

## การวิเคราะห์พื้นที่และความสามารถในการจัดการของหุ่นยนต์ขนานส่วนเกิน 4 ขาบนระนาบที่มี ข้อต่อแบบหมุน

### Workspace and Manipulability Analysis of a 4-RRR Redundant Planar Parallel Manipulator

อำนาจ ตงติบ<sup>1\*</sup> และ ชวลิต คณากรสุขันต์<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ภาควิชา วิศวกรรมการจัดการพลังงาน คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์

27 ถนนอินใจมี อำเภอเมือง จังหวัดอุดรดิตถ์ 53000

<sup>2</sup> ภาควิชา เกษตรกลวิธาน คณะเกษตร กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน

1 หมู่ 6 ตำบลกำแพงแสน อำเภอกำแพงแสน จังหวัดนครปฐม 73140

Amnad Tongtib<sup>1\*</sup> and Chawalit Khanakornsuksan<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Energy Management Engineering, Faculty of Industrial Technology, Uttaradit Rajabhat University  
27 Injaimee Road, Muang, Uttaradit, Thailand, 53000

<sup>2</sup> Department of Farm Mechanics, Faculty of Agriculture at Kamphaeng Saen, Kasetsart University, Kamphaeng  
Saen Campus1 Moo 6 Kamphaeng Saen, Kamphaeng Saen, Nakhon Pathom, Thailand, 73140

\* ผู้รับผิดชอบบทความ: amnad.ton@uru.ac.th เบอร์โทรศัพท์ 084-046-9569

Received: 24 February 2021, Revised: 30 April 2021, Accepted: 10 September 2021

#### บทคัดย่อ

หุ่นยนต์ขนานบนระนาบมีความสามารถในการสร้างการเคลื่อนที่เร็วและแม่นยำ แต่ในบางท่าทางภายในพื้นที่ทำงานมีโอกาสเกิดสภาวะเอกฐาน การเพิ่มตัวขับเคลื่อนให้กับโครงสร้างเป็นอีกแนวทางในการออกแบบเพื่อลดสภาวะเอกฐานได้ งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์อัตราส่วนพื้นที่ทำงานและดัชนีความสามารถในการจัดการเคลื่อนที่ (Manipulability Index, MI) ของโครงสร้างหุ่นยนต์ขนานโครงสร้างส่วนเกิน 4 ขาบนระนาบ ซึ่งแต่ละขาถูกขับเคลื่อนด้วยตัวขับเคลื่อนที่ถูกต้องตั้งบนฐาน และส่งกำลังผ่านก้านแข็งและข้อต่อแบบหมุนไปยังจุดปลายแผ่นเคลื่อนที่ ขอบเขตพื้นที่ทำงานของแต่ละขาถูกสร้างจากความสัมพันธ์ทางจลนศาสตร์ขอบเขตของทุกขานำมาพิจารณาหาพื้นที่ทับซ้อนโดยวิธีทางเรขาคณิตเพื่อให้ได้พื้นที่ทำงานของโครงสร้างทั้งหมด จุดภายในพื้นที่ทำงานเหล่านี้จะถูกนำมาวิเคราะห์ค่า MI ในกรณีศึกษาของงานวิจัยนี้ได้เปรียบเทียบค่าอัตราส่วนพื้นที่และค่า MI ของโครงสร้างขนาน 3-RRR และ 4-RRR แสดงให้เห็นว่าโครงสร้างส่วนเกิน 4-RRR สามารถเพิ่มค่า MI เฉลี่ยได้ 37 เท่าของโครงสร้าง 3-RRR เมื่อกำหนดให้ความยาวขาท่อนล่างและท่อนบนยาว 400 มม. และ 500 มม. ตามลำดับ ในขณะที่ค่าอัตราส่วนพื้นที่ทำงานของหุ่นยนต์กับพื้นที่ทำงานที่ต้องการนั้นลดลง 13.15%

**คำสำคัญ** หุ่นยนต์ขนาน, โครงสร้างส่วนเกิน, พื้นที่การทำงาน, ดัชนีความสามารถในการจัดการ

#### Abstract

Planar parallel manipulator has advantages to carry out high speed and accuracy tasks, but singular configurations can occur within a workspace. These singular configurations can be eliminated by adding

redundant actuation. This paper presents an analysis of workspace ratio and Manipulability Index (MI) of a 4- $\bar{R}RR$  redundant planar parallel manipulator, which is created by introducing a redundant branch with active actuator to a 3- $\bar{R}RR$ . Each branch made up as serial chain connects the moving platform to the fixed base by actuator, two rigid links and 2 passive revolute joints. A geometry method based on the forward kinematics would be appropriate to determine the workspace. Then, 4- $\bar{R}RR$  workspace is generated by the intersection of all branched. MI of point in intersection workspace are analyzed. Finally, case study, a comparison of workspace ratio and MI of 3- $\bar{R}RR$  and 4- $\bar{R}RR$  parallel manipulator shown the 4- $\bar{R}RR$  redundant structure can improve the MI to 3.7 times (for 400 mm and 500 mm of lower and upper link length, respectively) when compared with the 3- $\bar{R}RR$  structure while the workspace ratio reduced to 13.15%.

**Keywords:** Parallel Manipulator, Redundant Mechanism, Workspace, Manipulability Index

## 1. บทนำ

หุ่นยนต์ขนานเป็นกลไกที่สามารถสร้างการเคลื่อนที่ได้เร็ว แม่นยำ และสามารถรับภาระโหลดได้สูง แต่ในบางท่าทางของหุ่นยนต์สามารถเกิดสถานะเอกฐาน (Singularity) หากเพิ่มจำนวนตัวขับให้มากกว่าจำนวนองศาอิสระแล้ว โครงสร้างส่วนเกินลักษณะนี้สามารถลดโอกาสการเกิดสถานะนี้ได้ หากพิจารณารูปแบบการจัดวางตัวขับในโครงสร้างส่วนเกินแล้วสามารถแบ่งได้เป็นสองแบบ [1] แบบแรกเรียกว่าโครงสร้าง Actuation Redundant ตัวอย่างเช่น การเพิ่มตัวขับเชิงเส้นในแต่ละขา ในงานวิจัย [2] และ [3] เป็นโครงสร้างที่ถูกเพิ่มตัวขับแทนที่ข้อต่อ เป็นผลให้โอกาสเกิดสถานะเอกฐานลดลงในขณะที่พื้นที่การทำงานยังเท่าเดิม ส่วนแบบที่สอง Kinematically Redundant เป็นโครงสร้างที่ถูกเพิ่มชุดขาพร้อมตัวขับ ทำให้ได้ พื้นที่การทำงานที่ใหญ่ขึ้น [4] และยังสามารถเพิ่มระยะการหมุนของแผ่นเคลื่อนที่เพื่อลดการเกิดสถานะเอกฐานได้เช่นกัน [5]

พื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ [6] เป็นอีกคุณสมบัติที่สำคัญในการออกแบบโครงสร้าง โดยทั่วไปใช้วิธีการทางตัวเลข (Numerical Method) และวิธีทางเรขาคณิต (Geometry Approach) ทั้งสองวิธีนี้มีหลักการที่แตกต่างกันกล่าวคือ วิธีแรกใช้การทดสอบความสอดคล้องเงื่อนไขของแต่ละจุดในพื้นที่ทำงานซึ่งใช้เวลามากพอสมควรในการตรวจให้เสร็จสิ้นทุกจุด ในขณะที่วิธีที่สองนั้นพิจารณาเพียงพื้นที่ส่วนซ้อนทับพื้นที่ที่ทำงานได้ของทุกขา วิธีที่สองนี้จึงใช้เวลาในการ

คำนวณน้อยกว่าแบบแรก และวิธีนี้ยังสามารถนำผลมาประเมินขนาดของพื้นที่ทำงานได้สะดวกมากยิ่งขึ้นในการเปรียบเทียบพื้นที่ทำงานและตำแหน่งการเกิดสถานะเอกฐานของหุ่นยนต์ขนานโครงสร้างต่าง ๆ นั้น ส่วนใหญ่ใช้ความสามารถในการจัดการ (Manipulability) ความแม่นยำ (Accuracy) และค่า Condition Number ในการเปรียบเทียบความน่าสนใจของโครงสร้าง [7] โดย Wu และ คณะ [8] นำเสนอการเปรียบเทียบความสามารถในการทำงานของโครงสร้างขนานบนระนาบเพื่อใช้ในการเลือกโครงสร้างที่เหมาะสม และหลังจากนั้นทางทีมวิจัยได้นำเสนอการพิจารณาค่า Condition Number เป็นปัจจัยสำคัญในการหารูปแบบการจัดวางขาและแผ่นเคลื่อนที่ของโครงสร้าง 3- $\bar{R}RR$  ที่ต่างกันให้เหมาะสมกับเงื่อนไขที่กำหนด [9] และ [10] นอกจากนี้ค่า Condition Number ยังสามารถนำมาใช้เป็นเกณฑ์ในการเลือกขนาดขาของโครงสร้างหุ่นยนต์ ขนาน 3- $\bar{R}RR$  เพื่อให้ได้ขนาดพื้นที่ทำงานที่มีขนาดใหญ่ขึ้น [10]

การออกแบบหุ่นยนต์ขนานให้สามารถทำงานในพื้นที่ทำงานที่กำหนดไว้มีโอกาสที่จะเกิดสถานะเอกฐานภายในพื้นที่ทำงานนั้น การปรับเปลี่ยนเป็นโครงสร้างส่วนเกินเป็นอีกแนวทางในการช่วยลดโอกาสเกิดสถานะเอกฐานได้ งานวิจัยนี้จึงนำเสนอการวิเคราะห์หุ่นยนต์ขนานโครงสร้างส่วนเกินโดยใช้อัตราส่วนพื้นที่ทำงานเป็นเกณฑ์ในการวิเคราะห์ ซึ่งอัตราส่วนพื้นที่นี้สามารถใช้ให้เห็นถึงจำนวนการเกิดสถานะเอกฐานในบริเวณขอบเขตพื้นที่ทำงานที่กำหนดไว้

## 2. ทฤษฎีและวิธีการดำเนินการวิจัย

กลไกของหุ่นยนต์ขนาน 4-RRR แสดงดังรูปที่ 1(ก) โดยในงานวิจัยนี้กำหนดให้แกนอ้างอิง (X-Y) อยู่ที่จุด O โดยมีแผ่นเคลื่อนที่ (Moving Platform) เป็นแผ่นสี่เหลี่ยมซึ่งมีแกนเคลื่อนที่ (X'-Y') ติดอยู่ที่จุด P โดยปลายแผ่นเคลื่อนที่ถูกระดมโยงไปยังฐานผ่านชุดขา 4 ชุด ( $i=1,2,3$  และ 4) ที่มีลักษณะเป็นแขนกลอนุกรม ขาแต่ละชุดประกอบด้วยท่อนวัตถุแข็งเกร็ง 2 ชิ้น ( $l_i$  และ  $l_{i2}$ ) เชื่อมติดกันด้วยข้อต่อแบบหมุน (B) ปลายข้างหนึ่งของขาถูกยึดติดเข้ากับฐานด้วยตัวข้อต่อแบบหมุน (A) ส่วนอีกด้านหนึ่งถูกยึดติดกับปลายแผ่นเคลื่อนที่ด้วยข้อต่อแบบหมุน (C) จึงทำให้หุ่นยนต์มี 3 องศาอิสระ คือ แผ่นเคลื่อนที่ที่สามารถเคลื่อนที่ตามแกน X' และ Y' และยังหมุนด้วยมุม  $\theta$  หากเปรียบเทียบกับโครงสร้าง 3-RRR จะพบว่าโครงสร้าง 3-RRR (ดังรูปที่ 1(ข)) มีขาอนุกรม 3 ชุดในแต่ละชุดใช้ตัวข้อต่อ 1 ตัวเพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่ 3 องศาอิสระ จำนวนตัวข้อต่อที่มากขึ้นในโครงสร้าง 4-RRR ทำให้โครงสร้างอยู่ในกลุ่มของโครงสร้างส่วนเกิน

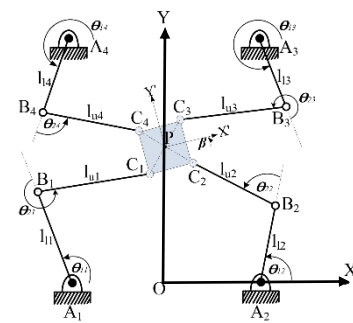
ในการหาความสัมพันธ์เชิงจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์ขนาน 4-RRR นั้นสามารถหาได้จากการพิจารณาจากผลรวมของเวกเตอร์รูปของแต่ละชุดขาตั้งสมการที่ (1)

$$\vec{OP} = \vec{OA_i} + \vec{AB_i} + \vec{B_iC_i} + \vec{C_iP} \quad (1)$$

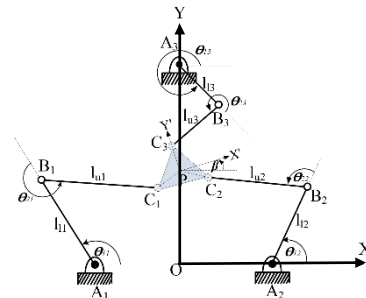
โดย  $\vec{OP}$  คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งจุดปลายของแผ่นเคลื่อนที่  $\vec{OA_i}$  คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดติดตั้งของขาแต่ละชุด  $\vec{AB_i}$  และ  $\vec{B_iC_i}$  คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของขาท่อนล่างและท่อนบนของขาแต่ละชุดตามลำดับ และ  $\vec{C_iP}$  คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของระยะจากจุดปลายของแผ่นเคลื่อนที่ของแต่ละขาไปยังจุดปลายของแผ่นเคลื่อนที่

โดยทั่วไปแล้วจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์แบ่งเป็น 2 แบบด้วยกันคือ จลนศาสตร์ผกผัน (Inverse Kinematic) และจลนศาสตร์เชิงคืบหน้า (Forward Kinematic) ในส่วนของจลนศาสตร์ผกผันเป็นการหาขนาดของตัวข้อต่อโดยกำหนดตำแหน่งและลักษณะการหมุนของแผ่นเคลื่อนที่ จากสมการที่ (1) สามารถเขียนในรูปการหาขนาดตัวข้อต่อเป็นดังสมการที่ (2)

$$\vec{A_iC_i} = \vec{OP} - \vec{OA_i} - \vec{C_iP} \quad (2)$$



(ก) ลักษณะกลไกหุ่นยนต์ขนาน 4-RRR



(ข) ลักษณะกลไกหุ่นยนต์ขนาน 3-RRR

รูปที่ 1 ลักษณะกลไกหุ่นยนต์ขนาน 4-RRR และ 3-RRR

ซึ่งจุด  $C_i$  เป็นจุดปลายของขาแต่ละชุด  $\vec{OA_i}$  และ  $\vec{C_iP}$  เป็นเวกเตอร์ค่าคงที่ จากนั้นพิจารณาชุดขาอนุกรมซึ่งเป็นแขนกล 2 องศาอิสระบนระนาบ ขนาดของตัวข้อต่อสามารถหาได้จากสมการที่ (3) และ (4)

$$\theta_{a_i} = \tan^{-1} \left( \frac{\pm \sqrt{1-t_i^2}}{t_i} \right) \quad (3)$$

$$\theta_{b_i} = \tan^{-1} \left( \frac{C_{y_i}}{C_{x_i}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{l_{i2} \sin \theta_{a_i}}{l_{i1} + l_{i2} \cos \theta_{a_i}} \right) \quad (4)$$

โดยที่  $t_i = \frac{C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 - l_{i1}^2 - l_{i2}^2}{2l_{i1}l_{i2}}$  ดังนั้น ขนาดตัวข้อต่อของหุ่นยนต์ขนาน 4-RRR สามารถหาได้จากสมการที่ (3) และ (4) สำหรับจลนศาสตร์เชิงคืบหน้าเป็นการหาตำแหน่งจุดปลายและลักษณะการหมุนของแผ่นเคลื่อนที่โดยกำหนดขนาดของตัวข้อต่อมาไว้โดยทั่วไปแล้วการหาคำตอบของจลนศาสตร์เชิงคืบหน้ามี 3 รูปแบบ คือ 1) ผลเฉลยรูปแบบปิด (Closed-Form Solution) [12-14] 2) วิธีการทางตัวเลข (Numerical Method) [15] 3) วิธีการเชิงวิเคราะห์ (Analytical Approach) [16] ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้วิธี วิธีการทางตัวเลข ในการหาคำตอบโดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของจลนศาสตร์เชิงคืบหน้าของชุดขาอนุกรมคือ

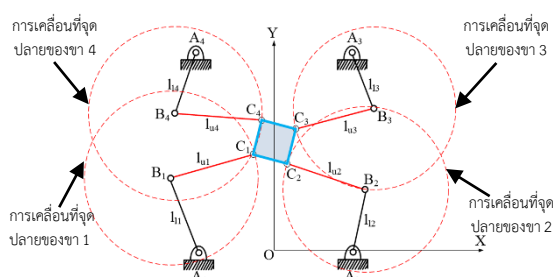
$$C_{xi} = l_{li} \cos \theta_{li} + l_{ui} \cos(\theta_{li} + \theta_{2i}) \quad (5)$$

$$C_{yi} = l_{li} \sin \theta_{li} + l_{ui} \sin(\theta_{li} + \theta_{2i}) \quad (6)$$

จากสมการที่ (5) และ (6) เมื่อกำหนดขนาดตัวขับ ( $\theta_{li}$ ) ลักษณะของก้าน AB, จะถูกระบุตำแหน่งให้ทราบจากนั้นพิจารณาการเคลื่อนที่ของจุด C, แต่ละขาซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด B, และรัศมียาว  $l_{ui}$  คำตอบของจลศาสตร์เชิงคิบนี้อาจเกิดขึ้นเมื่อระยะห่างระหว่างจุดปลายของขาแต่ละขาสอดคล้องกับขนาดของแผ่นเคลื่อนที่ ดังแสดงในรูปที่ 2

## 2.1 การวิเคราะห์พื้นที่ทำงานของหุ่นยนต์

พื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ (Workspace) คือ ตำแหน่งและการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ที่ทำได้ ในงานวิจัยนี้วิธีทางเรขาคณิตจะถูกนำมาใช้ในการหาพื้นที่ทำงาน ซึ่งขนาดของพื้นที่ทำงานที่แสดงเป็นขอบจะถูกนำไปในการออกแบบพื้นที่ที่ใช้งาน (Prescribed Workspace) หากวิเคราะห์ในเชิงเรขาคณิตแล้วสามารถหาพื้นที่ทำงานได้โดยพิจารณาส่วนทับซ้อนพื้นที่ทำงานของแต่ละขาสีซึ่งสามารถวิเคราะห์ได้ 3 ชนิด คือ พื้นที่การทำงานที่ลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่คงที่ (Constant Orientation Workspace) พื้นที่การทำงานที่ยื่นไปถึง (Reachable Workspace) และพื้นที่การทำงานที่คล่องแคล่ว (Dexterous Workspace)



รูปที่ 2 ลักษณะการเคลื่อนที่ของจุดปลายของแต่ละขาสี

พื้นที่การทำงานที่ลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่คงที่ คือ ตำแหน่งที่หุ่นยนต์สามารถเคลื่อนที่ไปถึงได้ในขณะที่การวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่มีค่าคงที่ ในการหาพื้นที่ทำงานของแต่ละขาสี สมการวงกลมจะถูก

นำมาใช้ในการหาพื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ โดยแบ่งเป็นพื้นที่วงกลมที่จุดปลายสามารถเคลื่อนที่ไปได้ (วงกลมด้านนอก) และพื้นที่วงกลมที่ไม่สามารถเคลื่อนที่ไปได้ (วงกลมด้านใน) สมการของวงกลมทั้งสองถูกหาจากการพิจารณาสมการที่ (1) ซึ่งแสดงเป็น

$$(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 = (l_{li} + l_{ui})^2 \quad (7)$$

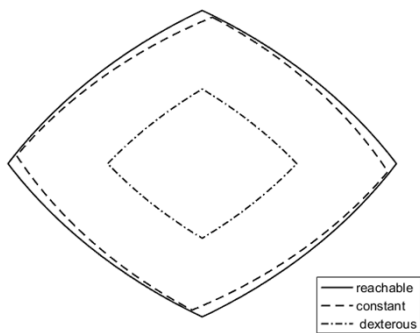
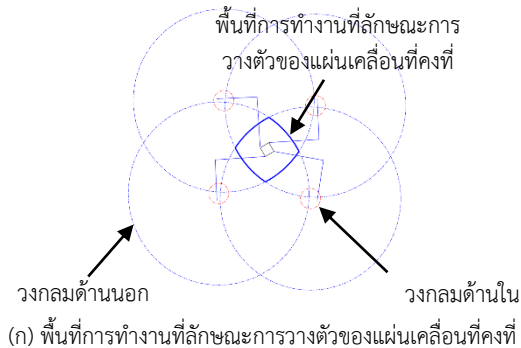
$$(x'-x_i)^2 + (y'-y_i)^2 = (l_{li} - l_{ui})^2 \quad (8)$$

โดยที่  $x$ , และ  $y$ , เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่ ผลที่ได้จากสมการที่ (7) และ (8) แสดงลักษณะเป็นวงแหวนของแต่ละขาโดยที่พื้นที่ทำงานที่จุดปลายของแผ่นเคลื่อนที่สามารถเคลื่อนที่ไปได้ คือพื้นที่ระหว่างวงกลมด้านนอกและวงกลมด้านใน รูปที่ 3(ก) แสดงตัวอย่างพื้นที่การทำงานที่ลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่คงที่ของแต่ละขาโดยกำหนดความยาวของขาที่สั้น ( $l_{li}$ ) และขาที่สั้น ( $l_{ui}$ ) มีค่าเป็น 400 มิลลิเมตร และ 500 มิลลิเมตร ตามลำดับ และการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่เป็น 30 องศา ซึ่งในวงกลมด้านนอกเป็นพื้นที่ที่จุดปลายของขาสามารถเคลื่อนที่ไปถึงได้ (จากสมการที่ (7)) ในขณะที่ภายในวงกลมที่อยู่ด้านในเป็นพื้นที่ที่ไม่สามารถเคลื่อนที่ไปถึง (จากสมการที่ (8)) และพื้นที่ทับซ้อนกันของทั้งสี่ขาเป็นบริเวณที่จุดปลายของแผ่นเคลื่อนที่สามารถเคลื่อนที่ไปถึงได้ ถัดมาพื้นที่การทำงานที่ยื่นไปถึงเป็นตำแหน่งที่หุ่นยนต์สามารถเคลื่อนที่ไปถึงได้โดยไม่คำนึงถึงลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่ การหาพื้นที่การทำงานแบบนี้ยังคงใช้สมการวงกลมของแต่ละขาเช่นเดียวกับการหาพื้นที่การทำงานในแบบแรก แต่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะถูกกำหนดให้อยู่ที่จุดติดตั้งของแต่ละขา สำหรับวงกลมด้านนอกรัศมีของวงกลมจะพิจารณาจากผลรวมของความยาวของขาที่สั้นกับขาที่สั้น และระยะจากจุดปลายของปลายแขนอนุกรมถึงจุดกึ่งกลางของแผ่นเคลื่อนที่ ( $r_p$ ) สำหรับวงกลมด้านในรัศมีของวงกลมจะพิจารณาจากผลต่างของขาที่สั้นและขาที่สั้น จากนั้นนำผลที่ได้ไปลบกับระยะจากจุดปลายของปลายแขนอนุกรมถึงจุดกึ่งกลางของแผ่นเคลื่อนที่ หากรัศมีที่ได้

มีค่าเป็นลบจะไม่เกิดวงกลมด้านใน ดังนั้น สมการที่ (7) และ (8) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$x^2+y^2=(l_{li}+l_{ui}-r_p)^2 \quad (11)$$

$$x'^2+y'^2=(l_{li}-l_{ui}+r_p)^2 \quad (12)$$



รูปที่ 3 ลักษณะของพื้นที่ทำงานของแต่ละขาและการเปรียบเทียบทั้ง 3 ชนิด

$$x^2+y^2=(l_{li}+l_{ui}+r_p)^2 \quad (9)$$

$$x'^2+y'^2=(l_{li}-l_{ui}-r_p)^2 \quad (10)$$

และสุดท้ายพื้นที่การทำงานที่คล่องแคล่วเป็นตำแหน่งที่หุ่นยนต์เคลื่อนที่ไปถึงได้โดยที่แผ่นเคลื่อนที่สามารถวางตัวได้ทุกท่าทาง วิธีการหาพื้นที่การทำงานรูปแบบนี้สามารถใช้วิธีการของพื้นที่การทำงานในแบบที่สอง แต่รัศมีของสมการวงกลมจะแตกต่างกันโดยรัศมีของวงกลมภายนอกจะพิจารณาจากผลรวมของขาที่อ่อนล้ากับขาที่อ่อนบน จากนั้นนำค่าที่ได้ไปลบกับระยะจากจุดปลายของปลายแขนอนุกรมถึงจุดกึ่งกลางของแผ่นเคลื่อนที่ ในขณะที่รัศมีของวงกลมด้านในพิจารณาจากผลต่างของขาที่อ่อนล้ากับขาที่อ่อนบน และนำค่าที่ได้ไปรวมกับระยะจากจุดปลายของปลายแขนอนุกรมถึงจุดกึ่งกลางของแผ่นเคลื่อนที่ ทำให้สมการวงกลมที่ใช้สำหรับการหาพื้นที่การทำงานของรูปแบบนี้เขียนใหม่เป็น

จากสมการที่ (7) - (12) เห็นได้ว่าความยาวรัศมีวงกลมด้านนอกของพื้นที่การทำงานแบบที่สองมากที่สุด ถัดมาเป็นพื้นที่การทำงานแบบที่หนึ่ง และพื้นที่การทำงานแบบที่สามเล็กที่สุดจึงทำให้ขนาดของพื้นที่การทำงานเรียงลำดับตามความยาวของรัศมีที่กล่าวมา ซึ่งขนาดของพื้นที่การทำงานทั้ง 3 แบบแสดงดังรูปที่ 3 (ข)

ในการออกแบบขนาดโครงสร้างที่เหมาะสม อัตราส่วนของพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำได้และพื้นที่ที่ใช้งานจะถูกนำมาวิเคราะห์ซึ่งคิดได้จากสมการที่ (13)

$$\text{ratio} = \frac{W_R}{W_p} \quad (13)$$

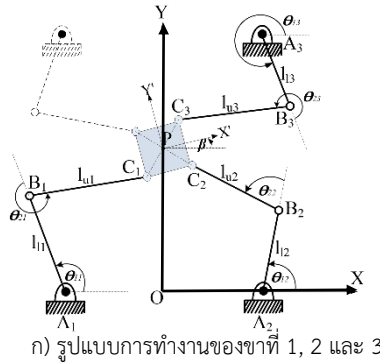
โดยที่  $W_p$  คือขนาดของพื้นที่ที่ใช้งานและ  $W_R$  คือขนาดของพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำได้ อัตราส่วนที่ได้เป็นค่าที่แสดงถึงความสามารถในการทำงานของหุ่นยนต์ หากค่าที่ได้มีน้อยกว่า 1 นั่นคือหุ่นยนต์ที่ออกแบบไม่สามารถนำไปใช้กับงานที่ต้องการได้ ในทางตรงกันข้ามหากค่าที่ได้มีค่ามากกว่า 1 หุ่นยนต์ที่ออกแบบสามารถนำใช้งานได้ แต่หากอัตราส่วนมีค่ามากจนเกินไปจะทำให้ขนาดกลไกใหญ่ขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นในการออกแบบหุ่นยนต์ให้เหมาะสมกับงานจึงจำเป็นต้องนำค่าอัตราส่วนมาช่วยในการวิเคราะห์ในแง่ของการออกแบบขนาดโครงสร้างให้เหมาะสม

## 2.2 การวิเคราะห์ความสามารถในการจัดการของหุ่นยนต์

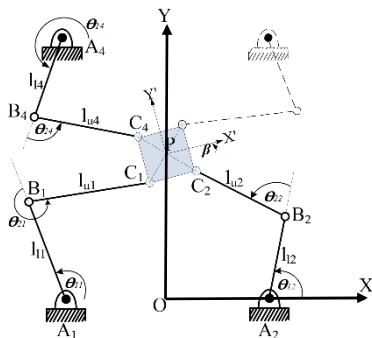
ดัชนีความสามารถในการจัดการ (Manipulability Index, MI) เป็นค่าหนึ่งที่สามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพซึ่งเป็นค่าที่บอกถึงความสามารถในการส่งผ่านความเร็วจากตัวขับเคลื่อนไปยังจุดปลายของหุ่นยนต์ [7] ในงานวิจัยนี้ ค่า MI จะถูกนำมาใช้ทดสอบโดยใช้อัตราส่วนของค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) ของเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian Matrix) คือ

$$MI = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (14)$$

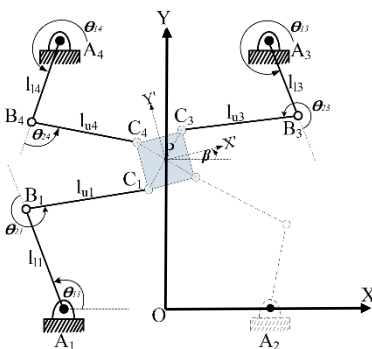
โดยที่  $\sigma_{\max}$  และ  $\sigma_{\min}$  คือ ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียนที่มากและน้อยที่สุดตามลำดับ MI เป็นตัวเลขที่แสดงถึงความสามารถในการส่งผ่านความเร็วจากตัวขับ



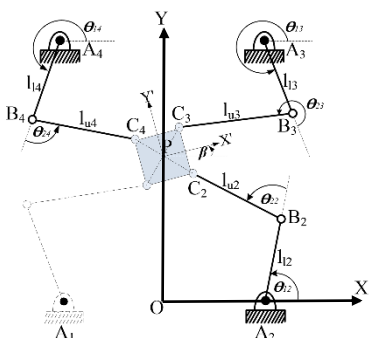
ก) รูปแบบการทำงานของขาที่ 1, 2 และ 3



ข) รูปแบบการทำงานของขาที่ 1, 2 และ 4



ค) รูปแบบการทำงานของขาที่ 1, 3 และ 4



ง) รูปแบบการทำงานของขาที่ 2, 3 และ 4

รูปที่ 4 รูปแบบการทำงานของหุ่นยนต์

ไปยังจุดปลายของหุ่นยนต์ซึ่งมีค่าระหว่าง  $[1, \infty]$  โดยค่าที่ดีที่สุดเป็น 1 (Isotropy Pose) และค่าจะแย่งเมื่อตัวเลขมีค่ามากขึ้นนั่นคือความคล่องตัวของรอบทิศทางในมิติความเร็วจะลดลงซึ่งค่า MI จะพิจารณาจากเมทริกซ์จาโคเบียนดังสมการที่ (15)

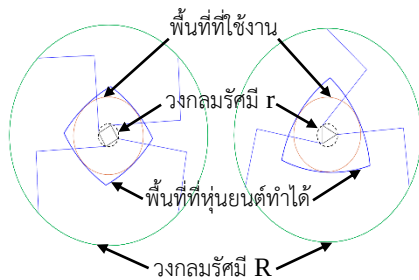
$$[J_p] \dot{p} = [J_0] \dot{\theta} \quad (15)$$

โดยที่  $[J] = [J_p]^{-1} [J_0]$  โดยมีขนาดมิติเป็น  $3 \times 4$  ซึ่งไม่เป็นจัตุรัสเนื่องจากกลไกของหุ่นยนต์เป็นโครงสร้างส่วนเกิน และเมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ขนาน 4-RRR พบว่าเป็นหุ่นยนต์ที่เคลื่อนที่บนระนาบ การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์จึงทำงานได้ด้วยตัวขับ 3 ตัว (ชุดขา 3 ชุด) ทำให้การทำงานของหุ่นยนต์มี 4 รูปแบบที่เป็นไปได้โดยลักษณะการทำงานของหุ่นยนต์แสดงในรูปที่ 4 นั่นคือในแต่ละจุดที่หุ่นยนต์เคลื่อนที่ไปถึงเราสามารถพิจารณาความเป็นไปได้ที่จะสร้างการเคลื่อนที่ได้ 4 รูปแบบซึ่งในแต่ละรูปแบบเกิดจากการพิจารณาขา 3 ชุดโดยในแต่ละชุดมีลักษณะท่าทางต่างกันจึงทำให้ขนาดของเมทริกซ์จาโคเบียนที่นำมาพิจารณาลดลงเป็น  $3 \times 3$  เป็นเหตุให้โครงสร้างที่นำมาวิเคราะห์มีค่า MI เป็น 4 ค่าที่เป็นไปได้นั้นคือเราสามารถเลือกค่าที่ดีที่สุดจากค่าทั้ง 4 ค่าเพื่อใช้ในการเคลื่อนที่ไปยังจุดต่อไป

### 3. ผลการวิจัยและการอภิปราย

ในงานวิจัยนี้นำเสนอการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของหุ่นยนต์ 2 ชนิดคือหุ่นยนต์ขนานบนระนาบแบบ 4-RRR และหุ่นยนต์ขนานบนระนาบแบบ 3-RRR ซึ่งเป็นโครงสร้างที่ถูกใช้ทั่วไปโดยการเปรียบเทียบจะใช้ค่าอัตราส่วนในสมการที่ (13) และค่า MI จากสมการที่ (14) มาใช้ในวิเคราะห์โดยที่ ค่า MI ที่นำมาพิจารณาจะถูกนำไปหาค่าเฉลี่ยของทุกจุดที่อยู่ในพื้นที่ที่ใช้งาน ในกรณีศึกษาตัวแปรของหุ่นยนต์ทั้งสองแบบถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากัน คือ 1) ขนาดความยาวของขาตอนล่าง 2) ขนาดความยาวของขาตอนบน 3) ตำแหน่งจุดติดตั้งของขาแต่ละชุดซึ่งจะถูกวางบนวงกลมรัศมี (R) 4) ขนาดของแผ่นเคลื่อนที่ซึ่งพิจารณาบนวงกลมที่มีรัศมี (r) 5) ขนาดของพื้นที่ที่ใช้งานซึ่งมีลักษณะเป็นวงกลมและ 6) ลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่ ค่าที่กำหนดแสดงดังตารางที่ 1 และลักษณะของหุ่นยนต์ที่เปรียบเทียบแสดงดังรูปที่ 5





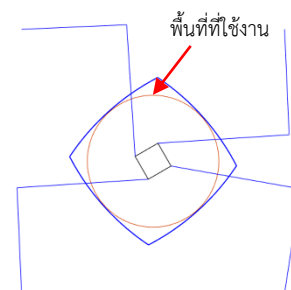
รูปที่ 5 ลักษณะของจุดติดตั้งและขนาดของแผ่นเคลื่อนที่

ตารางที่ 1 แสดงขนาดความยาวของตัวแปรของหุ่นยนต์ที่ใช้เปรียบเทียบ

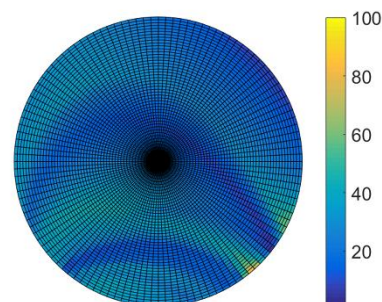
| ตัวแปร   | ปริมาณ  | หน่วย          |
|----------|---------|----------------|
| $L_1$    | 400     | มิลลิเมตร      |
| $L_2$    | 500     | มิลลิเมตร      |
| $R$      | 707.1   | มิลลิเมตร      |
| $r$      | 70.71   | มิลลิเมตร      |
| $W_p$    | 196,250 | ตารางมิลลิเมตร |
| $\theta$ | 30      | องศา           |

รูปที่ 5 แสดงลักษณะของการเปรียบเทียบโครงสร้างของหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR และ 3-RRR โดยกำหนดให้พื้นที่ที่ใช้งานมีลักษณะเป็นวงกลมซึ่งอยู่ในพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำได้โดยในการวิเคราะห์นี้ใช้พื้นที่การทำงานที่ลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่คงที่เป็นตัวอย่างในการคำนวณหาขนาดพื้นที่ด้วยการกำหนดลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่ที่เป็น  $30^\circ$  ผลที่ได้แสดงค่าอัตราส่วนจากสมการที่ (13) ของหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR มีค่าเป็น 1.202 ในขณะที่โครงสร้างแบบ 3-RRR มีค่าเป็น 1.384 จะเห็นได้ว่าโครงสร้างแบบแรกมีค่าอัตราส่วนน้อยกว่า 13.15% เนื่องจากการเพิ่มจำนวนชุดขาให้กับโครงสร้างมีผลทำให้ข้อจำกัดของการหาขนาดพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำได้ลดลง ดังนั้นหากจำนวนชุดขาของโครงสร้างมีมากขึ้น ขนาดพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำได้จะมีค่าลดลงเป็นเหตุให้อัตราส่วนลดลงตามไปด้วย สำหรับการวิเคราะห์ค่า MI ของหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR จะพิจารณาจากจุดที่อยู่ในพื้นที่ที่ใช้งาน ค่า MI ในแต่ละจุดจะมี 4 ค่าที่เกิดขึ้นได้จากรูปแบบการทำงานของหุ่นยนต์ (แสดงในรูปที่ 4) โดยค่าที่ถูกเลือกนำมาใช้งานเป็นค่ามีค่าเข้าใกล้ 1 เนื่องจากเป็น Isotropy pose ผลการเลือกค่า MI ที่ดีที่สุด

จากค่าที่เป็นไปได้ในแต่ละจุดแสดงดังรูปที่ 6 หากพิจารณาค่า MI ของหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 3-RRR โดยเปรียบเทียบกับหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR ที่อยู่ในพื้นที่ที่ใช้งานจะพบว่าค่า MI ที่นำมาคำนวณจะมีเพียงค่าเดียวซึ่งทำให้ค่าที่ได้ต่ำกว่าหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR โดยผลที่ได้จากโครงสร้างทั้งสองแบบแสดงการเปรียบเทียบในรูปที่ 7 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่า MI ในแต่ละจุดของหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR มีค่าที่ดีกว่า หุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 3-RRR โดยพิจารณาจากสีโดยภาพรวมของพื้นที่ที่ใช้งานที่ได้จากหุ่นยนต์ขนานแบบ 3-RRR มีค่าน้อยลง (รูปที่ 7(ข)) แต่เมื่อเพิ่มชุดขาเข้าไปทำให้โครงสร้างมีลักษณะเป็นโครงสร้างส่วนเกินที่มีชุดขา 4 แบบสำหรับพิจารณาเลือกค่าที่ดีที่สุดจึงทำให้บริเวณที่มีค่าที่ดีอยู่นั้นดีขึ้นและเมื่อพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของ MI ทุกจุดที่อยู่ในพื้นที่ที่ใช้งานของโครงสร้าง 3-RRR พบว่ามีค่าเป็น 952.84 แต่เมื่อเพิ่มชุดขาเข้าไป ค่าเฉลี่ยของ MI มีค่าดีขึ้นเป็น 24.30 นั้นแสดงให้เห็นว่า การเพิ่มชุดขาให้กับโครงสร้างที่มีอยู่จะทำให้ค่าเฉลี่ยของ MI ดีขึ้นอย่างชัดเจน ซึ่งค่าที่ใช้เปรียบเทียบของหุ่นยนต์ทั้งสองแบบแสดงในตารางที่ 2

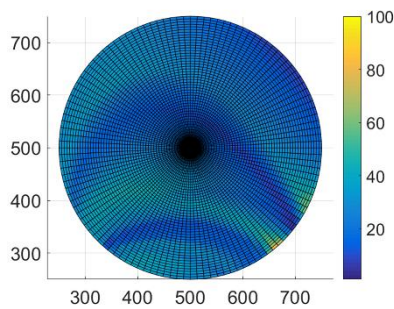


(ก) แสดงพื้นที่ที่ใช้งาน

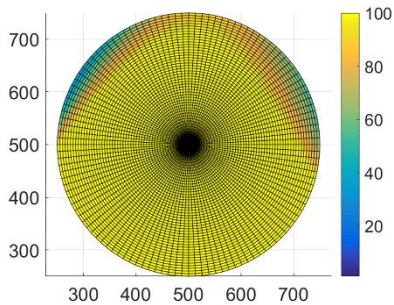


(ข) ดัชนีความสามารถในการจัดการที่อยู่ในพื้นที่ที่ใช้งาน

รูปที่ 6 ลักษณะของพื้นที่ที่ใช้งานและดัชนีความสามารถในการจัดการ



(ก) หุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR



(ข) หุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 3-RRR

รูปที่ 7 แสดงการเปรียบเทียบดัชนีความสามารถในการจัดการ

ตารางที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบค่า MI และอัตราส่วนของพื้นที่หุ่นยนต์ทำได้ต่อพื้นที่ใช้งานของหุ่นยนต์สองรูปแบบ

| รูปแบบของโครงสร้างหุ่นยนต์ | อัตราส่วนของพื้นที่หุ่นยนต์ทำได้ต่อพื้นที่ใช้งาน | ค่าเฉลี่ย MI ที่อยู่ในพื้นที่ที่ใช้งาน |
|----------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------|
| หุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR  | 1.202                                            | 24.30                                  |
| หุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 3-RRR  | 1.384                                            | 952.84                                 |

#### 4. บทสรุป

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษากลไกของหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR ซึ่งเป็นโครงสร้างส่วนเกินโดยนำเสนอการวิเคราะห์จลนศาสตร์ พื้นที่การทำงานและความสามารถในการจัดการของหุ่นยนต์ ในส่วนของจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์แบ่งเป็นจลนศาสตร์ผกผันซึ่งหาได้ง่ายโดยพิจารณาจากจลนศาสตร์ของแต่ละขาซึ่งเป็นแขนกลอนุกรม 2 องศาอิสระและจลนศาสตร์เชิงคืบหน้าซึ่งหาได้จากวิธีทางเรขาคณิตซึ่งจะแสดงคำตอบเมื่อตำแหน่งจุดปลายของแต่ละขาเหมาะสมกับขนาดของ

แผ่นเคลื่อนที่ สำหรับการวิเคราะห์พื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ วิธีทางเรขาคณิตถูกนำมาใช้ในการหาพื้นที่การทำงาน 3 ชนิด คือ พื้นที่การทำงานที่ลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่คงที่ พื้นที่การทำงานที่ยื่นไปถึง และพื้นที่การทำงานที่คล่องแคล่ว โดยพื้นที่ที่จุดปลายของหุ่นยนต์ทำงานได้เกิดจากการนำพื้นที่ของขาแต่ละขามาทับซ้อนกัน ในกรณีศึกษาผลที่ได้แสดงให้เห็นถึงขนาดพื้นที่การทำงานใหญ่ที่สุด คือ พื้นที่การทำงานที่ยื่นไปถึงรองลงมาเป็นพื้นที่การทำงานที่ลักษณะการวางตัวของแผ่นเคลื่อนที่คงที่ และพื้นที่การทำงานที่คล่องแคล่วมีขนาดเล็กที่สุด ในการวิเคราะห์ความสามารถในการจัดการของหุ่นยนต์ MI ถูกนำมาใช้ในการพิจารณาโดยแสดงถึงความสามารถในการส่งผ่านความเร็วของตัวขับไปยังจุดปลายของหุ่นยนต์ ค่าที่ได้ในแต่ละจุดจะถูกนำมาหาค่าเฉลี่ยในพื้นที่ที่ใช้งาน ซึ่งได้กำหนดให้อยู่ภายในพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำได้และเมื่อนำค่าที่ได้จากหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR ไปเปรียบเทียบกับหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 3-RRR ที่ไม่เป็นโครงสร้างกลุ่มโครงสร้างส่วนเกินพบว่าอัตราส่วนของพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำได้และพื้นที่ที่ใช้งานของหุ่นยนต์ขนานบนระนาบ 4-RRR มีค่าที่ต่ำกว่าโครงสร้างแบบ 3-RRR แต่จะสังเกตเห็นได้ว่าประสิทธิภาพในแง่ของการส่งผ่านความเร็วเฉลี่ยที่อยู่ในพื้นที่ที่ใช้งานดีขึ้นเมื่อเพิ่มชุดขาเข้าไปโดยเพิ่มขึ้น 37 เท่า เนื่องจากการเพิ่มชุดขาเข้ามาทำให้เกิดทางเลือกในการพิจารณาความสามารถในการจัดการโดยงานวิจัยที่นำเสนอนี้แสดงให้เห็น 4 รูปแบบ ดังนั้นในการออกแบบโครงสร้างให้มี ความสามารถในการจัดการโดยการเพิ่มจำนวนชุดขาต้องคำนึงถึงขนาดของพื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ที่จะลดลงเนื่องจากจำนวนขาที่เพิ่มขึ้น

สำหรับงานวิจัยในอนาคต ผู้วิจัยมีแนวคิดในการหาขนาดขาตอนล่าง และท่อนบนให้เหมาะสมกับอัตราส่วนของพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำได้และพื้นที่ที่ใช้งานโดยใช้ดัชนีที่มีผลต่อประสิทธิภาพ เช่น MI ความแม่นยำ ความแข็งแกร่งสมบัติทางพลศาสตร์รวมถึงสภาวะเอกฐานมาใช้เป็นเป้าหมายในการออกแบบโครงสร้างให้เหมาะสม





## 5. กิตติกรรมประกาศ

คณะวิจัยขอขอบคุณ ศูนย์พัฒนานวัตกรรมงานวิจัย และถ่ายทอดเทคโนโลยี คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ ผู้ให้ทุนสนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้และสาขาวิศวกรรมการจัดการพลังงาน มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ที่เอื้อเฟื้อสถานที่และทรัพยากรในการทำวิจัย

## 6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Iman E, Juan AC, Roger B. A Family of Kinematically Redundant Planar Parallel Manipulators. *Journal of Mechanical Design*. 2008; 130(6): 062306-1 - 062306-8. Available from: 10.1115/1.2900723.
- [2] Iman E, Juan AC, Roger B. 3-PRRR redundant planar parallel manipulator: Inverse displacement, workspace and singularity analyses. *Mechanism and Machine Theory*. 2007; 42 ( 8 ) : 1007- 1016 . Available from:10.1016/j.mechmachtheory.2006.07.006.
- [3] Varalakshmi KV,Srinivas J. Optimized Configurations of Kinematically Redundant Planar Parallel Manipulator following a Desired Trajectory. *Procedia Technology*. 2014; 14: 133–140.
- [4] Gosselin C, Laliberte T, Veillette A. Singularity-Free Kinematically Redundant Planar Parallel Mechanisms with Unlimited Rotational Capability. *IEEE Transactions on Robotics*. 2015; 31(2): 457-467.
- [5] Wang J, Wu J, Li T, Liu X. Workspace and singularity analysis of a 3-DOF planar parallel manipulator with actuation redundancy. *Robotica*. 2009; 27(1): 51-57.
- [6] Merlet JP. *Workspace in Parallel Robot (Solid mechanics and its application)*. New York: Springer-Verlag; 2006. P. 213–257.
- [7] Merlet JP. Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots. *ASME. Journal of Mechanical Design* 2005; 128(1): 199-206.
- [8] Wu J, Wang J, Wang L, You Z. Performance comparison of three planar 3-DOF parallel manipulator with 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR structure. *Mechatronics*. 2010; 20(4): 510-517.
- [9] Wu X, Xie Z, Asbollah K, Bai S. A parametric model of 3-PPR planar parallel manipulators for optimum shape design of platforms. *Mechanism and Machine Theory*. 2017; 20 (6): 139-153.
- [10] Abhilash P, Chandrashekhar A. Analysis of Performance Indices of Planar Parallel Manipulators. *Indian Journal of Science and Technology*. 2018; 11(23). 1-6.
- [11] Hamdoun O, Bakkali LE, Baghli FZ. Analysis and Optimum Kinematic Design of a Parallel Robot. In: the 10<sup>th</sup> International Conference Interdisciplinarity in Engineering; 2016: Tirgu Mures, Romania.
- [12] Liu K, Fitzgerald JM, Lewis F. Kinematic analysis of a Stewart platform manipulator. *IEEE Transaction, Electronics*. 1993. 40(2): 283-293.
- [13] Ji P, Wu H. A closed-form forward kinematics solution for 6-6 Stewart platform manipulator. *IEEE Transaction, Robotics and Automations*. 2001; 17(4):522-526.
- [14] Xiguang H, Guangpin H. Closed-form direct position analysis of the general Stewart-Gough manipulator robot. In: the International Conference on Mechatronic and Automation; 2009 August 9-12; Changchun, China. P. 1327-1331.



- [15] Chifu Y, Huang Q, Ogbobe PO, Han J. Forward kinematic analysis of parallel robot using global newton-raphson method. In: the Second International Conference on Intelligent Computation Tchnology and Automation; 2009 October 10-11; Changsha, Hunan, China, 10-11 October, p.407-410.
- [16] Tongtib A, Puangmali P, Wongratanaphisan T. Kinematic analysis of a 3- $\overline{PRR}$ S parallel robot. In: the 7<sup>th</sup> TSME International Conference on Mechanical Engineering; 2016 December 13-16; Chiang Mai, Thailand.