 = -2^{2(1)+1} y_0 + \delta_1 < 0$

$$y_{4(1)+1} = y_5 = x_4 - \left|y_4 + 1\right| = -1$$

$$x_{4(1)+2} = x_6 = \left|x_5\right| - y_5 - 3 = 8y_0 - 7 = 2^{2(1)+1} y_0 - \delta_1 - 2 > 0$$

$$y_{4(1)+2} = y_6 = x_5 - \left|y_5\right| + 1 = -8y_0 + 5 = -2^{2(1)+1} y_0 + \delta_1 < 0$$

$$x_{4(1)+3} = x_7 = \left|x_6\right| - y_6 - 3 = 16y_0 - 15 = 2^{2(1)+2} y_0 - 2\delta_1 - 5 > 0$$

$$y_{4(1)+3} = y_7 = x_6 - \left|y_6\right| + 1 = -1$$

$$x_{4(1)+4} = x_8 = \left|x_7\right| - y_7 - 3 = 16y_0 - 17 = 2^{2(1)+2} y_0 - 2\delta_1 - 7$$

$$y_{4(1)+4} = x_8 = x_7 - \left|y_7\right| + 1 = 16y_0 - 15 = 2^{2(1)+2} y_0 - 2\delta_1 - 51 < 0$$

ถ้า $y_0 \in \left[u_2, u_1\right) = \left[\frac{17}{16}, \frac{5}{4}\right)$ แล้ว $x_8 \geq 0$ และได้ว่า $\left(x_9, y_9\right) = \left(-5, -1\right) \in P_{4.2}$

ถ้า $y_0 \in \left(1, u_2\right) = \left(1, \frac{17}{16}\right)$ แล้ว $x_8 \leq 0$

จะได้ว่า $P\left(1\right)$ เป็นจริง

2. กำหนดให้ $P\left(k\right)$ เป็นจริง จะได้ว่าสำหรับ $y_0 \in \left(1, u_{k+1}\right) = \left(1, \frac{1+2^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)}}\right)$ แล้ว

$x_{4n+4} = 2^{2k+2} y_0 - 2\delta_k - 7$ และ $y_{4n+4} = 2^{2k+2} y_0 - 2\delta_k - 5 > 0$

จะแสดงว่า $P\left(k+1\right)$ เป็นจริงพิจารณา

$$\begin{aligned} x_{4(k+1)+1} = x_{4k+5} &= \left| x_{4k+4} \right| - y_{4k+4} - 3 \\ &= -2^{2(k+1)+1} y_0 + \left(4\delta_k + 9\right) \\ &= -2^{2k+3} y_0 + \delta_{k+1} \\ &= -2^{2k+3} y_0 + 2^{2k+3} - 3 \end{aligned}$$

พิจารณา

$$4\delta_k + 9 = 4\left(2^{2k+1} - 3\right) + 9 = 2^2 \cdot 2^{2k+1} - 12 + 9 = 2^{2k+3} - 3 = \delta_{k+1}$$

$$y_{4(k+1)+1} = y_{4k+5} = x_{4k+4} - \left|y_{4k+4}\right| + 1 = -1$$

ถ้า $y_0 \in \left(1, u_{k+1}\right) = \left(1, \dfrac{1+2^{2k+2}}{2^{2k+2}}\right)$ แล้วจะได้ว่า $x_{4k+5} < 0$ และได้ว่า

$$x_{4(k+1)+2} = x_{4k+6} = \left|x_{4k+5}\right| - y_{4k+5} - 3$$

$$= 2^{2k+3} y_0 - \delta_{k+1} - 2$$
$$= 2^{2k+3} y_0 - 2^{2k+3} + 1$$

ถ้า $y_0 \in \left(1, u_{k+1}\right) = \left(1, \dfrac{1+2^{2k+2}}{2^{2k+2}}\right)$ แล้วจะได้ว่า $x_{4k+6} > 0$ และได้ว่า

$$y_{4(k+1)+2} = y_{4k+6} = x_{4k+5} - \left|y_{4k+5}\right| + 1$$

$$= -2^{2k+3} y_0 + \delta_{k+1}$$
$$= -2^{2k+3} y_0 + 2^{2k+2} - 3$$

ถ้า $y_0 \in \left(1, u_{k+1}\right) = \left(1, \dfrac{1+2^{2k+2}}{2^{2k+2}}\right)$ และจะได้ว่า $y_{4k+6} < 0$ และได้ว่า

$$x_{4(k+1)+3} = x_{4k+7} = \left|x_{4k+6}\right| - y_{4k+6} - 3$$

$$= 2^{2k+4} y_0 - 2\delta_{k+1} - 5$$
$$= 2^{2k+4} y_0 - 2^{2k+4} + 1$$

ถ้า $y_0 \in \left(1, u_{k+1}\right) = \left(1, \dfrac{1+2^{2k+2}}{2^{2k+2}}\right)$ และจะได้ว่า $x_{4k+7} > 0$

และได้ว่า

$$y_{4(k+1)+3} = y_{4k+7} = x_{4k+6} - \left|y_{4k+6}\right| + 1 = -1$$

$$y_{4(k+1)+4} = y_{4k+8} = x_{4k+7} - \left|y_{4k+7}\right| + 1$$

$$= 2^{2k+4} y_0 - 2\delta_{k+1} - 5$$
$$= 2^{2k+4} y_0 - 2^{2k+3} + 1$$

ถ้า $y_0 \in (1, u_{k+1}) = \left(1, \dfrac{1+2^{2k+2}}{2^{2k+2}}\right)$ และจะได้ว่า $y_{4k+8} > 0$ และได้ว่า

$$x_{4(k+1)+4} = x_{4k+8} = |x_{4k+7}| - y_{4k+7} - 3$$

$$= 2^{2k+4} y_0 - 2\delta_{k+1} - 7$$
$$= 2^{2k+4} y_0 - 2^{2k+4} - 1$$

ถ้า $y_0 \in [u_{k+2}, u_{k+1}) = \left[\dfrac{1+2^{2k+4}}{2^{2k+4}}, \dfrac{1+2^{2k+2}}{2^{2k+2}}\right)$ และจะได้ว่า $x_{4k+8} \geq 0$ และได้ว่า $(x_{4n+5}, y_{4n+5}) = (-5, -1) \in P_{4.2}$

ถ้า $y_0 \in (1, u_{k+2}) = \left(1, \dfrac{1+2^{2k+4}}{2^{2k+4}}\right)$ และจะได้ว่า $x_{4k+8} < 0$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริงโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สามารถสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกๆจำนวนเต็ม $n \geq 1$ สังเกตได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^{2n}}{2^{2n}} = 1$$

และเมื่อกำหนดให้ $(x_0, y_0) = (0, 1)$ จะได้ว่า $(x_2, y_2) = (1, -3) \in P_{4.1}$ ดังนั้น จะได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการ (7) เป็นไพร์มพีเรียดใน 4 ที่สุด

อภิปรายผล

จากทฤษฎีบทเห็นข้อแตกต่างของผลเฉลยของระบบสมการ (7) โดยบทความ จันทิมา และคณะ (2560) พบว่าเงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการ (7) เป็นจุดสมดุลคือการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจุดบนแกน y ซึ่ง $0 < y_0 < 1$ แต่เมื่อเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้น $y_0 \geq 1$ ผลเฉลยมีลักษณะเป็นคาบ 4 ยืนยันได้ว่าการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นมีผลต่อพฤติกรรมของระบบสมการและจุด $(0,1)$ เป็นจุดเปลี่ยนของพฤติกรรมของผลเฉลยจากการเป็นจุดสมดุลที่ในสุดเป็นการเป็นคาบ 4 ในที่สุด ทั้งนี้ผู้สนใจวิจัยอาจนำวิธีการสำรวจในบทความนี้ไปศึกษาพฤติกรรมของระบบสมการโดยที่เงื่อนไขเริ่มต้นจุดอื่นนอกเหนือจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่ทำวิจัยไปแล้ว

สรุปผลการวิจัย

พฤติกรรมของระบบสมการ (7) เป็นคาบ 4 ในที่สุดแต่วง 4 มีอยู่สองวงได้แก่ $P_{4.1}$ และ $P_{4.2}$ เห็นได้ว่าวง $P_{4.2}$ ดึงดูดผลเฉลยทุกผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจุดบนแกน y ซึ่ง $y_0 > 1$ และ $P_{4.1}$ ดึงดูดผลเฉลยบนแกน y ซึ่ง $y_0 = 1$

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยที่ได้รับทุนสนับสนุนจากสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ (RDI-1-61-6-26)

เอกสารอ้างอิง

จันทิมา แก้วประเสริฐ, วรรณา จันทร์ดี, อุไรวรรณ จิตต์บุรุษ และ วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ. (2560). ผลเฉลยที่เป็นจุดสมดุลของระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วง. **รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติพิบูลสงครามวิจัย ครั้งที่ 3**, 140–146. พิษณุโลก: มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม.

Barnsley, M.F., Peitgen, H.O., Saupe, D., Fisher, Y., McGuire, M., Voss, M.R., ... Mandelbrot, B.B. (1991). **The Science of Fractal Images**. New York. Springer-Verlag.

Devanney, R.L. (1984). **A piecewise linear model of the zones of instability of an area-preservingmap. Physica.**, 10D, 387-393.

Grove, E. A., Lapierr, E. and Tikjha, W. (2012). On the Global Behavior of $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1$ and $y_{n+1} = x_n + |y_n|$. **Cubo Mathematical Journal**, 14, 125–166.

Grove, E. A. and Ladas, G. (2005). **Periodicities in Nonlinear Difference Equations**. New York: Chapman and Hall/CRC Press. 1-3.

Tikjha, W., Lenbury, Y. and Lapierr, E. (2010). **On the Global Character of the System of Piecewise Linear Difference Equations** $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1$ **and** $y_{n+1} = x_n - y_n$ Adv. Differ. Equ. DOI:10.1155/2010/573281

Tikjha, W., Lapierr, E. and Lenbury, Y. (2015). Periodic Behavior of Solutions of a Certain Piecewise Linear System of Difference Equations. **Thai J. Math.**, 13, 237–244.