ว.วิทย. มข. 40(4) 1128-1137 (2555) KKU Sci. J. 40(4) 1128-1137 (2012)

หลักการการหดตัวของบานาควางนัยทั่วไปและการประมาณค่าจุดตรึง

Generalized Banach Contraction Principles and Fixed Point Approximation

ประสิทธิ์ ช่อลำเจียก[1]

บทคัดย่อ

บทความนี้กล่าวถึงการศึกษาของหลักการการหดตัวของบานาควางนัยทั่วไปและการประมาณค่าจุดตรึงสำหรับการส่งไม่เชิงเส้นในปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

ABSTRACT

This article outlines a study of generalized Banach contraction principles and fixed point approximation for nonlinear mappings in complete metric spaces.

คำสำคัญ: หลักการการหดตัวของบานาค จุดตรึง การส่งไม่เชิงเส้น ปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

Keywords: Banach contraction principle, Fixed point, Nonlinear mapping, Complete metric space

บทนำ

ทฤษฎีจุดตรึง (fixed Point Theory) นับเป็นแขนงที่สำคัญแขนงหนึ่งในสาขาของการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (functional Analysis) เนื่องจากทฤษฎีและองค์ความรู้ที่เกิดจากการวิจัยพื้นฐานของทฤษฎีจุดตรึงนั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาที่มีอยู่ในทางวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ได้เป็นอย่างดี จึงทำให้ทฤษฎีจุดตรึงเป็นแขนงที่ได้รับความสนใจที่จะศึกษาและค้นคว้าวิจัยเพื่อขยายและปรับปรุงผลลัพธ์เดิมตลอดจนการหาองค์ความรู้ใหม่ ๆ โดยนักคณิตศาสตร์ในปัจจุบันเป็นจำนวนไม่น้อย

สำหรับงานวิจัยในหัวข้อทฤษฎีจุดตรึงนั้น สามารถแบ่งได้เป็นสองแนวทาง กล่าวคือ

(1) การศึกษาการมีอยู่จริง (existence) และการมีเพียงหนึ่งเดียว (uniqueness) ของการส่งไม่เชิงเส้น (nonlinear mapping) แบบต่าง ๆ

[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา 56000

E-mail: prasitch2008@yahoo.com

(2) การสร้างระเบียบวิธีและทฤษฎีบทต่าง ๆ เพื่อนำไปคำนวณหาและประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่เชิงเส้น ตลอดจนการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ที่ได้ในการหาผลเฉลยของสมการต่าง ๆ

การศึกษาและวิจัยในทฤษฎีจุดตรึงนั้นต้องอาศัยความรู้ในหลายแขนง อาทิเช่น การวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น (nonlinear analysis) การวิเคราะห์เชิงนูน (convex analysis) การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) และการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (computer programming) เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 1922 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อว่า Stefan Banach ได้พิสูจน์หลักการการหดตัวของบานาค (Banach contraction principle) โดยอาศัยเทคนิคของระเบียบวิธีทำซ้ำ (iterative method) ในทฤษฎีบทจะกล่าวถึงการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของการส่งแบบหดตัว (contractive mapping) ในปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ (complete metric space) หลักการดังกล่าวถือได้ว่าเป็นจุดเริ่มต้นของการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชันสมัยใหม่ (modern functional analysis) และนับว่ามีความสำคัญอย่างมากในการศึกษาทฤษฎีจุดตรึงในยุคแรก ๆ หลังจากนั้นเป็นต้นมาจึงมีการศึกษาและวิจัยเพื่อขยายหลักการดังกล่าวไปยังการส่งแบบหดตัววางนัยทั่วไป (generalized contractive mapping) ต่าง ๆ มากมาย ทั้งในส่วนที่เป็นการส่งค่าเดียวและการส่งหลายค่าในปริภูมิต่าง ๆ ที่สำคัญนอกจากนี้หลักการดังกล่าวยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าประมาณผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพ (equilibrium problem) ปัญหาอสมการแปรผัน (variational inequality problem) ปัญหาค่าต่ำสุด-สูงสุด (min-max problem) และปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น (linear programming problem) ซึ่งล้วนแต่มีความสัมพันธ์กับปัญหาจุดตรึงทั้งสิ้น นับได้ว่าหลักการดังกล่าวมีส่วนสำคัญต่อการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์ประยุกต์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และอุตสาหกรรมการผลิตและขนส่ง

เนื้อความ

จากความสำคัญที่กล่าวมาข้างต้น ในบทความนี้ผู้เขียนจึงได้รวบรวมและเรียบเรียงหลักการการหดตัวของบานาควางนัยทั่วไป (generalized Banach contraction principle) แบบต่าง ๆ ที่ถูกศึกษาในปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ รวมถึงระเบียบวิธีทำซ้ำต่าง ๆ ที่ถูกใช้ในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่เชิงเส้น ทั้งในปริภูมิฮิลแบร์ต (Hilbert space) และปริภูมิบานาค (Banach space) ก่อนที่จะกล่าวถึงหลักการการหดตัวของบานาควางนัยทั่วไปแบบต่าง ๆ นั้น ผู้เขียนขอทบทวนบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน ดังต่อไปนี้

บทนิยามที่ 1 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T:(X,d)\to(X,d)$ เป็นการส่ง แล้ว $x\in X$ ถูกเรียกว่า *จุดตรึง* ของ T ถ้า $x=Tx$ และเขียนแทนเซตของจุดตรึงทั้งหมดของการส่ง T ด้วย $F(T)$

บทนิยามที่ 2 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T:(X,d)\to(X,d)$ เป็นการส่ง แล้ว

(1) T ถูกเรียกว่า *การส่งแบบหดตัว* (contractive mapping) ถ้ามีจำนวนจริง $k\in[0,1)$ ซึ่ง $d(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

(2) T ถูกเรียกว่า *การส่งแบบไม่ขยาย* (nonexpansive mapping) ถ้า $d(Tx,Ty)\le d(x,y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

ทฤษฎีบทที่ 1 (Banach contraction principle) (Banach, 1922) กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นการส่งแบบหดตัว แล้ว f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว
สำหรับวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวสามารถศึกษาได้จากหนังสือของ Takahashi (2000)

ต่อไปเป็นตัวอย่างบทประยุกต์ของหลักการการหดตัวของบานาค
กำหนดให้ $X = \{(x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$ และกำหนดเมตริก d บน X ดังนี้

$$d(x, z) = \max_i |x_i - z_i| \qquad (*)$$

จะได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ ต่อไปนิยามการส่ง $T: X \to X$ ดังนี้

$$Tx = Cx + b \qquad (**)$$

เมื่อ $C = (c_{jk})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $b = (b_1, \dots, b_n)$ เป็นสมาชิกของ X

จากสมการ (**) ให้ $y = Tx = (y_1, \dots, y_n)$ จะได้ว่า $y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{jk} x_k + b_k$ เมื่อ $j = 1, \dots, n$
ให้ $w = (w_1, \dots, w_n) = Tz$ ดังนั้นจาก (*) และ (**) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(Tx, Tz) = \max_j |y_j - w_j| &= \max_j \left|\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(x_k - z_k)\right| \\ &\le d(x, z) \max_j \left|\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\right| \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(Tx, Tz) \le k d(x, z)$ เมื่อ $k = \max_j \left|\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\right|$ โดยการประยุกต์ทฤษฎีบทจุดตรึงของบานาคทำให้เราทราบว่าระบบสมการเชิงเส้น $x = Cx + b$ ที่มี n ตัวแปร และมี n สมการ จะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียวก็ต่อเมื่อผลรวมในแต่ละแถวของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าน้อยกว่า 1

สิ่งที่ถือว่าเป็นความสำคัญของทฤษฎีบทข้างต้นในเชิงประยุกต์ คือ การประยุกต์ใช้ในการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำที่นิยามดีแล้ว (well-defined) แล้วนำไปประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่เชิงเส้นต่าง ๆ เช่น การส่งแบบไม่ขยาย เป็นต้น โดยทั่วไปเรามักจะทำการศึกษาและวิจัยหลักการดังกล่าวในปริภูมิฮิลแบร์ตก่อน แล้วจึงขยายไปในปริภูมิบานาค

กำหนดให้ $(E, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมิบานาค และ C เป็นเซตย่อยนูนและปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง (nonempty, closed and convex) ของ E นอกจากนี้สำหรับแต่ละ $t \in (0,1)$ นิยามการส่ง $S_t: C \to C$ โดย

$$S_t(x) = tu + (1-t)Tx, \quad x \in C$$

เมื่อ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และ $u \in C$ เป็นเวกเตอร์คงที่

เห็นได้ชัดว่า S_t เป็นการส่งแบบหดตัวบนเซต C ดังนั้นจากหลักการการหดตัวของบานาค จึงสรุปได้ว่าการส่ง S_t จะมีจุดตรึง x_t เพียงจุดเดียว ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$x_t = tu + (1-t)Tx_t \qquad (1)$$

และเรียก x_t ในสมการ (1) ว่า *วิถีของการหดตัว* (path of contraction)

โดยอาศัยหลักการดังกล่าว ต่อมาได้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากทำการศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้ม (strong convergence theorem) สำหรับการส่งแบบไม่ขยายทั้งในปริภูมิฮิลแบร์ตและปริภูมิบานาค ตามลำดับ

ในปี ค.ศ. 1967 Browder ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มในปริภูมิฮิลแบร์ตสำหรับการส่งแบบไม่ขยาย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 (Browder, 1967) กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนและปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลแบร์ต H และ T เป็นการส่งแบบไม่ขยายบน C แล้วจะได้ว่าลำดับ $\{x_t\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $q \in F(T)$ เมื่อ $t \to 0$

ในปี ค.ศ. 1980 Reich ได้พิสูจน์ว่าทฤษฎีบทที่ 2 ยังคงเป็นจริงในปริภูมิบานาคปรับเรียบแบบเอกรูป (uniformly smooth Banach space) สมการ (1) ยังสามารถเขียนในรูปแบบของวิธีทำซ้ำแฝง (implicit iteration) ได้ดังนี้ $x_1 \in C$,

$$x_n = \alpha_n u + (1-\alpha_n)Tx_n, \;\; n \geq 1 \tag{2}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วง $(0,1)$ และ $u \in C$ เป็นเวกเตอร์คงที่

Halpern (1967) ได้นำเสนอและศึกษาวิธีทำซ้ำชัดแจ้ง (explicit iteration) สำหรับการส่งแบบไม่ขยาย $T: C \to C$ ในปริภูมิฮิลแบร์ต ดังนี้ $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)Tx_n, \;\; n \geq 1 \tag{3}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วง $(0,1)$ และ $u \in C$ เป็นเวกเตอร์คงที่ นอกจากนี้ยังได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ที่ก่อเกิดโดยวิธีทำซ้ำ (3) นั้น ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของการส่ง T ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม

ต่อมาวิธีทำซ้ำข้างต้นได้ถูกขยายและทำการศึกษาไปยังปริภูมิบานาคแบบต่าง ๆ ซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากบทความของ Lions (1977), Wittmann (1992), Reich (1994), Shioji and Takahashi (1997)

ในปี ค.ศ. 2000 Moudafi ได้นำเสนอและศึกษาระเบียบวิธีการประมาณค่าแบบหนืด (viscosity approximation method) สำหรับการส่งแบบไม่ขยาย $T: C \to C$ ในปริภูมิฮิลแบร์ต ดังนี้ $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)Tx_n, \;\; n \geq 1 \tag{4}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วง $(0,1)$ และ $f: C \to C$ เป็นการส่งแบบหดตัว

จากการพิสูจน์จะได้ว่าลำดับที่ก่อเกิดโดยวิธีทำซ้ำ (4) จะลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของ T ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม

ในปี ค.ศ. 2004 Xu ได้ทำการศึกษาวิธีทำซ้ำของการประมาณค่าแบบหนืดในปริภูมิบานาคปรับเรียบแบบเอกรูป

จากสมการ (2) จะเห็นว่าในการคำนวณหาค่าของลำดับ $\{x_n\}$ แต่ละขั้นตอนนั้นต้องอาศัยการแก้สมการทุกครั้ง ซึ่งทำได้ยากในทางปฏิบัติ ขณะที่การคำนวณหาค่าของลำดับ $\{x_n\}$ ในสมการ (3) และ (4) นั้นทำได้ง่ายกว่า กล่าวคือการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งโดยอาศัยวิธีทำซ้ำชัดแจ้งนั้นง่ายกว่าวิธีทำซ้ำแฝง ด้วยเหตุผลนี้จึงมี

การสร้าง ขยาย และปรับปรุงวิธีทำซ้ำชัดแจ้งต่าง ๆ ขึ้นมาอย่างมากมาย อย่างไรก็ตามในการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของลำดับที่ก่อเกิดโดยวิธีทำซ้ำชัดแจ้งนั้นยังคงต้องอาศัยผลลัพธ์ของการลู่เข้าแบบเข้มของลำดับที่ก่อเกิดโดยวิธีทำซ้ำแฝงหรือวิถีของการหดตัวด้วย

ต่อไปผู้เขียนจะกล่าวถึงหลักการการหดตัวของบานาควางนัยทั่วไปที่สำคัญในปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

บทนิยามที่ 3 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $f:(X,d)\to(X,d)$ เป็นการส่ง แล้ว f ถูกเรียกว่า *การส่งแบบหดตัวอย่างอ่อน* (weakly contractive mapping) ถ้า

$$d(fx,fy)\le d(x,y)-\varphi(d(x,y))$$

สำหรับทุก $x,y\in X$ เมื่อ $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้และต่อเนื่อง โดยที่ $\varphi(0)=0$

ข้อสังเกต เห็นได้ชัดว่า ถ้าแต่ละ $t\in[0,\infty)$ กำหนดให้ $\varphi(t)=(1-k)t$ เมื่อ $k\in(0,1)$ แล้วจะได้ว่าการส่งแบบหดตัวในบทนิยามที่ 2 ข้อ (1) คือการส่งแบบหดตัวอย่างอ่อนนั่นเอง

Rhodes (2001) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของการส่งแบบหดตัวอย่างอ่อนดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3 (Rhodes, 2001) กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $f:(X,d)\to(X,d)$ เป็นการส่งแบบหดตัวอย่างอ่อน แล้ว f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

โดยทฤษฎีบทที่ 3 Jung (2008) ได้นำเสนอวิธีทำซ้ำสำหรับการส่งแบบไม่ขยาย $T:C\to C$ ในปริภูมิบานาค ดังนี้

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Tx_n,\\ x_{n+1} &= (1-\beta_n)y_n+\beta_n Ty_n,\ \ n\ge 1 \end{aligned} \tag{5}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วง $(0,1)$ และ $f:C\to C$ เป็นการส่งแบบหดตัวอย่างอ่อน จากการพิสูจน์จะได้ว่าลำดับที่ก่อเกิดโดยวิธีทำซ้ำ (5) จะลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของ T ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม นอกจากนี้ผลลัพธ์ที่ได้ยังขยายและปรับปรุงทฤษฎีบทของ Halpern (1967), Lions (1977), Wittmann (1992), Shioji and Takahashi (1997) อีกด้วย

ต่อไปผู้เขียนจะกล่าวถึงการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์ (Meir and Keeler, 1969) ซึ่งเป็นการขยายแนวคิดของ Boyd and Wong (Boyd and Wong, 1969)

บทนิยามที่ 4 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $f:(X,d)\to(X,d)$ เป็นการส่ง แล้ว f ถูกเรียกว่า *การส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์* (Meir-Keeler contractive mapping) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ซึ่ง

$$\varepsilon\le d(x,y)<\varepsilon+\delta\ \Rightarrow\ d(fx,fy)<\varepsilon \text{ ; สำหรับทุก } x,y\in X$$

ทฤษฎีบทที่ 4 (Meir and Keeler, 1969) กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $f:(X,d) \to (X,d)$ เป็นการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์ แล้ว f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

นอกจากนี้ Suzuki (2007) ยังได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญในปริภูมิบานาค ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 5 (Suzuki, 2007) กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนของปริภูมิบานาค E และให้ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และ $f: C \to C$ เป็นการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $T \circ f$ เป็นการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์ บน C

(2) สำหรับแต่ละ $t \in (0,1)$ กำหนดให้การส่ง $S_t: C \to C$ นิยามโดย

$$S_t(x) = t\,f(x) + (1-t)Tx, \qquad x \in C$$

แล้วจะได้ว่า S_t เป็นการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์ บน C

ทฤษฎีบทที่ 6 (Suzuki, 2007) กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนของปริภูมิบานาค E และ $f: C \to C$ เป็นการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์ แล้ว สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $k \in (0,1)$ ซึ่ง

$$\|x-y\| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; \|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\| \text{ สำหรับทุก } x, y \in C$$

นอกจากนี้ Suzuki (2007) ยังได้ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของลำดับที่ก่อเกิดโดยวิธีการประมาณค่าแบบหนืดโดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 4, 5 และ 6 อีกด้วย

ต่อไปผู้เขียนจะกล่าวถึงการส่งแบบหดตัวอีกแบบหนึ่ง ซึ่งมีความสัมพันธ์กับการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์

บทนิยามที่ 5 กำหนดให้ $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว ψ ถูกเรียกว่า *ฟังก์ชัน* L (L-function) ถ้า $\psi(0) = 0$, $\psi(t) > 0$ เมื่อ $t > 0$ และสำหรับทุก $s > 0$ จะมี $u > s$ ซึ่ง $\psi(t) \leq s$ เมื่อ $t \in [s,u]$

บทนิยามที่ 6 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $f:(X,d) \to (X,d)$ เป็นการส่ง แล้ว f ถูกเรียกว่า *การหดตัว* (ψ, L) [(ψ, L)-contraction] ถ้า $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ เป็นฟังก์ชัน L และ $d(fx, fy) < \psi(d(x,y))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$

ข้อสังเกต ถ้ากำหนดให้ $\psi(t) = kt$ เมื่อ $k \in (0,1)$ แล้วจะได้ว่า f เป็นการส่งแบบหดตัว

จากบทนิยามที่ 6 ทำให้ได้ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของการส่งแบบหดตัว (ψ, L)

ทฤษฎีบทที่ 7 (Reich, 1972) กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $f:(X,d) \to (X,d)$ เป็นการส่งแบบหดตัว (ψ, L) แล้ว f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

Lim (2001) ได้พิสูจน์ความสมมูลของการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์และการส่งแบบหดตัว (ψ, L) ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 8 (Lim, 2001) กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $f:(X,d) \to (X,d)$ เป็นการส่ง จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) f เป็นการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์

(2) จะมี ψ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน L และทำให้ f เป็นการส่งแบบหดตัว (ψ, L)

ในทำนองเดียวกัน Petrusel และ Yao ยังได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 9 (Petrusel and Yao, 2008) กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนของปริภูมิบานาค E และให้ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และ $f: C \to C$ เป็นการส่งแบบหดตัว (ψ, L) แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $T \circ f$ เป็นการส่งแบบหดตัว (ψ, L) บน C

(2) สำหรับแต่ละ $t \in (0,1)$ กำหนดให้การส่ง $S_t: C \to C$ นิยามโดย

$$S_t(x) = t\, f(x) + (1-t)Tx, \qquad x \in C$$

แล้วจะได้ว่า S_t เป็นการส่งแบบหดตัว (ψ, L) บน C

จากความจริงดังกล่าวทำให้เราสามารถศึกษาการประมาณค่าของการส่งแบบไม่ขยายสำหรับการหดตัวดังกล่าวได้ ซึ่ง Petrusel และ Yao ได้ศึกษาการลู่เข้าแบบเข้มในปริภูมิบานาคของลำดับที่ก่อเกิดโดย

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)Tx_n, \;\; n \geq 1$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วง $(0,1)$ และ $f: C \to C$ เป็นการส่งแบบหดตัว (ψ, L)

นอกจากหลักการการหดตัวของบานาควางนัยทั่วไปที่ได้กล่าวถึงไปแล้วนั้น ต่อไปจะขอกล่าวถึงหลักการดังกล่าวในรูปแบบของการส่งหลายค่าแบบหดตัว (contractive multi-valued mapping) ซึ่งเป็นหัวข้อที่ได้รับความสนใจในการศึกษาและวิจัยเช่นกัน อีกทั้งยังมีความสำคัญอย่างมากในการแก้ปัญหาที่มีอยู่ในทางเศรษฐศาสตร์

บทนิยามที่ 7 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง เราใช้สัญลักษณ์ $K(X)$ แทนวงศ์ (family) ของเซตกระชับของ X และ $CB(X)$ แทนวงศ์ของเซตปิดที่มีขอบเขตของ X และเรียกการส่งหลายค่า $T: X \to CB(X)$ ว่า *การส่งแบบหดตัว* ถ้ามีจำนวนจริง $k \in [0,1)$ ซึ่ง

$$H(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ และเรียก $T: X \to CB(X)$ ว่า *การส่งแบบไม่ขยาย* ถ้า

$$H(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ เมื่อ $H(\cdot,\cdot)$ คือ *เมตริกเฮาส์ดอร์ฟ* (Housdorff metric) ซึ่งนิยามโดย

$$H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$$

สำหรับ $A, B \in CB(X)$ และ $d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$

นอกจากนี้จะกล่าวว่าสมาชิก $x \in X$ เป็นจุดตรึงของการส่งหลายค่า T ถ้า $x \in Tx$

ในปี ค.ศ. 1969 Nadler ได้พิสูจน์หลักการการหดตัวของบานาคสำหรับการส่งหลายค่าแบบหดตัวดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 10 (Nadler contraction principle) (Nadler, 1969) กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $f: X \to CB(X)$ เป็นการส่งแบบหดตัว แล้ว f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

ในทำนองเดียวกันกับหลักการการหดตัวของบานาค ถ้ากำหนดให้ E เป็นปริภูมิบานาค และ D เป็นเซตย่อยนูนและปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ E และสำหรับแต่ละ $t \in (0,1)$ นิยามการส่ง $G_t: D \to CB(D)$ โดย

$$G_t(x) = tu + (1-t)Tx, \ \ x \in D$$

เมื่อ $T: D \to CB(D)$ เป็นการส่งแบบหลายค่าแบบไม่ขยาย (nonexpansive multi-valued mapping) และ $u \in D$ เป็นเวกเตอร์คงที่ แล้วจะได้ว่า G_t เป็นการส่งหลายค่าแบบหดตัว นอกจากนี้โดยอาศัยหลักการการหดตัวของแนดเลอร์ จะได้ว่ามีจุดตรึง $x_t \in D$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$x_t \in tu + (1-t)Tx_t$$

อย่างไรก็ตาม Pietramala (1991) ได้ให้ตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าทฤษฎีบทของ Browder ไม่สามารถขยายไปสู่การส่งหลายค่าได้โดยตรง แต่ต้องเพิ่มเงื่อนไขพิเศษบางอย่างด้วย ซึ่งต่อมา Lopez Acedo และ Xu (Lopez Acedo and Xu, 1995) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของวิถี x_t โดยอาศัยความจริงข้างต้น ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะขยายทฤษฎีบทของ Browder สำหรับการส่งหลายค่าแบบไม่ขยาย T ในปริภูมิฮิลแบร์ต โดยมีการเพิ่มเงื่อนไขจุดปลาย (end point) หรือ $Tx = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in F(T)$ เข้าไปด้วย

นอกจากนี้แนวคิดในการส่งหลายค่าได้ถูกขยายไปยังการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์ โดย Lim (2001) อีกด้วย

บทนิยามที่ 8 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก การส่งหลายค่า $f: X \to CB(X)$ ถูกเรียกว่า *การส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์* (Meir-Keeler contractive multi-valued mapping) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ซึ่ง

$$\varepsilon \le d(x,y) < \varepsilon + \delta \ \Rightarrow \ H(fx, fy) < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ เมื่อ $\delta(\varepsilon) = \inf\limits_{x,y \in X} \{d(x,y) : H(fx, fy) \ge \varepsilon\}$

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของการส่งหลายค่าแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์

ทฤษฎีบทที่ 11 (Reich, 1972; Lim, 2001) กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $f: X \to K(X)$ เป็นการส่งแบบหดตัวเมียร์-คีเลอร์ แล้ว f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

บทสรุป

หลักการการหดตัวของบานาควางนัยทั่วไปที่ได้กล่าวในบทความนี้นอกจากจะมีคุณค่าในเชิงทฤษฎีแล้ว แต่ยังมีความสำคัญในการประยุกต์โดยการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อใช้ในการประมาณค่าจุดตรึงหรือผลเฉลยของการส่งไม่เชิงเส้นต่าง ๆ ทั้งในปริภูมิฮิลแบร์ตและปริภูมิบานาค ซึ่งส่งผลให้ในปัจจุบันมีนักคณิตศาสตร์จำนวนไม่

น้อยได้คิดค้นและพัฒนางานวิจัยตีพิมพ์ที่เกี่ยวกับการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งไม่เชิงเส้นชนิดต่าง ๆ มากมาย อย่างไรก็ตามการศึกษาการลู่เข้าของการส่งหลายค่ายังคงเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการคิดค้น พัฒนา และปรับปรุงต่อไป เช่นการลดเงื่อนไขจุดปลาย การสร้างวิธีทำซ้ำชัดแจ้งเพื่อหาผลเฉลยของการส่งไม่เชิงเส้นหลายค่าแบบต่าง ๆ เป็นต้น นอกจากนี้ยังเป็นที่น่าสนใจว่าทฤษฎีบทที่ 11 สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างวิถีหรือวิธีทำซ้ำขึ้นมาเพื่อประมาณค่าจุดตรึงของการส่งหลายค่าได้หรือไม่ และภายใต้เงื่อนไขใด ตลอดจนการสร้างหลักการการหดตัววางนัยทั่วไปใหม่ขึ้นมา ทั้งหมดจึงเป็นสิ่งที่นักคณิตศาสตร์ต้องคิดค้นและพัฒนาต่อไป

เอกสารอ้างอิง

Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations intregrales. Fund. Math. 3: 133-181.

Boyd, D.W. and Wong, J.S.W. (1969). On nonlinear contractions. Proc. Am. Soc. 20: 458-464.

Browder, F.E. (1967). Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces. Arch. Ration. Mech. Anal. 24: 82-90.

Halpern, B. (1967). Fixed points of nonexpanding maps. Bull. Amer. Math. Soc. 73: 957-961.

Jung, J.S. (2008). Convergence on composite iterative schemes for nonexpansive mappings in Banach spaces. Fixed Point Theory Appl. 2008: Article ID 167535, 14 pages.

Lim, T.C. (2001). On characterizations of Meir-Keeler contractive maps. Nonlinear Anal. 46: 113-120.

Lions, P.-L. (1977). Approximation de points fixes de contractions. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 284: A1357-A1359.

Lopez Acedo, G. and Xu, H.K. (1995). Remarks on multivalued nonexpansive mappings. Soochow J. Math. 21: 107-115.

Meir, A. and Keeler E. (1969). A theorem on contraction mappings. J. Math. Anal. Appl. 28: 326-329.

Moudafi, A. (2000). Viscosity approximation methods for fixed points problems. J. Math. Anal. Appl. 241: 46-55.

Nadler, S. (1969). Multivalued contraction mappings. Pacific J. Math. 30: 475-488.

Petrusel, A. and Yao, J.C. (2008). Viscosity approximation to common fixed points of families of nonexpansive mappings with generalized contractions mappings. Nonlinear Anal. 69: 1100-1111.

Pietramala, P. (1991). Convergence of approximating fixed points sets for multivalued nonexpansive mappings. Comment. Math. Univ. Carolin. 32: 697-701.

Reich, S. (1972). Fixed points of contractive functions. Boll. Un. Mat. Ital. 4: 26-42.

Reich, S. (1980). Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 75: 287-292.

Reich, S. (1994). Approximating fixed points of nonexpansive mappings. PanAmer. Math. J. 4: 23-28.

Rhodes, B.E. (2001). Some theorems on weakly contractive maps. Nonlinear Anal. 47: 2683-2693.

Shioji, N. and Takahashi, W. (1997). Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mapping in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 125: 3641-3645.

Suzuki, T. (2007). Moudafi's viscosity approximations with Meir-Keeler contractions. J. Math. Anal. Appl. 325: 342-352.

Takahashi, W. (2000). Nonlinear Functional Analysis: Fixed Point Theory and Applications. Yokohama Publishers.
Wittmann, R. (1992). Approximation of fixed points of nonexpansive mappings. Arch. Math. (Basel) 58: 486-491.
Xu, H.K. (2004). Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl. 298: 279-291.

❑❑❑❑❑