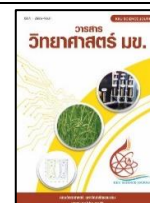




KKU SCIENCE JOURNAL

Journal Home Page : <https://ph01.tci-thaijo.org/index.php/KKUSciJ>

Published by the Faculty of Science, Khon Kaen University, Thailand



ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี แบบไม่คงที่

Mathematical Models for Annual Savings under Time-Varying Compounding Frequency

นราธิป อีสรรานุสรณ์^{1*}

Naratip Issaranusorn^{1*}

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม กรุงเทพมหานคร 10900

¹ Program of Mathematics, Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Bangkok, 10900, Thailand

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีแบบต้นงวดและตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีแบบปลายงวด โดยครอบคลุมกรณีที่จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี มูลค่าเงินปัจจุบัน และอัตราดอกเบี้ยที่เป็นค่าคงที่หรือสามารถเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้ รวมทั้ง 8 ตัวแบบ ในแต่ละตัวแบบประกอบด้วยมูลค่าเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนปีของการออมเงิน และจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี จากผลการวิจัยทำให้ได้ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีแบบต้นงวด 4 ตัวแบบ และตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีแบบปลายงวด 4 ตัวแบบ ซึ่งสามารถจำแนกตามลักษณะของพารามิเตอร์ได้ดังนี้ (1) กรณีจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีไม่คงที่ โดยมูลค่าเงินปัจจุบันและอัตราดอกเบี้ยคงที่ (2) กรณีจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีไม่คงที่ โดยมูลค่าเงินปัจจุบันคงที่ แต่อัตราดอกเบี้ยไม่คงที่ (3) กรณีจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีไม่คงที่ โดยมูลค่าเงินปัจจุบันไม่คงที่ แต่อัตราดอกเบี้ยคงที่ และ (4) กรณีจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีไม่คงที่ โดยมูลค่าเงินปัจจุบันและอัตราดอกเบี้ยไม่คงที่ ตัวแบบที่พัฒนาขึ้นมีลักษณะเป็นการขยายของสูตรดอกเบี้ยทบต้นและอนุกรมเรขาคณิตไปสู่กรณีที่พารามิเตอร์ไม่คงที่ และตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบทั้งหมดด้วยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ ตัวแบบยังได้รับการยืนยันความถูกต้องเพิ่มเติมผ่านตัวอย่างเชิงตัวเลขและการประยุกต์ใช้ภายใต้เงื่อนไขที่แตกต่างกัน

ABSTRACT

This research aims to develop mathematical models for annuity due and annuity immediate covering cases where the number of compounding periods per year, present value, and interest rate may be either constant or time-varying. A total of eight mathematical models are constructed, each consisting of present value, annual interest rate, number of years, and compounding frequency. The results show that four models for annuity due and four models for annuity immediate are obtained, which can be classified based on parameter characteristics as follows: (1) a time-varying compounding frequency with both present

*Corresponding Author, E-mail: naratip.i@chandra.ac.th

Received date: 5 January 2026 | Revised date: 9 April 2026 | Accepted date: 22 April 2026

doi: 10.14456/kkuscij.2026.30

value and interest rate constant, (2) a time-varying compounding frequency with a constant present value and a nonconstant interest rate, (3) a time-varying compounding frequency with a nonconstant present value and a constant interest rate, and (4) a time-varying compounding frequency with both the present value and the interest rate varying over time. The proposed models can be regarded as generalizations of classical compound interest formulas and geometric series to the case of non-constant parameters, and their correctness is verified using mathematical induction. In addition, the models are further validated through numerical examples and applications under varying conditions.

คำสำคัญ: การออมรายปีแบบต้นงวด การออมรายปีแบบปลายงวด ตัวแบบคณิตศาสตร์ การทบต้นแบบไม่คงที่ต่อปี

Keywords: Annuity Due, Annuity Immediate, Mathematical Model, Time-varying Compounding Frequency

บทนำ

การออมเงินเป็นกระบวนการสำคัญในการบริหารจัดการทรัพยากรทางการเงินของบุคคลและครอบครัวเพื่อให้มีเสถียรภาพและความคล่องตัวทางการเงิน หากมีความจำเป็นต้องใช้เงินจากเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแบบกะทันหัน เช่น อุบัติเหตุ การเจ็บป่วย หรือภัยธรรมชาติ ตลอดจนการออมเงินยังเป็นเครื่องมือสำคัญในการวางแผนการเงินเพื่อเป้าหมายในอนาคต เช่น การเตรียมเงินเพื่อการเกษียณอายุ และการลงทุนเพื่อเพิ่มมูลค่าเงินในระยะยาว ทั้งนี้ ในระดับมหภาค หากประชากรมีวินัยทางการเงินและมีการออมเงิน จะส่งผลดีต่อการพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ โดยเฉพาะในการเป็นแหล่งเงินทุนสำรองของภาครัฐ ลดการพึ่งพาการกู้ยืมจากต่างประเทศ และส่งเสริมการเติบโตทางเศรษฐกิจอย่างยั่งยืน

ในบริบทของประเทศไทย งานวิจัยที่ผ่านมาได้สะท้อนให้เห็นถึงปัญหาในการวางแผนการเงินของประชาชน โดยสร้อยเพชรและฐิติพร (2568) ได้ทำการศึกษาปัจจัยการวางแผนการเงินของผู้สูงอายุ จำนวน 400 คน ใน 4 จังหวัดภาคกลางตอนล่าง ได้แก่ นครปฐม กาญจนบุรี ราชบุรี และสุพรรณบุรี ผลการศึกษาพบว่า ค่าเฉลี่ยโดยรวมของการวางแผนการเงินของผู้สูงอายุอยู่ในระดับต่ำ เนื่องจากผู้สูงอายุส่วนใหญ่ยังไม่มีความรู้ ความเข้าใจ รวมทั้งไม่ทราบรูปแบบการออมที่เหมาะสม ขณะที่บุษราภรณ์และปรีวัตร (2564) ได้ทำการศึกษาการวางแผนการเงินส่วนบุคคลของครูและบุคลากรทางการศึกษาในจังหวัดอุดรธานี จำนวน 388 คน พบว่า แม้จะมีทัศนคติที่ดีต่อการวางแผนการเงิน แต่ยังมีความรู้ด้านการออมอยู่ในระดับปานกลาง สะท้อนให้เห็นถึงความจำเป็นในการพัฒนาเครื่องมือหรือแนวทางที่ช่วยสนับสนุนการวางแผนการเงินอย่างมีประสิทธิภาพ

ในเชิงทฤษฎี แนวคิดเกี่ยวกับดอกเบี้ยทบต้น ซึ่งเป็นกลไกสำคัญของการเติบโตของมูลค่าเงิน ได้รับการอธิบายว่าเกิดจากปัจจัยหลัก 3 ประการ ได้แก่ จำนวนเงิน ระยะเวลา และอัตราดอกเบี้ย (ณัฐ, 2564) ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นจะถูกรวมเข้ากับเงินต้นและคำนวณต่อเนื่อง ส่งผลให้มูลค่าเงินเพิ่มขึ้นในลักษณะของลำดับเรขาคณิต (ยุวรีย์และกฤษณะ, 2562) แนวคิดเกี่ยวกับการออมและมูลค่าเงินอนาคตภายใต้ดอกเบี้ยทบต้นได้รับการพัฒนาในตำรามาตรฐาน เช่น Mathematics of Investment and Credit (Broverman, 2017) และ The Theory of Interest (Kellison, 2008) ซึ่งโดยทั่วไปกำหนดให้อัตราดอกเบี้ยและจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีเป็นค่าคงที่ นอกจากนี้ แนวคิดการออมที่มีการเปลี่ยนแปลงของกระแสเงินสดยังปรากฏใน An Introduction to the Mathematics of Finance (McCutcheon and Scott, 1986) ขณะที่ Pournara (2013) ชี้ให้เห็นว่างานวิจัยด้านคณิตศาสตร์การเงินยังมีข้อจำกัดและควรได้รับการพัฒนาเพิ่มเติมเพื่อนำไปใช้ในการช่วยครูผู้สอนถ่ายทอดเรื่องดอกเบี้ยทบต้นแก่นักเรียนระดับมัธยมศึกษา ซึ่งจะช่วยปลูกฝังวินัยการออมในบริบทของคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน

ในช่วงที่ผ่านมา Issaranusorn (2015, 2016) และ นราธิป (2563, 2565) ได้พัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมหลายรูปแบบ โดยครอบคลุมทั้งกรณีเงินออมและอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่หรือไม่คงที่ ซึ่งมีส่วนช่วยขยายองค์ความรู้และเพิ่มความหลากหลายของการวิเคราะห์ในด้านคณิตศาสตร์การเงิน อย่างไรก็ตาม ตัวแบบดังกล่าวกำหนดให้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีเป็นค่าคงที่ ซึ่งเป็นสมมติฐานที่เหมาะสมในหลายกรณี แต่ยังสามารถต่อยอดเพื่อรองรับลักษณะของผลิตภัณฑ์ทางการเงินในทางปฏิบัติที่มีความหลากหลายและซับซ้อนมากขึ้นได้

ในการศึกษาเรื่อง จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี (compounding periods per year) ที่มีการเปลี่ยนแปลงได้ตามระยะเวลาการออมในแต่ละปี เช่น เปลี่ยนจากการทบต้นรายปีเป็นรายไตรมาส เป็นรายเดือนหรือเป็นรายวันในปีต่อไป ซึ่งมีความสำคัญต่อการสร้างองค์ความรู้เพื่อนำมาใช้เป็นเครื่องมือช่วยวิเคราะห์ในชีวิตจริง เป็นการสร้างภูมิคุ้มกันทางการเงินให้มากขึ้น จากกรณีต่าง ๆ เช่น การทำสัญญาทางการเงินแบบระบุจำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี หรือสัญญาทางการเงินในลักษณะ OTC (over the counter) หรือการนำวิเคราะห์มูลค่าเงินที่จะได้รับการออมในผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตที่กำหนดให้จ่ายเบี้ยประกันเพียงแค่ 1 ครั้งต่อปีต่อกรมธรรม์ หรือกองทุนต่าง ๆ แนวคิดดังกล่าวสอดคล้องกับองค์ความรู้ด้านการเงินเชิงปริมาณ เช่น Options Futures and Other Derivatives (Hull, 2021) และแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek (Vasicek, 1977) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าพารามิเตอร์ทางการเงินสามารถเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้ ดังนั้น ตัวแบบคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีเป็นแบบไม่คงที่ จะเป็นตัวแบบที่เพิ่มมิติในการคิดวิเคราะห์พฤติกรรมของมูลค่าเงินอนาคตในสถานการณ์จริงได้อย่างครอบคลุมมากยิ่งขึ้น

จากการทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมา ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยกำหนดวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีทั้งแบบต้นงวดและแบบปลายงวด ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปี เป็นการขยายกรอบแนวคิดของตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมจากกรณีที่กำหนดให้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีเป็นแบบคงที่ ซึ่งเป็นการปรับเปลี่ยนสมมติฐานของตัวแบบคณิตศาสตร์เดิม พร้อมทั้งพิสูจน์ความถูกต้องของตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมที่พัฒนาขึ้นด้วยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในเชิงวิชาการ และสามารถนำตัวแบบไปวางแผนวิเคราะห์มูลค่าเงินอนาคตในสถานการณ์จริงที่มีการเปลี่ยนแปลงจำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี รวมถึงประยุกต์ใช้ในการวางแผนการเงินและเปรียบเทียบผลตอบแทนจากผลิตภัณฑ์ทางการเงินที่มีเงื่อนไขการทบต้นที่มีจำนวนครั้งที่แตกต่างกันในแต่ละปีหรือแต่ละช่วงเวลา ซึ่งช่วยให้การวางแผนการเงินมีความสอดคล้องกับสถานการณ์จริงมากยิ่งขึ้น ส่งผลให้ตัวแบบที่พัฒนาขึ้นมีความครอบคลุมและสามารถรองรับสถานการณ์ที่มีความซับซ้อนได้มากขึ้น ทั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดตัวแปรต่าง ๆ ที่แสดงในตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีทั้งแบบต้นงวดและแบบปลายงวด ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปี ที่ปรากฏในบทความ ดังแสดงในตารางที่ 1 เพื่อให้เกิดความชัดเจน

ตารางที่ 1 ตัวแปรต่าง ๆ ที่ปรากฏในบทความ

ตัวแปร	ความหมาย
n	จำนวนปีของการออมเงิน
A	มูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่
r	อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่
R_i	มูลค่าเงินปัจจุบันแบบไม่คงที่ ปีที่ i โดยที่ $1 \leq i \leq n$
r_j	อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่ ปีที่ j โดยที่ $i \leq j < n$
m_j	จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ ปีที่ j โดยที่ $i \leq j < n$

ตารางที่ 1 ตัวแปรต่าง ๆ ที่ปรากฏในบทความ (ต่อ)

ตัวแปร	ความหมาย
M_j	$\left(1 + \frac{r}{m_j}\right)$
M_j^i	$\left(1 + \frac{r_j}{m_j}\right)$
$AD^{cp}(n)$	มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ n จากการออมรายปีแบบต้นงวด ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่ อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่หรือแบบไม่คงที่ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปี
$AD^{np}(n)$	มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ n จากการออมรายปีแบบต้นงวด ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบไม่คงที่ อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่หรือแบบไม่คงที่ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปี
$AI^{cp}(n)$	มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ n จากการออมรายปีแบบปลายงวด ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่ อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่หรือแบบไม่คงที่ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปี
$AI^{np}(n)$	มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ n จากการออมรายปีแบบปลายงวด ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบไม่คงที่ อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่หรือแบบไม่คงที่ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปี

วิธีการดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปี ประกอบด้วยทฤษฎีบทจำนวน 4 ทฤษฎีบท ซึ่งนำไปสู่ตัวแบบคณิตศาสตร์ จำนวน 8 ตัวแบบ ครอบคลุมการออมทั้งแบบต้นงวดและแบบปลายงวด แต่ละตัวแบบ ประกอบด้วยมูลค่าเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนปีของการออมเงิน และจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี โดยมีขอบเขตการวิจัย คือ ออมปีละหนึ่งครั้ง มูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่หรือแบบไม่คงที่ อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่หรือแบบไม่คงที่ ภายใต้เงื่อนไขจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่

การดำเนินการวิจัยเริ่มจากการศึกษาทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ทั้งในด้านการวางแผนการเงิน ดอกเบี้ยทบต้น และการพัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออม เพื่อนำมาวิเคราะห์และกำหนดกรอบแนวคิดของงานวิจัย จากนั้นจึงพัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปี โดยจำแนกเป็นกรณีการออมแบบต้นงวดและแบบปลายงวด

ภายหลังการพัฒนาตัวแบบ ผู้วิจัยได้พิสูจน์ความถูกต้องของตัวแบบทั้ง 8 ตัวแบบด้วยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อยืนยันความถูกต้องเชิงทฤษฎีของตัวแบบที่นำเสนอ นอกจากนี้ ยังได้จัดทำตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ของตัวแบบ และตรวจสอบความสอดคล้องของผลลัพธ์กับกรณีมาตรฐาน

สุดท้าย ผู้วิจัยได้วิจารณ์ผล สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ จากตัวแบบที่พัฒนาขึ้น เพื่อแสดงถึงความเหมาะสม และศักยภาพในการนำไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง รวมทั้งเสนอแนวทางสำหรับการศึกษาค้นคว้าในอนาคต

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้เป็นการขยายกรอบแนวคิดของสูตรดอกเบี้ยทบต้นแบบมาตรฐาน ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะเมื่อจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีเป็นแบบคงที่ ดังนั้น ตัวแบบที่พัฒนาขึ้นจึงช่วยขยายขอบเขตของการวิเคราะห์มูลค่าเงินอนาคตในสถานการณ์จริงที่มีการเปลี่ยนแปลงจำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี

นอกจากนี้ ตัวแบบมีโครงสร้างในลักษณะของการรวมกันระหว่างผลบวกและผลคูณ ซึ่งแสดงถึงการสะสมของมูลค่าเงินในแต่ละปีร่วมกับดอกเบี้ยทบต้นในช่วงเวลาที่แตกต่างกัน โดยสามารถพิจารณาเป็นการขยายรูปแบบของอนุกรมเรขาคณิต ภายใต้เงื่อนไขที่พารามิเตอร์ไม่คงที่ ทั้งนี้ ตัวแบบที่นำเสนอสามารถรองรับกรณีที่จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีและอัตราดอกเบี้ยต่อปีเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้พร้อมกัน

ในส่วนถัดไป ผู้วิจัยนำเสนอทฤษฎีบทซึ่งให้รูปแบบทั่วไปของตัวแบบคณิตศาสตร์ดังกล่าว พร้อมทั้งการพิสูจน์อย่างเป็นระบบ จากนั้นนำเสนอการประยุกต์ใช้ผ่านตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อเปรียบเทียบมูลค่าเงินอนาคตจากตัวแบบที่พัฒนาขึ้นกับตัวแบบมาตรฐาน ในสถานการณ์ที่มีเงื่อนไขแตกต่างกัน ตลอดจนการวิเคราะห์ความไวของมูลค่าเงินอนาคตที่ได้จากกรณีศึกษาผ่านตัวอย่างเชิงตัวเลข เพื่อยืนยันผลเชิงทฤษฎีและแสดงศักยภาพของตัวแบบในการใช้งานจริง

1. ทฤษฎีบทหลัก (Main Theoretical Results)

เพื่อให้การนำเสนอมีความเป็นระบบ ผู้วิจัยเริ่มจากการพัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายปีในกรณีพื้นฐาน คือ การออมแบบต้นงวดภายใต้มูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่ ซึ่งเป็นกรณีตั้งต้นสำหรับการขยายไปสู่กรณีทั่วไปในลำดับถัดไป ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ A เป็นจำนวนตรรกยะบวก r, r_j เป็นจำนวนจริงบวก และให้ n, m_j เป็นจำนวนเต็มบวก ตัวแบบการออมรายปีแบบต้นงวด ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่ A จำนวนปีที่ออม n อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่ r หรือแบบไม่คงที่ r_j ตามลำดับ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้น m_j ครั้งต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปีที่ j เมื่อ $i \leq j < n$ มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ n แสดงดังตัวแบบ

$$AD^{cp}(n) = \begin{cases} A \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^n \left(1 + \frac{r}{m_j}\right)^{m_j} \\ A \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^n \left(1 + \frac{r_j}{m_j}\right)^{m_j} \end{cases} \quad (1)$$

ตัวแบบนี้แสดงการออมในลักษณะต้นงวด โดยมูลค่าเงินอนาคตเกิดจากการสะสมของมูลค่าเงินปัจจุบันหรือเงินออมในแต่ละปี แต่ละพจน์สะท้อนผลของการทบต้นภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นที่แตกต่างกันในแต่ละปี ซึ่งช่วยอธิบายโครงสร้างของตัวแบบในเชิงการเงินและความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

พิสูจน์

โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับตัวแปร n สำหรับ $n = 1$ และใช้สูตรการคำนวณเงินรวมแบบดอกเบี้ยทบต้น จะได้มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 $AD^{cp}(1)$ เป็นผลคูณระหว่างมูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่ A กับค่าคงตัวในเทอมของ 2 ตัวแปร คือ อัตราดอกเบี้ยแบบคงที่ r หรืออัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่ r_j และจำนวนครั้งของการทบต้น ปีที่ 1 $\left(1 + \frac{r}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1}$ ซึ่งผลคูณนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปตัวแบบ

$$AD^{cp}(1) = A \sum_{i=1}^1 \prod_{j=i}^1 \left(1 + \frac{r}{m_j}\right)^{m_j} \quad \text{หรือ} \quad AD^{cp}(1) = A \sum_{i=1}^1 \prod_{j=i}^1 \left(1 + \frac{r_j}{m_j}\right)^{m_j} \quad \text{ตามลำดับ} \quad (2)$$

แสดงให้เห็นว่า $AD^{cp}(1)$ เป็นจริง

สมมติ $AD^{cp}(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k

กรณี 1 อัตราดอกเบี้ยแบบคงที่ r ต่อปี

มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ $k+1$ $AD^{cp}(k+1)$ ได้จากผลคูณระหว่างมูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่ ปีที่ $k+1$ $AD^{cp}(k) + A$ กับค่าคงตัวในเทอมของ 2 ตัวแปร คือ อัตราดอกเบี้ยแบบคงที่และจำนวนครั้งของการทบต้นแบบไม่คงที่ ปีที่ $k+1$ $\left(1 + \frac{r}{m_{k+1}}\right)^{m_{k+1}}$ และจากสมมติฐานเชิงอุปนัย $AD^{cp}(k)$ เป็นจริง จะได้ตัวแบบ

$$AD^{cp}(k+1) = A \sum_{i=1}^{k+1} \prod_{j=i}^{k+1} \left(1 + \frac{r}{m_j}\right)^{m_j} \quad (3)$$

กรณี 2 อัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่ r_j ต่อปี

จากสมมติฐานเชิงอุปนัย $AD^{cp}(k)$ เป็นจริง ทำให้มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ $k+1$ $AD^{cp}(k+1)$ ได้จากตัวแบบ

$$AD^{cp}(k+1) = A \sum_{i=1}^{k+1} \prod_{j=i}^{k+1} \left(1 + \frac{r_j}{m_j}\right)^{m_j} \quad (4)$$

จากทั้งสองกรณี แสดงให้เห็นว่า $AD^{cp}(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $AD^{cp}(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวแบบที่ได้แสดงให้เห็นว่าโครงสร้างของมูลค่าเงินอนาคตสามารถพิจารณาได้ในรูปของผลรวมของพจน์ที่ถูกถ่วงน้ำหนักด้วยตัวคูณจากอัตราดอกเบี้ยที่แตกต่างกันในแต่ละช่วงเวลา ซึ่งสะท้อนผลของการเปลี่ยนแปลงความถี่ในการทบต้นต่อพฤติกรรมการเติบโตของมูลค่าเงิน

จากกรณีพื้นฐานดังกล่าว ผู้วิจัยขยายตัวแบบไปสู่กรณีที่มูลค่าเงินปัจจุบันในแต่ละปีสามารถเปลี่ยนแปลงได้ ซึ่งสะท้อนพฤติกรรมการออมที่มีความยืดหยุ่นมากขึ้นในทางปฏิบัติ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2 กำหนดให้ R_i เป็นจำนวนตรรกยะบวก r, r_j เป็นจำนวนจริงบวก และให้ n, m_j เป็นจำนวนเต็มบวก ตัวแบบการออมรายปีแบบต้นงวด ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบไม่คงที่ R_i ในแต่ละปีที่ i เมื่อ $1 \leq i \leq n$ จำนวนปีที่ออม n อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่ r หรือแบบไม่คงที่ r_j ตามลำดับ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้น m_j ครั้งต่อปีแบบไม่คงที่ ในแต่ละปีที่ j เมื่อ $i \leq j < n$ มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ n แสดงดังตัวแบบ

$$AD^{np}(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n R_i \prod_{j=i}^n (M_j)^{m_j} \\ \sum_{i=1}^n R_i \prod_{j=i}^n (M_j^j)^{m_j} \end{cases} \quad (5)$$

เมื่อ M_j และ M_j^j แทน $\left(1 + \frac{r}{m_j}\right)$ และ $\left(1 + \frac{r_j}{m_j}\right)$ ตามลำดับ

ตัวแบบนี้มีโครงสร้างคล้ายกับทฤษฎีบทที่ 1 แต่พิจารณากรณีที่มูลค่าเงินปัจจุบันในแต่ละปีเป็นแบบไม่คงที่ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นที่อาจแตกต่างกันในแต่ละปี ซึ่งขยายสถานการณ์การออมให้มีความยืดหยุ่นมากขึ้น และส่งผลต่อการสะสมของมูลค่าเงินอนาคต

พิสูจน์

โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับตัวแปร n

ขั้นฐาน เมื่อ $n=1$ จะได้มูลค่าเงินอนาคตสอดคล้องกับตัวแบบที่กำหนด

ขั้นอุปนัย สมมติให้ตัวแบบเป็นจริง สำหรับ $n=k$

พิจารณา $n=k+1$

มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ $k+1$ สามารถเขียนได้เป็นผลรวมของมูลค่าเงินปัจจุบันในแต่ละปีแบบไม่คงที่ ร่วมกับผลของการทบต้นตามอัตราดอกเบี้ยและจำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี โดยโครงสร้างของการจัดรูปสมการสามารถดำเนินการได้ในลักษณะเดียวกับทฤษฎีบทที่ 1 แต่ปรับให้สอดคล้องกับกรณีที่มูลค่าเงินปัจจุบันในแต่ละปีแบบไม่คงที่

จากสมมติฐานเชิงอุปนัย เมื่อแทนค่าและจัดรูปสมการ จะได้ผลลัพธ์อยู่ในรูปเดียวกับตัวแบบที่ต้องการ ทั้งในกรณีอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่และแบบไม่คงที่ ดังนี้

$$\text{กรณีอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่ } r \text{ ต่อปี} \quad AD^{np}(k+1) = \left(\sum_{i=1}^k R_i \prod_{j=i}^k (M_j)^{m_j} + R_{k+1} \right) (M_{k+1})^{m_{k+1}} \quad (6)$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} R_i \prod_{j=i}^{k+1} (M_j)^{m_j} \quad (7)$$

กรณีอัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่ r_j ต่อปี

$$AD^{np}(k+1) = \left(\sum_{i=1}^k R_i \prod_{j=i}^k (M_j^j)^{m_j} + R_{k+1} \right) (M_{k+1}^{k+1})^{m_{k+1}} \quad (8)$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} R_i \prod_{j=i}^{k+1} (M_j^j)^{m_j} \quad (9)$$

ดังนั้น ตัวแบบจึงเป็นจริงสำหรับ $n = k + 1$

สรุปได้ว่า $AD^{np}(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

นอกจากกรณีการออมแบบต้นงวดแล้ว ผู้วิจัยพิจารณาการออมรายปีแบบปลายงวด ซึ่งมีโครงสร้างของการทบต้นแตกต่างออกไปตามช่วงเวลาของการออม ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 กำหนดให้ A เป็นจำนวนตรรกยะบวก r, r_j เป็นจำนวนจริงบวก และให้ n, m_j เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \geq 2$ ตัวแบบการออมรายปีแบบปลายงวด ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่ A จำนวนปีที่ออม n อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่ r หรือแบบไม่คงที่ r_j ตามลำดับ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้น m_j ครั้งต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปีที่ j เมื่อ $i \leq j < n$ มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ n แสดงดังตัวแบบ

$$AI^{cp}(n) = \begin{cases} A \left(1 + \sum_{i=2}^n \prod_{j=i}^n (M_j)^{m_j} \right) \\ A \left(1 + \sum_{i=2}^n \prod_{j=i}^n (M_j^j)^{m_j} \right) \end{cases} \quad (10)$$

เมื่อ M_j และ M_j^j แทน $\left(1 + \frac{r}{m_j}\right)$ และ $\left(1 + \frac{r_j}{m_j}\right)$ ตามลำดับ

ตัวแบบนี้แสดงการออมในลักษณะปลายงวด โดยมูลค่าเงินปัจจุบันในแต่ละปีจะเริ่มทบต้นตั้งแต่สิ้นงวดนั้น ทำให้จำนวนครั้งของการทบต้นแตกต่างจากการออมในลักษณะต้นงวด ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นที่อาจแตกต่างกันในแต่ละปี และส่งผลต่อมูลค่าเงินอนาคตที่คำนวณได้

พิสูจน์

โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับตัวแปร n

ขั้นฐาน เมื่อ $n = 2$ จะได้มูลค่าเงินอนาคตสอดคล้องกับตัวแบบที่กำหนด

ขั้นอุปนัย สมมติให้ตัวแบบเป็นจริง สำหรับ $n = k$

พิจารณา $n = k + 1$

มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ $k + 1$ สามารถเขียนได้เป็นผลบวกของเงินออมในปีที่ $k + 1$ ซึ่งเป็นการออมแบบปลายงวด และมูลค่าเงินสะสมจากช่วงเวลาก่อนหน้าที่ถูกทบต้นตามอัตราดอกเบี้ยและจำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี โดยพจน์ที่เพิ่มขึ้นในปีที่ $k + 1$ จะยังไม่ถูกทบต้นในช่วงเวลาเดียวกัน ขณะที่เงินออมในช่วงก่อนหน้าจะยังคงถูกทบต้นตามเงื่อนไขที่กำหนด

จากสมมติฐานเชิงอุปนัย เมื่อแทนค่าและจัดรูปสมการ จะได้ผลลัพธ์อยู่ในรูปเดียวกับตัวแบบที่ต้องการ ทั้งในกรณีอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่และแบบไม่คงที่ ดังนี้

กรณีอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่

$$AI^{cp}(k+1) = A + A \left(1 + \sum_{i=2}^k \prod_{j=i}^k (M_j)^{m_j} \right) (M_{k+1})^{m_{k+1}} \quad (11)$$

$$= A \left(1 + \sum_{i=2}^{k+1} \prod_{j=i}^{k+1} (M_j)^{m_j} \right) \quad (12)$$

กรณีอัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่

$$AI^{CP}(k+1) = A + A \left(1 + \sum_{i=2}^k \prod_{j=i}^k (M_j^j)^{m_j} \right) (M_{k+1}^{k+1})^{m_{k+1}} \quad (13)$$

$$= A \left(1 + \sum_{i=2}^{k+1} \prod_{j=i}^{k+1} (M_j^j)^{m_j} \right) \quad (14)$$

ดังนั้น ตัวแบบจึงเป็นจริงสำหรับ $n = k + 1$

สรุปได้ว่า $AI^{CP}(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

สุดท้าย ผู้วิจัยได้ขยายตัวแบบไปสู่กรณีทั่วไปมากขึ้น โดยพิจารณาการออมแบบปลายงวดร่วมกับมูลค่าเงินปัจจุบันที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ในแต่ละปี ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้นที่แตกต่างกันในแต่ละปี ทำให้ตัวแบบมีความยืดหยุ่นและครอบคลุมสถานการณ์จริงมากยิ่งขึ้น ดังนี้

ทฤษฎีบท 4 กำหนดให้ R_i เป็นจำนวนตรรกยะบวก r, r_j เป็นจำนวนจริงบวก และให้ n, m_j เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \geq 2$ ตัวแบบการออมรายปีแบบปลายงวด ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบไม่คงที่ R_i ในแต่ละปีที่ i เมื่อ $1 \leq i < n$ จำนวนปีที่ออม n ปี อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่ r หรือแบบไม่คงที่ r_j ตามลำดับ ภายใต้จำนวนครั้งของการทบต้น m_j ครั้งต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปีที่ j เมื่อ $i \leq j < n$ มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ n แสดงดังตัวแบบ

$$AI^{np}(n) = \begin{cases} R_n + \sum_{i=2}^n R_{i-1} \prod_{j=i}^n (M_j)^{m_j} \\ R_n + \sum_{i=2}^n R_{i-1} \prod_{j=i}^n (M_j^j)^{m_j} \end{cases} \quad (15)$$

เมื่อ M_j และ M_j^j แทน $\left(1 + \frac{r}{m_j}\right)$ และ $\left(1 + \frac{r_j}{m_j}\right)$ ตามลำดับ

พิสูจน์

โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับตัวแปร n

ขั้นฐาน เมื่อ $n = 2$ จะได้มูลค่าเงินในอนาคตสอดคล้องกับตัวแบบที่กำหนด

ขั้นอุปนัย สมมติให้ตัวแบบเป็นจริง สำหรับ $n = k$

พิจารณา $n = k + 1$

มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ $k + 1$ สามารถเขียนได้เป็นผลบวกของเงินออมในปีที่ $k + 1$ ซึ่งมีมูลค่าเงินปัจจุบันแบบไม่คงที่ และมูลค่าเงินสะสมจากช่วงเวลาก่อนหน้าที่ถูกทบต้นตามอัตราดอกเบี้ยและจำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี โดยโครงสร้างของการจัดรูปสมการสามารถดำเนินการได้ในลักษณะเดียวกับทฤษฎีบทที่ 3 แต่พิจารณามูลค่าเงินปัจจุบันในแต่ละปีเป็นแบบไม่คงที่

จากสมมติฐานเชิงอุปนัย เมื่อแทนค่าและจัดรูปสมการ จะได้ผลลัพธ์อยู่ในรูปเดียวกับตัวแบบที่ต้องการ ทั้งในกรณีอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่และแบบไม่คงที่ ดังนี้

กรณีอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่

$$AI^{np}(k+1) = R_{k+1} + \sum_{i=2}^{k+1} R_{i-1} \prod_{j=i}^{k+1} M^{m_j} \quad (16)$$

กรณีอัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่

$$AI^{np}(k+1) = R_{k+1} + \sum_{i=2}^{k+1} R_{i-1} \prod_{j=i}^{k+1} (M_j^j)^{m_j} \quad (17)$$

ดังนั้น ตัวแบบจึงเป็นจริงสำหรับ $n = k + 1$

สรุปได้ว่า $AI^{np}(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จากทฤษฎีบท 1 - 4 ข้างต้น ซึ่งให้รูปแบบทั่วไปของตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมเงินภายใต้เงื่อนไขที่หลากหลาย ในส่วนถัดไปจะนำเสนอการประยุกต์ใช้ตัวแบบดังกล่าวผ่านตัวอย่างเชิงตัวเลข การตรวจสอบความถูกต้อง และการวิเคราะห์ในมิติต่าง ๆ เพื่อยืนยันผลเชิงทฤษฎีและแสดงศักยภาพของตัวแบบในการใช้งานจริง

2. ตัวอย่างเชิงตัวเลข (Numerical Examples)

เพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท ผู้วิจัยได้นำเสนอกรณีศึกษาเพื่อเป็นตัวอย่างการจำลองสถานการณ์เชิงตัวเลข โดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 1 และ 3 ในกรณีที่มูลค่าเงินปัจจุบันและอัตราดอกเบี้ยต่อปีเป็นค่าคงที่ ทั้งนี้ เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนในการเปรียบเทียบมูลค่าเงินในอนาคตกับตัวแบบมาตรฐาน ได้แก่ การออมแบบต้นงวด (annuity due) ตามแนวคิดของ Issaranusorn (2015, 2016) รวมถึงการออมแบบปลายงวด (annuity immediate) ตามแนวคิดของ Issaranusorn (2015, 2016) เปรียบเทียบกับตัวแบบคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น โดยผู้วิจัยกำหนดให้มูลค่าเงินปัจจุบันเป็นค่าคงที่เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ และกำหนดจำนวนครั้งของการทบต้นเป็นแบบไม่คงที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

กรณีศึกษาที่ 1 พิจารณาการออมแบบต้นงวด โดยออมงวดละหนึ่งครั้งเป็นระยะเวลา 15 ปี กำหนดให้มูลค่าเงินปัจจุบันคงที่ปีละ 100,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อปี และมีจำนวนครั้งของการทบต้นปีละ 2 ครั้ง ทำการเปรียบเทียบมูลค่าเงินอนาคตที่ได้จากตัวแบบมาตรฐานกับตัวแบบคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น จากการนำค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดข้างต้นไปแทนลงในสมการทั้งสองตัวแบบ ผลการคำนวณแสดงในตารางที่ 3 ทั้งนี้ การกำหนดจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ ได้แสดงรายละเอียดไว้ในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 จำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี

ปีที่	จำนวนทบต้น	ปีที่	จำนวนทบต้น	ปีที่	จำนวนทบต้น
1	2	6	2	11	4
2	3	7	3	12	3
3	4	8	3	13	3
4	3	9	2	14	2
5	2	10	2	15	4

ตารางที่ 3 มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ 3 6 9 12 และ 15 จากการออมแบบต้นงวด

มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่	ตัวแบบมาตรฐาน	$AD^p(n)$	ผลต่างของดอกเบี้ย
3	312,222.42	312,244.80	22.39
6	643,652.80	643,691.00	38.19
9	995,472.84	995,568.86	96.02
12	1,368,936.89	1,369,146.68	209.79
15	1,765,376.51	1,765,738.03	361.52

จากตารางที่ 3 พบว่า มูลค่าเงินอนาคตของทั้งสองตัวแบบแตกต่างกัน แม้ว่าจะกำหนดอัตราดอกเบี้ยและระยะเวลาเท่ากัน โดยกรณีที่มีความถี่หรือจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีมากกว่าจะให้ผลลัพธ์สูงกว่า ซึ่งแสดงให้เห็นความแตกต่างระหว่างตัวแบบคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้นกับตัวแบบมาตรฐานอย่างชัดเจน

กรณีศึกษาที่ 2 พิจารณาการออมแบบปลายงวด โดยออมงวดละหนึ่งครั้งเป็นระยะเวลา 15 ปี กำหนดให้มูลค่าเงินปัจจุบันเป็นคงที่ปีละ 100,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อปี และมีจำนวนครั้งของการทบต้นปีละ 2 ครั้ง ทำการเปรียบเทียบมูลค่าเงินอนาคตที่ได้จากตัวแบบมาตรฐานกับตัวแบบคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น จากการนำค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดข้างต้นไปแทนลงในสมการทั้งสองตัวแบบ ผลการคำนวณแสดงในตารางที่ 5 ทั้งนี้ การกำหนดจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ ได้แสดงรายละเอียดไว้ในตารางที่ 4

ตารางที่ 4 จำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี

ปีที่	จำนวนทบต้น	ปีที่	จำนวนทบต้น	ปีที่	จำนวนทบต้น
1	2	6	2	11	4
2	3	7	3	12	2
3	4	8	3	13	4
4	2	9	3	14	4
5	2	10	2	15	1

ตารางที่ 5 มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่ 3 6 9 12 และ 15 จากการออมแบบปลายงวด

มูลค่าเงินอนาคตเมื่อครบสิ้นปีที่	ตัวแบบมาตรฐาน	$AI^p(n)$	ผลต่างของดอกเบี้ย
3	306,070.40	306,084.03	13.63
6	630,970.30	630,984.77	14.47
9	975,858.09	975,949.92	91.83
12	1,341,963.43	1,342,117.35	153.92
15	1,730,591.62	1,730,741.35	149.73

จากตารางที่ 5 พบว่า มูลค่าเงินอนาคตของทั้งสองตัวแบบเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับกรณีศึกษาที่ 1 แต่ในกรณีศึกษาที่ 2 นี้ ผู้วิจัยกำหนดความถี่หรือจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีเป็น 1 ครั้งในปีที่ 15 ซึ่งน้อยกว่าตัวแบบมาตรฐานที่กำหนดเป็น 2 ครั้ง ทำให้เห็นว่า ดอกเบี้ยยังคงเพิ่มขึ้น แต่เพิ่มขึ้นในอัตราที่ลดลงเมื่อเทียบกับปีก่อนหน้า

วิจารณ์ผล

จากตารางที่ 3 และ 5 สรุปได้ว่า นอกจากมูลค่าเงินอนาคตจะเพิ่มขึ้นตามจำนวนปี รวมถึงมูลค่าเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี และจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบคงที่แล้ว มูลค่าเงินในอนาคตยังสามารถเพิ่มขึ้นจากการเพิ่มความถี่หรือจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีได้อีกด้วย ตัวอย่างเช่น ในปีเดียวกัน หากมีการทบต้นจำนวน 4 ครั้ง จะทำให้มูลค่าเงินอนาคตสูงกว่ากรณีที่มีการทบต้นน้อยกว่า 4 ครั้ง ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีส่งผลต่อความไว (sensitivity) ของมูลค่าเงินอนาคต โดยทำให้มูลค่าเงินเพิ่มขึ้นได้รวดเร็วยิ่งขึ้น นอกจากนี้ การเปลี่ยนแปลงจำนวนครั้งของการทบต้นในแต่ละปี ซึ่งอาจมากกว่า เท่ากับ หรือน้อยกว่าตัวแบบมาตรฐาน ส่งผลให้การเพิ่มขึ้นของดอกเบี้ยในแต่ละปีมีลักษณะไม่สม่ำเสมอ อันแสดงถึงความไว (sensitivity) ของการเพิ่มมูลค่าเงินอนาคตที่แตกต่างกัน ทั้งนี้ ตัวอย่างเชิงตัวเลขที่นำเสนอแสดงให้เห็นว่าตัวแบบคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้นสามารถนำไปใช้ในการคำนวณและเปรียบเทียบผลลัพธ์ภายใต้เงื่อนไขที่ต่างกันได้โดยเป็นรูปธรรม

นอกจากนี้ ข้อได้เปรียบสำคัญของตัวแบบคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้น คือ ความยืดหยุ่นในการรองรับสถานการณ์ที่เงื่อนไขของการทบต้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้ในแต่ละช่วงเวลา ซึ่งแตกต่างจากตัวแบบมาตรฐานที่กำหนดให้จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีเป็นค่าคงที่ตลอดระยะเวลา ส่งผลให้ตัวแบบสามารถสะท้อนพฤติกรรมของเงินออมในบริบททางการเงินที่มีลักษณะพลวัตได้อย่างใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น ยกตัวอย่างเช่น การปรับเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยหรือรูปแบบการคิดดอกเบี้ยของบัญชีเงินฝากตามนโยบายธนาคาร การเปลี่ยนแปลงนโยบายการจ่ายผลตอบแทนของกองทุนรวมในแต่ละงวด การกำหนดผลประโยชน์ในผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตที่มีเงื่อนไขแตกต่างกันในแต่ละกรรมธรรม์และแต่ละช่วงเวลา หรือสัญญาทางการเงินในลักษณะ OTC ดังนั้น ตัวแบบที่พัฒนาขึ้นจึงไม่เพียงแต่ให้ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ถูกต้อง แต่ยังช่วยให้ผู้ออมสามารถศึกษาพฤติกรรมของมูลค่าเงินและการตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงของเงื่อนไขทางการเงินได้อย่างเป็นระบบ

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนด (deterministic model) สำหรับการออมรายปีทั้งแบบต้นงวดและแบบปลายงวด ภายใต้เงื่อนไขจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบไม่คงที่ในแต่ละปี รวมทั้งหมด 8 ตัวแบบ โดยตัวแบบที่พัฒนาขึ้นประกอบด้วยตัวแปร ได้แก่ มูลค่าเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี ระยะเวลาการออม และจำนวนครั้งของการทบต้นที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ในแต่ละปี พร้อมทั้งได้พิสูจน์ความถูกต้องของตัวแบบด้วยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่าตัวแบบที่พัฒนาขึ้นสามารถขยายขอบเขตของตัวแบบดอกเบี้ยทบต้นมาตรฐานที่กำหนดจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีแบบคงที่ และรองรับการวิเคราะห์สถานการณ์ภายใต้เงื่อนไขที่จำนวนครั้งของการทบต้นมีการเปลี่ยนแปลงในแต่ละปี ส่งผลให้สามารถศึกษาพฤติกรรมของมูลค่าเงินในบริบทที่มีความยืดหยุ่นมากยิ่งขึ้น ดังนั้น ตัวแบบคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้สามารถพิจารณาได้ว่าเป็นการขยาย (generalization) ของสูตรดอกเบี้ยทบต้นและตัวแบบการออมรายปีแบบมาตรฐาน โดยตัวแบบมาตรฐานสามารถมองได้ว่าเป็นกรณีพิเศษของตัวแบบที่พัฒนาขึ้น ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีและอัตราดอกเบี้ยถูกกำหนดให้มีค่าคงที่ในทุกปีหรือทุกช่วงเวลา

ทั้งนี้ ผู้วิจัยเสนอแนะว่าสามารถนำตัวแบบดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ในการวางแผนการออม โดยการเปรียบเทียบผลตอบแทนของผลิตภัณฑ์ทางการเงินที่มีเงื่อนไขแตกต่างกัน เช่น ผลิตภัณฑ์เงินฝากประจำ เงินฝากประจำพิเศษ กองทุนรวม สลากออมทรัพย์ต่าง ๆ หรือผลิตภัณฑ์ประกันชีวิต เพื่อสนับสนุนการตัดสินใจในการออมอย่างมีประสิทธิภาพและเหมาะสมกับเงื่อนไขที่เปลี่ยนแปลง โดยผู้ใช้งานอาจเป็นทั้งบุคคลทั่วไป นักวางแผนการเงิน และสถาบันการเงิน

อย่างไรก็ตาม ตัวแบบที่พัฒนาขึ้นยังอยู่ภายใต้ข้อสมมติบางประการ เช่น การกำหนดรูปแบบการออมรายปี และการกำหนดอัตราดอกเบี้ยในแต่ละช่วงเวลาให้อาจเป็นค่าคงที่หรือเปลี่ยนแปลงตามที่กำหนดไว้ล่วงหน้า นอกจากนี้ ตัวแบบยังไม่ได้พิจารณาปัจจัยความไม่แน่นอน เช่น ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในตลาด อัตราเงินเฟ้อ หรือความเสี่ยงทางการเงินอื่น ๆ ซึ่งปัจจัยเหล่านี้อาจส่งผลต่อมูลค่าเงินอนาคต และควรได้รับการศึกษาเพิ่มเติมในอนาคต

ดังนั้น ในการศึกษาวิจัยต่อไปเกี่ยวกับการพัฒนาตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออม อาจพิจารณากำหนดพารามิเตอร์ให้อยู่ในลักษณะตัวแปรสุ่ม หรือผสมผสานแนวคิดของตัวแบบสโตแคสติก (stochastic model) รวมถึงการประยุกต์ใช้การจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation) เพื่อจำลองสถานการณ์ให้สอดคล้องกับความผันผวนทางการเงิน ซึ่งอาจเกิดจากปัจจัยต่าง ๆ เช่น การระบอบของเชื้อโรค สงครามระหว่างประเทศ หรือความขัดแย้งจากต่างทวีป

นอกจากนี้ สำหรับหัวข้อวิจัยเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความไว (sensitivity analysis) ของจำนวนครั้งของการทบต้นแบบไม่คงที่ ซึ่งส่งผลต่อมูลค่าเงินอนาคต รวมถึงการกำหนดเงื่อนไขในการวิเคราะห์ปัจจัยต่าง ๆ เพื่อให้ดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นจนถึงขอบเขตบนสุด ภายใต้การทบต้นทั้งแบบกำหนดจำนวนครั้งต่อปีและแบบต่อเนื่อง (continuous compounding) และการใช้รหัสเทียม (pseudocode) เพื่อสนับสนุนการวิเคราะห์ดังกล่าว หัวข้อวิจัยนี้จึงถือเป็นเรื่องที่น่าสนใจสำหรับการศึกษต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิและกองบรรณาธิการของวารสารวิทยาศาสตร์ มข. เป็นอย่างสูง ที่กรุณาให้คำแนะนำต่าง ๆ เพื่อให้บทความวิจัยนี้มีความสมบูรณ์ และเป็นประโยชน์ต่อผู้อ่านทั้งในด้านการออมเงินและการศึกษาวิจัยต่อไป ผู้วิจัยขอขอบคุณสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม ที่เอื้ออำนวยความสะดวกในการทำวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- ณัฐ เลิศมงคล. (2564). ความมหัศจรรย์ของดอกเบี้ยทบต้น. แหล่งข้อมูล: <https://www.setinvestnow.com/th/knowledge/article/173-the-power-of-compound-interest>. ค้นเมื่อวันที่ 8 พฤศจิกายน 2568.
- นราธิป อีสรานุสรณ์. (2563). ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น. วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 30(2): 304 - 313 doi: 10.14416/j.kmutnb.2020.01.001.
- นราธิป อีสรานุสรณ์. (2565). ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือนเพื่อการวางแผนการเงิน. วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 32(2): 469 - 477. doi: 10.14416/j.kmutnb.2021.11.007.
- บุษราภรณ์ พวงปัญญา และปวิตร ป้องพาล. (2564). การวางแผนการเงินส่วนบุคคลเพื่อสร้างภูมิคุ้มกันทางด้านเศรษฐกิจของครูและบุคลากรทางการศึกษา. วารสารสถาบันวิจัยพัฒนธรรม 8(2): 155 - 164.
- ยุรริย์ พันธกล้า และกฤษณะ เนียมมณี. (2562). สู่เป้าหมายการออมด้วยลำดับเรขาคณิต. วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 64(698): 6 - 19. doi: 10.14456/mj-math.2019.7.
- สร้อยเพชร ลิสนิ และฐิติพร พระโพธิ์. (2568). ปัจจัยการวางแผนทางการเงินที่ส่งผลต่อคุณภาพชีวิตทางการเงินที่ดีอย่างมีคุณค่าของผู้สูงอายุจังหวัดภาคกลางตอนล่าง 1. วารสารวิทยาการจัดการ มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม 7(2): 87 - 101.
- Broverman, S.A. (2017). Mathematics of investment and credit (6th ed.). New Hartford, CT: ACTEX Learning.
- Hull, J.C. (2021). Options, futures, and other derivatives (10th ed.). Pearson. 896 pages.
- Issaranusorn, N. (2015). Future saving model by using mathematical technique. In: Proceedings of the 2nd National and International Research Conference. Thailand: Graduate School Nakhon Ratchasima Rajabhat University, 426 - 435.
- Issaranusorn, N. (2016). Saving mathematical model with inconstant present value and inconstant compound interest rate. In: Proceedings of International Congress on Banking, Economics, Finance and Business. Japan, 241 - 251.
- Kellison, S.G. (2008). The theory of interest (3rd ed.). McGraw-Hill.
- McCutcheon, J.J. and Scott, W.F. (1986). An introduction to the mathematics of finance. London: Heinemann.
- Pournara, C. (2013). Teachers' knowledge for teaching compound interest. Pythagoras. 34(2): 1 - 10. doi: 10.4102/pythagoras.v34i2.238.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics 5(2): 177 - 188.

