



KKU SCIENCE JOURNAL

Journal Home Page : <https://ph01.tci-thaijo.org/index.php/KKUSciJ>

Published by the Faculty of Science, Khon Kaen University, Thailand



การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ภายใต้การแจกแจงไวบูล

Performance comparison of TEWMA-Max and GWMA-Max control chart under Weibull distribution

ปิยพล ไพจิตร^{1*} และ ชัยวัช สี่แดง¹

Piyaphon Paichit^{1*} and Chaitawat Seedang¹

¹สาขาวิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ จังหวัดนครปฐม 73000

¹Department of Statistics, Faculty of Science, Silpakorn University, Sanamchandra Palace Campus, Nakhon Pathom, 73000, Thailand

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกระบวนการภายใต้ข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบไวบูล (Weibull distribution) ซึ่งสะท้อนลักษณะของกระบวนการผลิตจริงที่ไม่เป็นไปตามสมมติฐานของการแจกแจงปกติ แผนภูมิควบคุมทั้งสองถูกพัฒนาต่อยอดจากแนวคิดของแผนภูมิควบคุม Max โดยแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max ใช้การถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังซ้อนสามชั้น ในขณะที่ GWMA-Max ใช้การถ่วงน้ำหนักแบบทั่วไปที่มีความยืดหยุ่นมากกว่า เพื่อให้สอดคล้องกับสมมติฐานของแผนภูมิควบคุมที่อิงการแจกแจงปกติ ข้อมูลจากการแจกแจงไวบูล $W(\beta, \eta)$ จึงถูกแปลงให้เข้าสู่การแจกแจงปกติมาตรฐานด้วยวิธีการแปลงผกผัน (Inverse transform method) จากนั้นประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมทั้งสองด้วยการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation) ภายใต้พารามิเตอร์การควบคุม $W(\beta = 1.5, \eta = 1)$ และภายใต้เงื่อนไขนอกการควบคุม (Out-of-control) ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของ β และ η โดยแบ่งเป็นสามกรณี ได้แก่ การเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย (Mean Shift: MS) การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน (Variance Shift: VS) และการเปลี่ยนแปลงทั้งสองพร้อมกัน (Mean and Variance Shift: MVS) ซึ่งผลการวิจัยพบว่าแผนภูมิควบคุม GWMA-Max ให้ค่า ARL_1 ต่ำกว่าแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max ในเกือบทุกสถานการณ์ โดยเฉพาะในกรณี MS และ MVS ซึ่งแสดงถึงความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้รวดเร็วกว่า อย่างไรก็ตาม ประสิทธิภาพของทั้งสองแผนภูมิลดลงเมื่อการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นเฉพาะด้านความแปรปรวน (VS) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติของแผนภูมิควบคุม Max ที่ตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยได้ดีกว่าการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน

ABSTRACT

This study aims to compare the performance of the TEWMA-Max and GWMA-Max control charts in detecting changes in the process mean and variability under data following a Weibull distribution, which

*Corresponding Author, E-mail: paichit_p@su.ac.th

Received date: 24 December 2025 | Revised date: 13 March 2026 | Accepted date: 24 March 2026

doi: 10.14456/kkuscij.2026.27

reflects real-world manufacturing processes that often deviate from the normality assumption. Both control charts are developed based on the concept of the Max control chart, where the TEWMA-Max chart employs a triple-layer exponential weighting scheme, while the GWMA-Max chart adopts a more flexible generalized weighting structure. To satisfy the normality assumption underlying these control charts, data generated from the Weibull distribution $W(\beta, \eta)$ were transformed to approximate a standard normal distribution using the inverse transform method. A Monte Carlo simulation was then conducted under the in-control condition $W(\beta = 1.5, \eta = 1)$ and under various out-of-control conditions resulting from changes in β and η . Three types of process shifts were considered: mean shift (MS), variance shift (VS), and simultaneous mean and variance shift (MVS). The results indicate that the GWMA-Max chart yields lower ARL_1 values than the TEWMA-Max chart in most scenarios, particularly in the MS and MVS cases, indicating a faster detection of process changes. However, the performance of both charts decreases when only variance shifts occur (VS case), which is consistent with the inherent characteristic of Max-Type control charts that are generally more sensitive to mean shifts than to variance shifts.

คำสำคัญ: แผนภูมิควบคุม TEWMA-Max แผนภูมิควบคุม GWMA-Max วิธีการแปลงผกผัน การแจกแจงไวบูล

Keywords: TEWMA-Max Control Chart, GWMA-Max Control Chart, Inverse Transform Method, Weibull Distribution

บทนำ

แผนภูมิควบคุม (Control chart) เป็นเครื่องมือสำหรับติดตามการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการผลิต โดยทั่วไปนิยมใช้แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยสำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย และแผนภูมิควบคุม R หรือ S สำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของการกระจายของกระบวนการ อย่างไรก็ตาม การใช้แผนภูมิทั้งสองแยกกัน อาจเพิ่มโอกาสในการเกิดความผิดพลาดประเภทที่หนึ่ง (Type I error) มากกว่าที่ควรจะเป็น

เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว Chen and Cheng (1998) ได้เสนอแนวคิดของแผนภูมิควบคุม Max ซึ่งปรับตัวสถิติของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนให้มีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระต่อกัน จากนั้นนำค่ามากที่สุดของตัวสถิติที่สะท้อนถึงการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน มาใช้เป็นดัชนีในการตัดสินสถานะของกระบวนการ ทำให้สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของทั้งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนได้พร้อมกัน แต่ข้อจำกัดของแผนภูมิควบคุม Max คือไม่คำนึงถึงข้อมูลในอดีต จึงมีข้อจำกัดในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กของกระบวนการ

เพื่อเพิ่มความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก จึงได้มีการพัฒนาแผนภูมิควบคุมแบบมีหน่วยความจำ (Memory-type control charts) โดยอาศัยแนวคิดการถ่วงน้ำหนักข้อมูลย้อนหลัง ซึ่งแบ่งได้สองแนวทางหลัก ได้แก่ การถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponential weighting) ที่ให้น้ำหนักกับข้อมูลย้อนหลังในอัตราคงที่ผ่านพารามิเตอร์ λ ซึ่งเป็นพื้นฐานของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Weighted Moving Average: EWMA) และเพื่อเพิ่มความสำคัญของข้อมูลในอดีตและลดความแปรปรวนของตัวสถิติ จึงได้มีการพัฒนาแผนภูมิควบคุม DEWMA และ TEWMA อย่างไรก็ตามรูปร่างของการลดน้ำหนักของแผนภูมิควบคุมเหล่านี้ ถูกกำหนดไว้ตายตัวผ่านพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว เพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นในการให้น้ำหนัก จึงมีการประยุกต์ใช้แนวคิดในการถ่วงน้ำหนักแบบทั่วไป (Generally Weighted Moving Average: GWMA) เข้ามาขยายแนวคิดของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยให้น้ำหนักของข้อมูลย้อนหลังอยู่ในรูปแบบทั่วไปมากขึ้น สามารถปรับปรุงและระยะของหน่วยความจำผ่านพารามิเตอร์ α และ q โดยเมื่อ $\alpha = 1$ และ $q = 1 - \lambda$ แผนภูมิควบคุม EWMA เป็นกรณีเฉพาะของแผนภูมิควบคุม GWMA

จากแนวคิดดังกล่าว นักวิจัยจึงได้นำหลักการถ่วงน้ำหนักทั้งสองแบบมาประยุกต์ใช้กับโครงสร้างของแผนภูมิควบคุม Max เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก เกิดเป็นแผนภูมิควบคุมแบบ EWMA-Max DEWMA-Max TEWMA-Max และ GWMA-Max (Xie, 1999; Chen *et al.* 2001; Yin *et al.*, 2010; Chatterjee *et al.* 2023a; Chatterjee *et al.*, 2023b) โดยผลการวิจัยก่อนหน้านี้พบว่า TEWMA-Max สามารถลดความแปรปรวนของตัวสถิติและเพิ่มเสถียรภาพในการตรวจจับได้ดีกว่า DEWMA-Max ขณะที่ GWMA-Max ให้ผลลัพธ์ที่ยืดหยุ่นกว่าและมีความไวสูงกว่าในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน โดยเฉพาะเมื่อเปรียบเทียบกับ EWMA-Max ภายใต้การแจกแจงปกติ (Normal distribution)

อย่างไรก็ตาม แผนภูมิควบคุมเหล่านี้ล้วนพัฒนาภายใต้สมมติฐานว่าข้อมูลมีการแจกแจงปกติ ซึ่งอาจไม่สอดคล้องกับกระบวนการจริงที่มักมีลักษณะที่ไม่ใช่การแจกแจงปกติ เช่น การแจกแจงไวบูล (Weibull distribution) ซึ่งใช้ในการอธิบายลักษณะของความแข็งแรง อายุการใช้งาน หรือความทนทานของวัสดุ งานของ Faraz *et al.* (2015) Wang (2017) และ Noor-ul-Amin *et al.* (2023) จึงได้เสนอการใช้วิธีการแปลงผกผัน (Inverse Transform Method) เพื่อแปลงข้อมูลจากการแจกแจงไวบูลให้เข้าสู่การแจกแจงปกติมาตรฐาน เพื่อลดผลกระทบจากสมมติฐานการแจกแจงดังกล่าว

ดังนั้นงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ภายใต้กระบวนการที่มีการแจกแจงไวบูล โดยใช้วิธีการแปลงผกผันเพื่อปรับข้อมูลให้ใกล้เคียงการแจกแจงปกติ และประเมินประสิทธิภาพของแต่ละแผนภูมิควบคุมด้วยเกณฑ์ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) เพื่อเปรียบเทียบความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ ซึ่งผลการศึกษาคาดว่าจะช่วยขยายขอบเขตการประยุกต์ใช้แผนภูมิควบคุม Max ให้สอดคล้องกับลักษณะกระบวนการจริงมากขึ้น

วิธีการดำเนินการวิจัย

1. ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษากระบวนการผลิตภายใต้สมมติฐานว่าข้อมูล X มีการแจกแจงไวบูล (Weibull distribution) ด้วยพารามิเตอร์รูปร่าง β และพารามิเตอร์บ่งขนาด η เขียนแทนด้วย $X \sim W(\beta, \eta)$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function: PDF) ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

และมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ

$$E(X) = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), V(X) = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2 \right] \quad (2)$$

เนื่องจากแผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการศึกษานี้ ตั้งอยู่บนสมมติฐานของการแจกแจงปกติ จึงต้องแปลงข้อมูลจากการแจกแจงไวบูลให้เข้าสู่การแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยใช้วิธีการแปลงผกผัน (Inverse transform method) ซึ่งอาศัยหลักการจับคู่ความน่าจะเป็น (Probability integral transform) ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงไวบูลและการแจกแจงปกติมาตรฐานดังนี้

$$F_w(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad x \geq 0 \quad (3)$$

และทำการแปลง X เป็น Z ดังนี้

$$Z = \Phi^{-1}(F_w(x)) = \Phi^{-1}\left(1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right]\right) \quad (4)$$

โดยที่ $F_w(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function: CDF) ของการแจกแจงไวบูล และ $\Phi^{-1}(\cdot)$ คือฟังก์ชันผกผันของการแจกแจงปกติมาตรฐาน ซึ่งทำให้ Z มีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติมาตรฐานเมื่อใช้พารามิเตอร์ (β, η) ที่แท้จริงอยู่ภายใต้การควบคุม (Faraz et al., 2015)

2. แผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการศึกษา

ให้ $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ เป็นค่าสังเกตของข้อมูลในกลุ่มย่อยที่ i จากการแจกแจง $N(\mu_0 + \delta\sigma_0^2, \rho^2\sigma_0^2)$ โดยที่ μ_0 และ σ_0^2 เป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนภายใต้การควบคุม (In-control) เมื่อ δ แทนการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยในหน่วยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ $\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ แทนระดับการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนของกระบวนการ เมื่อ $\delta = 0$ และ $\rho = 1$ หมายถึงกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม แต่หาก $\delta \neq 0$ หรือ $\rho \neq 1$ หมายถึงกระบวนการอยู่ในสภาวะนอกการควบคุม (out-of-control)

ให้ $\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^n X_{ij}}{n_i}$ และ $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}$ แทนค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวอย่างในกลุ่มย่อยที่ i ตามลำดับ จะได้ว่าตัวสถิติใช้ตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนกำหนดดังนี้

$$U_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n_i}}, \quad V_i = \Phi^{-1}\left(H\left[\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma_0^2}; n_i - 1\right]\right) \quad (5)$$

โดยที่ $\Phi^{-1}(\cdot)$ คือฟังก์ชันผกผันของการแจกแจงปกติมาตรฐาน และ $H(\cdot; \nu)$ คือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงไคสแควร์ (Chi-square) ที่มี ν องศาอิสระ ซึ่งภายใต้การควบคุม U_i และ V_i จะเป็นตัวแปรสุ่มอิสระที่แจกแจงปกติมาตรฐาน และสามารถนิยามสถิติสำหรับแผนภูมิควบคุม Max ได้ดังนี้

$$M_i = \max(|U_i|, |V_i|) \quad (6)$$

โดยมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนภายใต้การควบคุมดังนี้

$$E(M_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.128379, \quad V(M_i) = 1 - \frac{2}{\pi} = 0.363380 \quad (7)$$

ในงานวิจัยนี้สนใจศึกษาแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ซึ่งใช้ตัวสถิติ M_i เดียวกัน แต่แตกต่างกันในรูปแบบการให้น้ำหนักกับข้อมูลในอดีต ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.1 แผนภูมิควบคุม TEWMA-Max

แผนภูมิควบคุม TEWMA-Max เป็นแผนภูมิที่เพิ่มระดับการถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังซ้อนกันถึงสามชั้น เพื่อให้ข้อมูลในอดีตมีอิทธิพลต่อการตัดสินใจมากขึ้นและช่วยลดความแปรปรวนของตัวสถิติ โดยการให้น้ำหนักในแต่ละชั้นลดลงตามเวลาในอัตราส่วนที่คงที่ซึ่งนิยามดังนี้

$$Y_{i,1} = \lambda M_i + (1 - \lambda)Y_{(i-1),1} \quad (8)$$

$$Y_{i,2} = \lambda Y_{i,1} + (1 - \lambda)Y_{(i-1),2} \quad (9)$$

$$Y_{i,3} = \lambda Y_{i,2} + (1 - \lambda)Y_{(i-1),3} \quad (10)$$

เมื่อ λ แทนพารามิเตอร์ที่ใช้ในการกำหนดอัตราการให้น้ำหนักกับข้อมูลในอดีต; $0 \leq \lambda \leq 1$ โดยในงานวิจัยนี้ศึกษาในกรณีที่ $\lambda = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$ และ 0.50

ค่าเริ่มต้นของแต่ละชั้นกำหนดให้เท่ากับค่าเฉลี่ยภายใต้สภาวะปกติของตัวสถิติ M_i คือ

$$Y_{0,1} = Y_{0,2} = Y_{0,3} = E(M_i) = 1.128379 \quad (11)$$

ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของตัวสถิติ Max ภายใต้การแจกแจงปกติ (Chen and Cheng, 1998) เพื่อให้แผนภูมิควบคุมเริ่มต้นในสภาวะในการควบคุม

จึงได้ว่า ตัวสถิติของแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max ในรอบที่ i จะมีค่าเท่ากับ $Y_{i,3}$ และสามารถกำหนดขีดจำกัดการควบคุม (Control limit) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} UCL_{TM} &= E(Y_{i,3}) + L_1 \sqrt{V(Y_{i,3})} \\ &= 1.128379 + 0.602810 L_1 \sqrt{[c_1 + c_2(i)]} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad c_1 &= \frac{6(1-\lambda)^6 \lambda}{(2-\lambda)^5} + \frac{12(1-\lambda)^4 \lambda^2}{(2-\lambda)^4} + \frac{7(1-\lambda)^2 \lambda^3}{(2-\lambda)^3} + \frac{\lambda^4}{(2-\lambda)^2} \\ c_2(i) &= \frac{\theta^3 \lambda^6}{4} \left[\frac{i(i^2-1)(i-2)\theta^{i-3}}{(1-\theta)} + \frac{4i(i^2-1)\theta^{i-2}}{(1-\theta)^2} + \frac{12i(i-1)\theta^{i-1}}{(1-\theta)^3} + \frac{24(i+1)\theta^i}{(1-\theta)^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{24\theta^{i+1}}{(1-\theta)^5} \right] - 2\theta^2 \lambda^6 \left[\frac{i(i^2-1)\theta^{i-2}}{(1-\theta)} + \frac{3i(i+1)\theta^{i-1}}{(1-\theta)^2} + \frac{6(i+1)\theta^i}{(1-\theta)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(i+1)\theta^i}{(1-\theta)^4} \right] - \frac{7\theta \lambda^6}{2} \left[\frac{i(i+1)\theta^{i-1}}{(1-\theta)} + \frac{2(i+1)\theta^i}{(1-\theta)^2} + \frac{2\theta^{i+1}}{(1-\theta)^3} \right] \\ &\quad - \lambda^6 \left[\frac{\theta^{i+1}}{(1-\theta)^2} + \frac{(i+1)\theta^i}{(1-\theta)} \right] \end{aligned}$$

โดยที่ $\theta = (1-\lambda)^2$ และ L_1 คือค่าคงที่ที่ทำให้กระบวนการผลิตอยู่ภายใต้การควบคุม

2.2 แผนภูมิควบคุม GWMA-Max

แผนภูมิควบคุม GWMA-Max พัฒนาจากแนวคิดของ GWMA เพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นในการให้น้ำหนักข้อมูลย้อนหลัง โดยมองว่าจำนวนข้อมูลย้อนหลังที่นำมาพิจารณาเป็นตัวแปรสุ่ม N ซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็นทั่วไปดังนี้

$$P(N = i) = q^{(i-1)a} - q^{ia} \quad (13)$$

โดยที่ q แทนอัตราการลดน้ำหนักของข้อมูลในอดีต; $0 \leq q < 1$

a แทนรูปร่างของการกระจายน้ำหนัก; $a > 0$

ซึ่งในงานวิจัยนี้ศึกษาในกรณีพารามิเตอร์ $q = 0.5, 0.7, 0.8, 0.95$ และ $a = 0.5, 0.6, 0.7$

จากนั้นเมื่อใช้ตัวสถิติ $M_i = \max(|U_i|, |V_i|)$ จากแนวคิดของแผนภูมิควบคุม Max จะได้ว่าตัวสถิติของแผนภูมิควบคุม GWMA-Max นิยามดังต่อไปนี้

$$G_i = \sum_{j=1}^i [q^{(j-1)a} - q^{ja}] M_{i-j+1} + q^{ia} M_0 \quad (14)$$

โดยที่ $E(M_0) = 1.128379$ ซึ่งตัวสถิติดังกล่าวสะท้อนการถ่วงน้ำหนักของข้อมูลย้อนหลังตามการแจกแจงของ N ในลักษณะเชิงความน่าจะเป็น และได้ว่าขีดจำกัดการควบคุมของแผนภูมิควบคุม GWMA-Max นิยามดังนี้

$$\begin{aligned} UCL_{GM} &= E(G_i) + L_2 \sqrt{V(G_i)} \\ &= 1.128379 + 0.602810 L_2 \sqrt{Q_i} \end{aligned} \quad (15)$$

โดยที่ $Q_i = \sum_{j=1}^i [q^{(j-1)a} - q^{ja}]^2$, L_2 คือค่าคงที่ที่ทำให้กระบวนการผลิตอยู่ภายใต้การควบคุม และ $E(G_i) = E(M_0)$ เนื่องจาก G_i เป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของ M_i ในอดีต ซึ่งผลรวมของน้ำหนักเท่ากับ 1 ทำให้ค่าเฉลี่ยของ G_i คงที่เท่ากับค่าเฉลี่ยของ M_i ภายใต้สภาวะควบคุม

2.3 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ

เกณฑ์มาตรฐานในการประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมคือ ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) ซึ่งหมายถึงจำนวนค่าสังเกตโดยเฉลี่ยจนกระทั่งเกิดสัญญาณเตือนเป็นครั้งแรกว่ากระบวนการอยู่นอกการควบคุม โดยนิยามให้ ARL_0 เป็นค่า ARL ภายใต้กระบวนการที่อยู่ภายใต้การควบคุม และ ARL_1 เป็นค่า ARL เมื่อกระบวนการออกนอกการควบคุม

ในงานวิจัยนี้กำหนด $ARL_0 = 500$ เพื่อใช้เป็นเกณฑ์มาตรฐานในการปรับค่าพารามิเตอร์ L_1 และ L_2 ของแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ตามลำดับ จากนั้นคำนวณ ARL_1 เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมทั้งสองภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ของพารามิเตอร์ β และ η

การประมาณค่า ARL ใช้วิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte carlo simulation) โดยทำการจำลองข้อมูลซ้ำจำนวน $N = 10,000$ ครั้งในแต่ละสถานการณ์และคำนวณ ARL ดังนี้

$$ARL = \sum_{i=1}^N \frac{RL_i}{N} \quad (16)$$

เมื่อ RL_i แทน จำนวนกลุ่มตัวอย่าง (Sample group) ที่ต้องสังเกตจนกระทั่งแผนภูมิควบคุมเกิดสัญญาณเตือนครั้งแรกในการจำลองรอบที่ i

ซึ่งในการประเมินประสิทธิภาพ แผนภูมิควบคุมที่มีค่า ARL_1 ต่ำกว่า แสดงว่าสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้ไวกว่า

2.4 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

การดำเนินงานวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดพารามิเตอร์ของกระบวนการภายใต้การควบคุม $W(\beta = 1.5, \eta = 1)$ และพารามิเตอร์ของแผนภูมิควบคุมแต่ละแบบ ได้แก่ $\lambda = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$ และ 0.50 สำหรับแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ $q = 0.5, 0.7, 0.8, 0.95$ และ $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7$ สำหรับแผนภูมิควบคุม GWMA-Max

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าคงที่ L_1 และ L_2 ของแต่ละแผนภูมิควบคุม โดยการจำลองแบบมอนติคาร์โลภายใต้สภาวะในการควบคุม เพื่อให้ได้ $ARL_0 = 500$

ขั้นตอนที่ 3 จำลองข้อมูลจากการแจกแจงไวบูล $W(\beta, \eta)$ ภายใต้สภาวะนอกการควบคุม โดยปรับค่าพารามิเตอร์ $\beta = 1, 1.25, 1.5, 1.75$ และ $\eta = 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5$ ตามลำดับ

ขั้นตอนที่ 4 แปลงข้อมูลที่จำลองด้วยวิธีการแปลงผกผัน (Inverse Transform Method) จาก

$$Z = \Phi^{-1} \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right] \right) \quad (17)$$

เพื่อให้ข้อมูลอยู่ในรูปที่สามารถนำไปประเมินด้วยแผนภูมิควบคุมที่อิงสมมติฐานการแจกแจงแบบปกติได้

ขั้นตอนที่ 5 คำนวณค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม ได้แก่ U_i, V_i, M_i และตัวสถิติของแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max พร้อมทั้งตรวจสอบกับขีดจำกัดการควบคุม (UCL) ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 ของแต่ละแผนภูมิควบคุมและบันทึกจำนวนกลุ่มตัวอย่างจนกระทั่งแผนภูมิควบคุมให้สัญญาณเตือนเป็นครั้งแรกเป็นค่า RL

ขั้นตอนที่ 6 ทำซ้ำในขั้นตอนที่ 3 ถึง 5 เป็นจำนวน $N = 10,000$ ครั้ง แล้วคำนวณค่า ARL_1 จากค่าเฉลี่ยของ RL ทั้งหมด

ขั้นตอนที่ 7 เปรียบเทียบค่า ARL_1 ของแต่ละแผนภูมิควบคุม โดยแผนภูมิควบคุมที่มีค่า ARL_1 ต่ำกว่า ถือว่ามีแนวโน้มในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการมากกว่า

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ภายใต้การแจกแจง $W(\beta = 1.5, \eta = 1)$ ซึ่งเป็นกรณีที่อยู่ภายใต้สภาวะในการควบคุม โดยการศึกษาจำแนกเป็น 3 กรณี ได้แก่

1) กรณีที่การเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย (Mean shift: MS) ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ η ภายใต้ β คงที่

2) กรณีการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน (Variance shift: VS) ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ β ภายใต้ η คงที่

3) กรณีการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเกิดขึ้นพร้อมกัน (Mean and variance shift: MVS)

ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมทั้งสองในแต่ละกรณีแสดงในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ภายใต้พารามิเตอร์ที่ดีที่สุดสามอันดับแรก

Scenario	β	η	(μ, σ)	TEWMA-Max			GWMA-Max		
				$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.5$	$a = 0.6$		
							$q = 0.5$	$q = 0.8$	$q = 0.95$
IC	1.5	1	(0,1)	กระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (in control)					
MS	1.5	0.5	(-0.81,0.76)	21.63	8.72	6.34	3.72	3.92	4.50
		0.75	(-0.36,0.88)	94.496	115.46	186.493	82.725	81.54	84.40
		1.25	(0.32,1.11)	44.422	35.189	46.342	22.119	22.976	24.1071
		1.5	(0.61,1.21)	23.807	10.656	8.134	4.681	4.728	5.3159
VS	1	1	(-0.05,1.47)	23.084	10.101	9.004	4.487	4.053	4.7105
	1.25		(-0.03,1.18)	49.3959	42.006	42.504	28.008	27.859	28.5861
	1.75		(0.03,0.87)	962.516	882.42	862.179	941.175	937.918	939.018
	0.5		(-0.87,1.11)	19.283	7.382	4.638	2.422	2.468	2.822
MVS	1	0.75	(-0.42,1.3)	25.281	11.93	10.543	5.964	5.762	6.4895
		1.25	(0.28,1.65)	18.268	7.057	3.933	2.113	2.053	2.2656
		1.5	(0.58,1.86)	15.038	5.287	2.307	0.994	0.99	1.094
		0.5	(-0.84,0.9)	20.742	8.373	5.823	3.254	3.19	3.6725
	1.25	0.75	(-0.39,1.05)	43.9546	36.288	48.035	22.326	23.669	24.1992
		1.25	(0.29,1.31)	27.4324	14.29	13.114	7.311	7.103	8.0556
		1.5	(0.58,1.44)	19.7437	7.81	4.867	2.535	2.679	3.0043
		0.5	(-0.78,0.66)	21.7576	8.906	6.816	4.409	4.5	5.0844
1.75	0.75	(-0.34,0.77)	110.0224	162.236	256.869	112.081	111.866	116.3718	
	1.25	(0.35,0.96)	74.2515	83.42	126.408	57.105	54.707	55.826	
	1.5	(0.64,1.05)	25.6907	12.232	11.562	6.469	6.263	6.455	

ผลการวิจัยในตารางที่ 1 แสดงให้เห็นว่า ในกรณีที่ค่าเฉลี่ยของกระบวนการเปลี่ยนแปลงและกรณีที่ค่าความแปรปรวนของกระบวนการเปลี่ยน พบว่าแผนภูมิควบคุม GWMA-Max ให้ค่า ARL_1 ต่ำกว่า TEWMA-Max ในทุกกรณี แสดงถึงความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกระบวนการได้ดีกว่า แต่ในกรณีขนาดความแปรปรวนของกระบวนการเปลี่ยนมาก ซึ่งในที่นี้คือ β เท่ากับ 1.75 ค่า ARL_1 ของทั้งสองแผนภูมิเพิ่มสูงขึ้นมาก สะท้อนว่าทั้งแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ไม่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนของกระบวนการในกรณีนี้ได้ และเมื่อในกรณีที่ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกระบวนการเปลี่ยนแปลงพร้อมกัน แผนภูมิควบคุม GWMA-Max ยังคงให้ค่า ARL_1 ต่ำกว่าแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max เกือบทุกกรณีที่ทำการศึกษา

ผลการวิจัยจากตารางที่ 1 ในกรณีที่ β เท่ากับ 1.75 สามารถอธิบายในเชิงทฤษฎีได้ว่า เมื่อพารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้นจาก 1.5 เป็น 1.75 แล้วความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูลจะลดลง ส่งผลให้หลังจากผ่านวิธีการแปลงผกผัน ค่า S_i^2 มีแนวโน้มต่ำกว่า σ_0^2 ที่อิงจากสถานะในการควบคุม ตัวสถิติ V_i จึงเบี่ยงเบนในทิศทางลบ ซึ่งแผนภูมิควบคุม Max ที่ใช้เฉพาะขีดจำกัดการควบคุมบนจึงไม่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงในลักษณะนี้ได้

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่า แผนภูมิควบคุม GWMA-Max มีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการสูงกว่าแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max โดยเฉพาะในกรณีที่ค่าเฉลี่ยของกระบวนการเปลี่ยนแปลง (Mean shift: MS) และกรณีที่ทั้งค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนเปลี่ยนแปลงพร้อมกัน (Mean and variance shift: MVS) ซึ่งสะท้อนผ่านค่าความยาววิ่งเฉลี่ยภายใต้สถานะนอกการควบคุม (ARL_1) ที่ต่ำกว่าของแผนภูมิควบคุม GWMA-Max เมื่อเทียบกับ TEWMA-Max

ผลดังกล่าวสามารถอธิบายได้จาก ลักษณะของกลไกการให้น้ำหนักข้อมูลย้อนหลัง (Weighting mechanism) ของแผนภูมิควบคุมทั้งสองแบบ โดยแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max ใช้การถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponential weighting) ที่ลดลงด้วยอัตราค่าที่ 1 ในแต่ละขั้นของการถ่วงน้ำหนัก ส่งผลให้ค่าสำคัญของข้อมูลใหม่และข้อมูลเก่ามีความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบตายตัว ซึ่งช่วยลดความแปรปรวนของตัวสถิติแต่ตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงแบบฉับพลันได้จำกัด

ในทางกลับกัน แผนภูมิควบคุม GWMA-Max ใช้หลักการ การถ่วงน้ำหนักแบบทั่วไป (Generally weighted) ซึ่งให้น้ำหนักข้อมูลย้อนหลังตามฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม N ที่มีพารามิเตอร์ควบคุมรูปทรง α และอัตราการลดน้ำหนักของข้อมูลในอดีต q การปรับค่า q และ α อย่างเหมาะสมจึงช่วยให้แผนภูมิควบคุมสามารถรักษาสมดุลระหว่างความเสถียรของสถิติในระยะยาวและความไวต่อการเปลี่ยนแปลงเฉียบพลันได้ดีกว่า ส่งผลให้ GWMA-Max ตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้รวดเร็วกว่า TEWMA-Max ในสถานการณ์ส่วนใหญ่

สำหรับกรณีที่กระบวนการเปลี่ยนแปลงเฉพาะค่าความแปรปรวน (Variance shift: VS) พบว่า ทั้งสองแผนภูมิควบคุมมีประสิทธิภาพลดลง โดยค่าของ ARL_1 มีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดทางทฤษฎีที่ว่า การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนส่งผลกระทบต่อความกระจายของตัวสถิติมากกว่าค่าเฉลี่ย ทำให้สัญญาณเตือนเกิดช้ากว่ากรณีการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยกระบวนการ ทั้งนี้แผนภูมิควบคุม Max-type จะตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยได้ดีกว่าความแปรปรวนโดยธรรมชาติ เนื่องจากองค์ประกอบ U_i ของสถิติ $M_i = \max(|U_i|, |V_i|)$ มักมีอิทธิพลมากกว่า V_i ในการตัดสินใจสถานะกระบวนการ (Chen and Cheng, 1998)

ผลการศึกษาที่สอดคล้องกับงานของ Chatterjee et al. (2023b) ที่พบว่าแผนภูมิควบคุม GWMA-Max มีความยืดหยุ่นสูงและให้ผลดีกว่าแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max ภายใต้การแจกแจงปรกติ เมื่อกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลงอย่างค่อยเป็นค่อยไป (gradual shifts) หรือในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนพร้อมกัน

กล่าวโดยสรุป ผลการวิจัยนี้ยืนยันว่าแผนภูมิควบคุม GWMA-Max มีศักยภาพสูงกว่าในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการที่มีการแจกแจงแบบไวบูล โดยเฉพาะในสถานะที่กระบวนการมีการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยหรือมีการเปลี่ยนแปลงทั้งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกระบวนการ ในขณะที่แผนภูมิควบคุม TEWMA-Max ยังคงมีความได้เปรียบในด้านความเสถียรของตัวสถิติและเหมาะสมกับกรณีที่กระบวนการมีสัญญาณรบกวนสูงหรือการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นเฉพาะด้านใดด้านหนึ่งอย่างจำกัด

การประยุกต์กับข้อมูลจริง

งานวิจัยนี้ได้นำแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max ไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงที่เกี่ยวข้องกับความแข็งแรงต่อการแตกหักของเส้นใยคาร์บอน ซึ่งถูกวัดในหน่วยกิกะปาสกาล (GPa) ประกอบด้วยกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด 20 กลุ่ม แต่ละกลุ่มมีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 จากงานวิจัยของ Padgett and Spurrier (1990) รายละเอียดแสดงดังตารางที่ 2

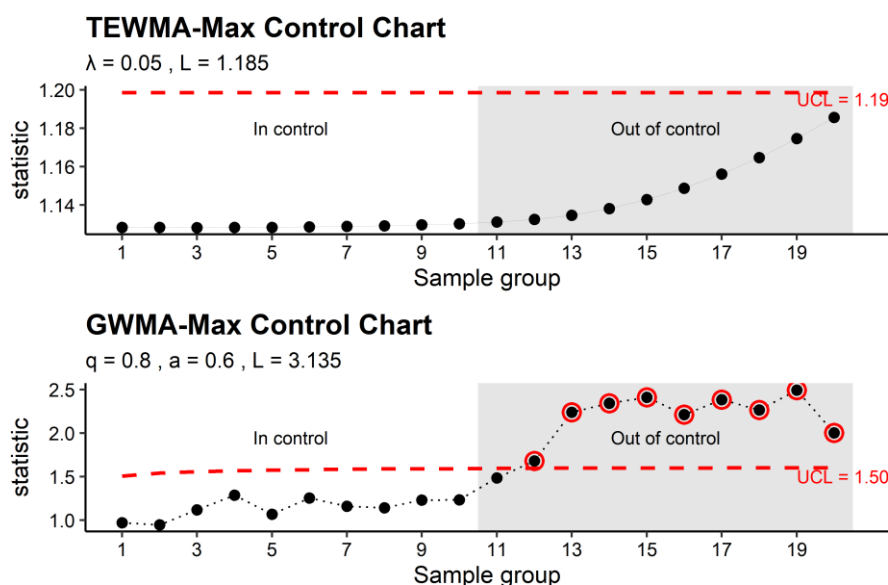
ตารางที่ 2 ค่าความแข็งแรงต่อการแตกหักของเส้นใยคาร์บอนก่อนและหลังทำการแปลงข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง	ค่าความแข็งแรงก่อนทำการแปลงข้อมูล					ค่าความแข็งแรงหลังทำการแปลงข้อมูล					Z_i	S_i
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	Z_{i1}	Z_{i2}	Z_{i3}	Z_{i4}	Z_{i5}		
1	3.7	2.74	2.73	2.5	3.6	1.11	-0.31	-0.32	-0.63	0.95	0.16	0.81
2	3.11	3.27	2.87	1.47	3.11	0.21	0.44	-0.13	-1.98	0.21	-0.25	0.00
3	4.42	2.41	3.19	3.22	1.69	2.37	-0.75	-0.32	0.37	0.12	-0.12	1.52
4	3.28	3.09	1.87	3.15	4.9	0.46	0.18	-1.45	0.26	0.55	0.55	1.73
5	3.75	2.43	2.95	2.97	3.39	1.19	-0.73	-0.02	0.01	0.21	0.21	0.72
6	2.96	2.53	2.67	2.93	3.22	-0.01	-0.59	-0.41	-0.05	-0.14	-0.14	0.37
7	3.39	2.81	4.2	3.33	2.55	0.62	-0.22	1.96	0.53	0.47	0.47	0.97
8	3.31	3.31	2.85	2.56	3.56	0.50	0.50	-0.16	-0.55	0.23	0.23	0.58
9	3.15	2.35	2.55	2.59	2.38	0.26	-0.83	-0.57	-0.51	-0.49	-0.49	0.44
10	2.81	2.77	2.17	2.83	1.92	-0.22	-0.27	-1.06	-0.19	-0.63	-0.63	0.56
11	1.41	3.68	2.97	1.36	0.98	-2.07	1.07	0.01	-2.14	-1.17	-1.17	1.62
12	2.76	4.91	3.68	1.84	1.59	-0.28	3.35	1.07	-1.49	0.16	0.16	2.11
13	3.19	1.57	0.81	5.56	1.73	0.32	-1.85	-3.00	4.83	-0.27	-0.27	3.09
14	1.59	2	1.22	1.12	1.71	-1.82	-1.28	-2.34	-2.49	-1.92	-1.92	0.49
15	2.17	1.17	5.08	2.48	1.18	-1.06	-2.41	3.71	-0.66	-0.56	-0.56	2.52
16	3.51	2.17	1.69	1.25	4.38	0.80	-1.06	-1.69	-2.29	-0.39	-0.39	1.90
17	1.84	0.39	3.68	2.48	0.85	-1.49	-3.94	1.07	-0.66	-1.59	-1.59	1.95
18	1.61	2.79	4.7	2.03	1.8	-1.80	-0.24	2.91	-1.25	-0.38	-0.38	1.94
19	1.57	1.08	2.03	1.61	2.12	-1.85	-2.55	-1.25	-1.80	-1.71	-1.71	0.57
20	1.89	2.88	2.82	2.05	3.65	-1.43	-0.12	-0.20	-1.22	-0.39	-0.39	0.98

ทั้งนี้กลุ่มตัวอย่าง 10 กลุ่มแรกถูกสมมติให้เป็นข้อมูลภายใต้สภาวะในการควบคุม (In-control) และถูกนำมาใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลด้วยวิธีการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood estimation) ซึ่งให้ค่าประมาณ $\hat{\beta} = 4.8$ และ $\hat{\eta} = 3.2$

อย่างไรก็ตาม ในการนำแผนภูมิควบคุมไปใช้งานจริงในภาคอุตสาหกรรม พารามิเตอร์ β และ η มักไม่ทราบค่าที่แท้จริงและจำเป็นต้องประมาณจากข้อมูลที่อยู่ภายใต้สภาวะในการควบคุม ซึ่งความไม่แน่นอนของค่า β และ η อาจส่งผลให้ขีดจำกัดการควบคุมที่คำนวณได้มีความกว้างมากกว่ากรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์จริง โดยเฉพาะเมื่อจำนวนกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณมีขนาดเล็ก ส่งผลให้ความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการลดลง ดังนั้นผู้ปฏิบัติงานควรใช้ข้อมูลในสภาวะควบคุม จำนวนเพียงพอในการประมาณพารามิเตอร์เพื่อให้ขีดจำกัดควบคุมมีความแม่นยำมากขึ้น

จากผลการวิเคราะห์ที่แสดงในรูปที่ 1 พบว่าเมื่อกระบวนการเข้าสู่สภาวะนอกการควบคุม แผนภูมิควบคุม GWMA-Max สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกระบวนการได้รวดเร็วกว่าแผนภูมิควบคุม TEWMA-Max อย่างชัดเจน ในขณะที่แผนภูมิควบคุม TEWMA-Max ไม่ปรากฏสัญญาณเตือนภายใต้ข้อมูลชุดเดียวกัน สะท้อนให้เห็นถึงความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของแผนภูมิควบคุม GWMA-Max ที่เหนือกว่าในกรณีศึกษา



รูปที่ 1 แผนภูมิควบคุม TEWMA-Max และ GWMA-Max สำหรับการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกระบวนการภายใต้ข้อมูลค่าความแข็งแรงต่อการแตกหัก

เอกสารอ้างอิง

- Chen, G. and Cheng, S.W. (1998). Max chart: Combining X-Bar chart and S chart. *Statistica Sinica* 8: 263 - 271.
- Chen, G., Cheng, S.W. and Xie, H. (2001). Monitoring Process Mean and Variability with One EWMA Chart. *Journal of Quality Technology* 33(2): 223 - 233. doi: 10.1080/00224065.2001.11980069.
- Chatterjee, K., Koukouvinos, C. and Lappa, A. (2023a). A joint monitoring of the process mean and variance with a TEWMA-Max control chart. *Communication in Statistics - Theory and Methods* 52(22): 8069 - 8095. doi: 10.1080/03610926.2022.2056748.
- Chatterjee, K., Koukouvinos, C., Lappa, A. and Roupia, P. (2023b). A joint monitoring of the process mean and variance with a generally weighted moving average maximum control chart. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 53(11): 5122 - 5142. doi: 10.1080/03610918.2023.2170415.

- Faraz, A., Saniga, E.M., and Heuchenne, C. (2015). Shewhart Control Charts for Monitoring Reliability with Weibull Lifetimes. *Quality and Reliability Engineering International* 31(8): 1565 - 1574. doi: 10.1002/qre.1692.
- Noor-ul-Amin, M., Aslam, I. and Feroze, N. (2023). Joint monitoring of mean and variance using Max-EWMA for Weibull process. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 52(7): 3257 - 3272. doi: 10.1080/03610918.2021.1931322.
- Padgett, W.J. and Spurrier, J.D. (1990). Shewhart-type charts for percentiles of strength distributions. *Journal of Quality Technology* 22(4): 283 - 288. doi: 10.1080/00224065.1990.11979260.
- Wang, F.K. (2017). MaxEWMA control chart for a Weibull process with individual measurements. *Quality and Reliability Engineering International* 33(2): 369 - 379. doi: 10.1002/qre.2013.
- Xie, H. (1999). Contributions to qualimetry. Ph.D. dissertation, University of Manitoba, Winnipeg, Canada: 162 pp.
- Yin, T.S., Khoo, M.B. and Kit, L.C. (2010). Comparing the performances of the Optimal SS-DEWMA and Max-DEWMA Control Charts. *Journal of Statistical Modelling and Analytics* 1(2): 1 - 9.

