



ผลเฉลยแม่นตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เชิงเส้น Analytic Solution of Nonlinear Partial Differential Equations

ศิริรัตน์ สุขใส¹

บทคัดย่อ

ในบทความนี้เราได้นำเสนอวิธีการตรงฮิโรตะ เพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เชิงเส้น ซึ่งเรียกผลเฉลยที่ได้ว่า ‘ผลเฉลยโซลิตอน’ วิธีการตรงฮิโรตะเป็นหนึ่งในวิธีการที่มีชื่อเสียงมากที่สุดในการสร้างผลเฉลยหลายโซลิตอน และวิธีการตรงฮิโรตะจะมีขั้นตอนในการหาผลเฉลยสี่ขั้นตอน ขั้นตอนที่สำคัญคือการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของฮิโรตะซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบพหุนามของตัวดำเนินการ D เราได้ยกตัวอย่างของสมการเคดีวีเพื่อเพิ่มความเข้าใจยิ่งขึ้นในการแปลงให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่และหาผลเฉลยโซลิตอนของสมการนี้ได้ ซึ่งเราสามารถหาผลเฉลยได้ถึงสามโซลิตอน

ABSTRACT

In this article, we show the Hirota direct method to find exact solutions of nonlinear partial differential equations. These solutions are call ‘soliton solution’. The Hirota direct method is the most famous one method which can construct multi-soliton solutions. And the Hirota method has four processes. The importance process is transforming nonlinear partial differential equations to Hirota bilinear form that can write in polynomial of D -operator. We have example of KdV equation for more understanding in the transforming nonlinear equations to bilinear form and find soliton solutions of this equation that we can find to three-soliton solutions.

คำสำคัญ: สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เชิงเส้น ผลเฉลยแม่นตรง วิธีการตรงฮิโรตะ ผลเฉลยโซลิตอน

Keywords: Nonlinear partial differential equations, Analytic solution, Hirota direct method, Soliton solution

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพฯ 10110

E-mail: sirirats@swu.ac.th

บทนำ

เป็นที่รู้กันในกลุ่มของนักคณิตศาสตร์ว่า ไม่ใช่เรื่องง่ายเลยที่จะหาผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เชิงเส้น ผู้เขียนจึงต้องการนำเสนอวิธีการหนึ่งที่น่าสนใจ และสามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เชิงเส้นได้ วิธีการนี้คือ “วิธีการตรงของฮิโรตะ (Hirota’s direct method)” และผลเฉลยแม่นยำตรงซึ่งผลเฉลยแม่นยำตรงนี้มีชื่อว่า ผลเฉลยโซลิตอน (Soliton solutions) ก่อนที่จะกล่าวถึงขั้นตอนและวิธีการในการหาผลเฉลยแม่นยำตรงกัน เรามารู้ที่มาที่ไปของวิธีการและผลเฉลยกันก่อน ซึ่งหลายคนน่าจะมีความสนใจว่าผลเฉลยโซลิตอน หรือโซลิตอนคืออะไร

โซลิตอน คือคลื่นเดี่ยว (solitary wave) ซึ่งคงรูปเดิมได้ดีหลังจากปะทะหรือชนกับคลื่นลูกอื่นที่เป็นคลื่นชนิดเดียวกัน เมื่อ 40 ปีที่ผ่านมาได้มีการพัฒนาทฤษฎีโซลิตอน และได้มีนักคณิตศาสตร์ นักฟิสิกส์ และนักวิศวกรรม ซึ่งต่างก็สนใจศึกษาโซลิตอนเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในงานทางกายภาพ (รวมไปถึงพลาสมา (plasma), โจเซฟสันจังชัน (Josephson junctions), โมเลกุลโพลีอะเซทิลีน (poly acetylene molecule) เป็นต้น) โซลิตอนถูกพบครั้งแรกในคลื่นน้ำตื้น (shallow water waves) โดยเจ. สก็อต รัสเซลล์ (Russell, 1834) การทดลองของรัสเซลล์ทำให้เขาค้นพบ การมีอยู่จริงของคลื่นเดี่ยว และสูตรความเร็ว v ของคลื่น คือ $v = \sqrt{g(h+\eta)}$ เมื่อ η คือ ความกว้างของคลื่นซึ่งวัดจากระดับน้ำ h คือความกว้างของร่องน้ำ และ g คือแรงโน้มถ่วงของโลก เขาได้นำเสนอการทดลองกับสมาคมคณิตศาสตร์อังกฤษในปี ค.ศ.1844 แต่นักคณิตศาสตร์บางคนไม่เห็นด้วยกับผลงานของเขา

ไอริ (Airy, 1845) ได้เขียนสูตรของความเร็วของคลื่น ที่สัมพันธ์กับความสูงและความกว้างของคลื่นและสรุปว่าคลื่นเดี่ยวไม่มีจริงในงานของรัสเซลล์ โคर्टเวก และเดอ วรีส (Korteweg and de Vries, 1895) ได้แก้สมการที่เรียกว่า สมการเคดีวี (KdV equation) ซึ่งอธิบายคลื่นน้ำตื้น ว่ามีคลื่นเดี่ยวอยู่จริงซึ่งพิสูจน์ได้ทางคณิตศาสตร์ เฟอร์มี พาสต้า และ อุแลม (Fermi et al., 1955) ได้แก้ปัญหาเชิงตัวเลขของการเคลื่อนที่ของสมการนิวตันสำหรับหนึ่งมิติของมวลที่เหมือนกันของสปริงไม่เชิงเส้น ซาบสกี และครัสคาล (Zabusky and Kruskal, 1965) ได้วิเคราะห์สมการเคดีวีซึ่งเกิดขึ้นจากปัญหาเอฟพียู (FPU) พวกเขาสังเกตว่าคลื่นสามารถรักษารูปร่างและโมเมนตัมได้เมื่อชนกัน จึงเรียกคลื่นนี้ว่า “โซลิตอน”

ฮิโรตะ (Hirota, 1971) ตีพิมพ์บทความที่ให้อธิบายใหม่ เรียกว่า “วิธีการตรงของฮิโรตะ” ซึ่งหาผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการเคดีวีสำหรับการชนของหลายโซลิตอน ในบทความของโรโอโก ได้ใช้วิธีการนี้หาผลเฉลยของสมการวิวัฒนาการไม่เชิงเส้น เช่น สมการเอ็มเคดีวี (modified Korteweg-de Vries, mKdV) (Hirota, 1972) สมการเอสจี (sine-Gordon, sG) (Hirota, 1972) สมการเอ็นแอลเอส (nonlinear Schrödinger, nLS) (Hirota, 1973) และสมการทีแอล (Toda lattice, TL) (Hirota, 1973)

ขั้นตอนของวิธีการตรงฮิโรตะ

ก่อนที่จะทราบขั้นตอนของวิธีการตรงฮิโรตะ เราต้องรู้จักเครื่องมือที่จะใช้ในการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและสมการผลต่างไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้นคู่ของฮิโรตะก่อน

นิยาม ให้ S เป็นเซตของปริภูมิของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ซึ่งส่งจาก $\mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ แล้วตัวดำเนินการฮิโรตะ D คือ $D: S \times S \rightarrow S$ ซึ่งนิยามว่า

$$[D_x^{m_1} D_t^{m_2}]\{f \cdot g\} = [(\partial_x - \partial_{x'})^{m_1} (\partial_t - \partial_{t'})^{m_2}] f(x, t) \cdot g(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}$$

หมายเหตุ เราจะแทนสัญลักษณ์ $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$

เรามีตัวอย่างสมการที่แปลงให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของฮิโรตะ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 สมการเคพี (KP, The Kadomtsev-Petviashvili Equation)

สมการเคพี คือ

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0$$

ตัวที่ใช่แปลงให้เป็นเชิงเส้นคู่สำหรับสมการนี้ คือ

$$u(x, t, y) = -2\partial_x^2 \log f$$

รูปแบบเชิงเส้นคู่ของสมการเคพี คือ

$$ff_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{yy} f = -3f_y^2 = 0$$

รูปแบบเชิงเส้นคู่ของฮิโรตะ คือ

$$(D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2)\{f \cdot f\} = 0$$

ส่วนรูปแบบเชิงเส้นคู่ของฮิโรตะที่มากกว่าหนึ่งสมการ แสดงไว้ในตัวอย่างถัดไป

ตัวอย่างที่ 2 สมการเอ็มเคดีวี (MKdV, The Modified KdV Equation)

สมการเอ็มเคดีวี คือ

$$u_t + 24u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

ตัวที่ใช่แปลงให้เป็นเชิงเส้นคู่สำหรับสมการนี้ คือ

$$u(x, t) = \frac{g_x f - g f_x}{g^2 + f^2}$$

รูปแบบเชิงเส้นคู่ของสมการเคพี คือ

$$-(g^2 + f^2)(g_t f - g f_t + g_{xxx} f - 3g_{xx} f_x - g f_{xxx})$$

$$+ 6(fg_x - gf_x)(f_{xx} - f_x^2 + gg_{xx} - g_x^2) = 0$$

รูปแบบเชิงเส้นคู่ของอีโรตคือ

$$\begin{cases} (D_x^3 + D_t)(g \cdot f) = 0, \\ D_x^2 \{f \cdot f + g \cdot g\} = 0 \end{cases}$$

ต่อไปจะกล่าวถึงขั้นตอนและวิธีการทั้งหมดในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและสมการผลต่างไม่เชิงเส้น ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนแรก คือการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและสมการผลต่างไม่เชิงเส้น ให้อยู่ในรูปแบบสมการกำลังสองของตัวแปรที่ไม่อิสระ ซึ่งรูปแบบใหม่ที่ได้นี้เรียกว่า “รูปแบบเชิงเส้นคู่” การหาตัวที่จะมาแปลงสมการไม่ใช่เรื่องง่าย และบางครั้งจำเป็นที่จะต้องหาตัวแปรที่อิสระและไม่อิสระใหม่เพื่อนำมาใช้ในการแปลงสมการ

ขั้นตอนที่สองคือการใช้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์พิเศษที่เรียกว่า ตัวดำเนินการอีโรต ซึ่งเราจะเขียนรูปแบบเชิงเส้นคู่ของสมการให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการดี (D -operator) ของพหุนาม ซึ่งเรียกว่า รูปแบบเชิงเส้นคู่อีโรต แต่น่าเสียดายที่ไม่มีแนวทางที่เป็นระบบในการสร้างรูปแบบเชิงเส้นคู่อีโรตสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและสมการผลต่างไม่เชิงเส้น ซึ่งบางสมการไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของอีโรตได้ แต่จะเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงสามเส้นหรือไม่ก็รูปแบบเชิงหลายเส้นได้เช่นกัน (Grammaticos et al., 1994) ที่นี้เราสามารถคาดเดาได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและสมการเชิงผลต่างไม่เชิงเส้นที่หาปริพันธ์ได้โดยสมบูรณ์นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ได้ ในทางกลับกันบทกลับไม่จริงนั้นคือ จะมีบางสมการซึ่งหาปริพันธ์ไม่ได้แต่เขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ได้

ขั้นตอนสุดท้ายของวิธีการนี้เราจะนำการกระจายเพอร์เทอร์เบชัน (the perturbation expansion) มาใช้ ซึ่งจะเห็นว่ารูปแบบเชิงเส้นอีโรตและการวิเคราะห์หุ้มประสิทธิภาพของพารามิเตอร์เพอร์เทอร์เบชันและด้วยกำลังที่แยกกันได้ จะให้ผลลัพธ์คือผลเฉลยหลายโซลิตอน (multi-soliton)

ตัวอย่างการหาผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

เราเลือกสมการเคดีวี (the KdV equation) มาหาผลเฉลยแม่นยำตรงโดยใช้ขั้นตอนที่ได้กล่าวมาข้างต้น ซึ่งสมการคือ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

วิธีอีโรตมีกฎเกณฑ์สำคัญในการศึกษาสมการที่หาปริพันธ์ได้ สมการส่วนมากมีรูปแบบอีโรตซึ่งจะให้ผลเฉลยหนึ่งโซลิตอนและสองโซลิตอนได้ทันที เมื่อเราต้องการหาผลเฉลยสามโซลิตอนเราจะต้องจำกัดเงื่อนไขถ้ามีเงื่อนไขไม่เพียงพอในการหาผลเฉลยของสมการ แต่เราสามารถใช้เครื่องมือที่มีประสิทธิภาพมาใช้กับปัญหานี้ได้จากไฮเอทาริน (Hietarinta, 1991) เขาได้นำเงื่อนไขนี้มาสร้างสมการใหม่ที่หาปริพันธ์ได้ เช่น ในปี ค.ศ.1987 เขาได้คิดค้นผลเฉลยสามโซลิตอนของสมการเคดีวี เคดีวีและเอสจี และในปี ค.ศ.1988 คือสมการเชิงเส้นคู่เชิงซ้อน

สมการที่เขียนอยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ฮิโรตะได้และมีผลเฉลยหลายโซลิตอนเราจะเรียกสมการนี้ว่า ฮิโรตะที่หาปริพันธ์ได้

ขั้นตอนที่ 1 การทำให้เป็นเชิงเส้นคู่: เราใช้ $u = 2\partial_x^2 \log F$ มาแปลงสมการเคตตีให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่

กำหนดให้ w เป็นตัวแปรตามตัวใหม่โดยที่

$$u = \partial_x^2 w \quad (2)$$

โดยกำหนดให้

$$w = 2 \log F \quad (3)$$

หลังจากนั้นสมการเคตตีเขียนใหม่ได้เป็น

$$w_{xxxx} + 6w_{xx}w_{xxx} + w_{xt} = 0 \quad (4)$$

หาปริพันธ์เทียบกับ x จะได้

$$w_{xxx} + 3w_{xx}^2 + w_{xt} = 0 \quad (5)$$

จาก (3) หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับแต่ละตัวแปรและแทนใน (5) จะได้รูปแบบเชิงเส้นคู่ของเคตตี คือ

$$F_{xxxx}F - 4F_{xxx}F_x + 3F_{xx}^2 + F_{xt}F - F_xF_t = 0 \quad (6)$$

ขั้นตอนที่ 2 การแปลงให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของฮิโรตะ: โดยการใช้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ของฮิโรตะ ซึ่งเราจะพยายามที่จะเขียนสมการเคตตีให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของฮิโรตะ โดยพิจารณา $D_x D_t$ มาประยุกต์กับผลคูณของ $f \cdot f$

$$D_x D_t \{f \cdot f\} = D_t [(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})f(x_1)f(x_2)|_{x_2=x_1=x}] = 2(f_{xt} - f_x f_t) \quad (7)$$

สังเกตว่าเทอมเหล่านี้คือสองเทอมหลังของสมการ (6) คูณด้วย 2 และเทอมที่เหลือน่าจะได้อีกหนึ่งตัวดำเนินการ ซึ่งเราจะพิจารณา D_x^4

$$D_x^4 = 2(f_{xxxx} - 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2) \quad (8)$$

นั่นคือสามเทอมแรกของสมการ (6) คูณด้วย 2 เพราะฉะนั้นเราสามารถเขียนสมการ (6) ให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของฮิโรตะด้วยตัวดำเนินการได้คือ

$$P(D)\{f \cdot f\} = (D_x D_t + D_x^4)\{f \cdot f\} = 0 \quad (9)$$

ขั้นตอนที่ 3 การประยุกต์ของอีโรดเดอร์เทอร์เบชัน: แทน $F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$ (อีโรดเดอร์เทอร์เบชัน) ลงในสมการ (9) จะได้ผลคูณของ F คือ

$$F \cdot F = 1 \cdot 1 + \varepsilon(1 \cdot f_1 + f_1 \cdot 1) + \varepsilon^2(1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_1 + f_2 \cdot 1) + \varepsilon^3(1 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_1 + f_3 \cdot 1) + \dots$$

แทนผลคูณที่ได้ลงใน $P(D)\{F \cdot F\} = 0$ จะได้

$$P(D)\{F \cdot F\} = P(D)\{1 \cdot 1\} + \varepsilon P(D)\{1 \cdot f_1 + f_1 \cdot 1\} + \varepsilon^2 P(D)\{1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_1 + f_2 \cdot 1\} + \varepsilon^3 P(D)\{f_3 \cdot 1 + f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3\} + \dots = 0 \quad (10)$$

เพื่อให้สอดคล้องกับสมการ เราจะแสดงสัมประสิทธิ์ของ ε ที่ยกกำลังต่าง ๆ ให้เป็นศูนย์ เนื่องจากเราจะเขียน f อยู่ในรูปพหุนามของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential) เมื่อเราพิจารณาผลเฉลยโซลิตอนต่าง ๆ ของสมการ $F[u] = 0$ สำหรับ f_j ทุก $j \geq n+1$ จะเท่ากับศูนย์ และผลเฉลยแม่นยำตรงแต่ละโซลิตอนที่ได้จะต้องสอดคล้องกับทฤษฎีบทดังนี้

ผลเฉลยหนึ่งโซลิตอน

ทฤษฎีบท ให้ $u = T[f(x, t)]$ เป็นการแปลงให้เป็นเชิงเส้นคู่ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น หรือสมการเชิงผลต่างไม่เชิงเส้น $F[u] = 0$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของอีโรดเดอร์ $P(D)\{f \cdot f\} = 0$ แล้วผลเฉลยหนึ่งโซลิตอนของสมการนี้คือ

$$u = T[f(x, t, \dots)] = T[1 + e^{\eta_1}]$$

โดยที่ $\eta_1 = p_1 x + q_1 t + \alpha_1$ เมื่อค่าคงที่ p_1, q_1, α_1 สอดคล้องกับ $P(p_1, q_1) = P(P_1) = 0$ การหาผลเฉลยหนึ่งโซลิตอนของสมการเคดีวี เราพิจารณาจากสมการ (10) โดยให้ $F = 1 + \varepsilon f_1$ ซึ่ง $f_1 = e^{\eta_1}$ และ $\eta_1 = p_1 x + q_1 t + \alpha$ เราจะทราบว่า $f_j = 0$ สำหรับทุก $j \geq 2$ ซึ่งผลเฉลยหนึ่งโซลิตอนคือ

$$u = \frac{p_1^2}{2 \cosh^2 \eta_1}$$

โดยที่ $\eta_1 = p_1 x - p_1^3 t + \alpha_1$

ผลเฉลยสองโซลิตอน

ทฤษฎีบท ให้ $u = T[f(x, t)]$ เป็นการแปลงให้เป็นเชิงเส้นคู่ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น หรือสมการเชิงผลต่างไม่เชิงเส้น $F[u] = 0$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของอีโรตะ $P(D)\{f \cdot f\} = 0$ แล้วผลเฉลยสองโซลิตอนของสมการนี้คือ

$$u = T[f(x, t, \dots)] = T[1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2}]$$

โดยที่ $\eta_i = p_i x + q_i t + \alpha_i$ เมื่อค่าคงที่ p_i, q_i, α_i สอดคล้องกับ $P(p_i, q_i) = P(P_i) = 0, i = 1, 2$ และ

$$A_{12} = -\frac{P(P_1 - P_2)}{P(P_1 + P_2)}$$

การหาผลเฉลยสองโซลิตอนของสมการเคดีวี โดยพิจารณาจากสมการ (10) โดยให้ $F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2$ ซึ่ง $f_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}$ โดยที่ $\eta_i = p_i x + q_i t + \alpha_i$ สำหรับ $i = 1, 2$ ซึ่งเราจะต้องกำหนด f_2 ในภายหลัง เราทราบว่า $f_j = 0$ สำหรับทุก $j \geq 3$

และผลเฉลยสองโซลิตอนคือ

$$u = 2 \frac{\{p_1^2 e^{\eta_1} + p_2^2 e^{\eta_2} + A_{12}(p_2^2 e^{\eta_1} + p_1^2 e^{\eta_2})e^{\eta_1 + \eta_2} + 2(p_1 - p_2)^2 e^{\eta_1 + \eta_2}\}}{(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2})}$$

โดยที่ $\eta_i = p_i x - q_i^3 t + \alpha_i, i = 1, 2$ และ $A_{12} = \frac{(p_1 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2}$

ผลเฉลยสามโซลิตอน

ทฤษฎีบท ให้ $u = T[f(x, t)]$ เป็นการแปลงให้เป็นเชิงเส้นคู่ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น หรือสมการเชิงผลต่างไม่เชิงเส้น $F[u] = 0$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ของอีโรตะ $P(D)\{f \cdot f\} = 0$ ถ้า $F[u] = 0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขผลเฉลยสามโซลิตอนคือ

$$\sum_{\sigma_i = \pm 1} P(\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) P(\sigma_1 p_1 - \sigma_2 p_2) P(\sigma_2 p_2 - \sigma_3 p_3) P(\sigma_3 p_3 - \sigma_1 p_1) = 0$$

และ $P(P_i) = 0, i = 1, 2, 3$ แล้วผลเฉลยสามโซลิตอนคือ

$$\begin{aligned} u &= T[f(x, t, \dots)] \\ &= T[1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} + A_{13}e^{\eta_1 + \eta_3} + A_{23}e^{\eta_2 + \eta_3} + Be^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}] \end{aligned}$$

โดยที่ $\eta_i = p_i x + q_i t + \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$ และ $A_{ij} = -\frac{P(P_i - P_j)}{P(P_i + P_j)}$ สำหรับ $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$ และ

$$B = A_{12}A_{13}A_{23}$$

และผลเฉลยสามโซลิตอนที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทคือ

$$u = T[1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} + A_{13}e^{\eta_1 + \eta_3} + A_{23}e^{\eta_2 + \eta_3} + Be^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}]$$

โดยที่ $\eta_i = p_i x + q_i t + \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$ และ $A_{ij} = -\frac{P(P_i - P_j)}{P(P_i + P_j)}$ สำหรับ $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$ และ

$$B = A_{12}A_{13}A_{23}$$

ซึ่งเราจะติด u ในรูปการแปลงไว้ซึ่งไม่ยากถ้าเราจะหาผลเฉลยแน่นอนตรงเพราะเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อน

บทสรุป

- วิธีอีโรตเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการหาผลเฉลยโซลิตอน
- การกระจายโลรองต์สามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการเชิงเส้นคู่ได้โดยการแปลงจนอยู่ในรูปแบบตัวดำเนินการดี
- เมื่อนับสมการและฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าแล้ว อย่าลืมนับจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีสองค่าด้วย
- ถ้าสมการถูกแปลงเป็นรูปแบบเชิงเส้นคู่ซึ่งอยู่ในรูป $P(D_x, D_t)F \cdot F = 0$, แสดงว่าผลเฉลยมีสองโซลิตอน ซึ่งสมการเชิงเส้นคู่ไม่จำเป็นต้องมีรูปแบบอื่น
- ถ้าเราไม่สามารถแปลงสมการให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นคู่ได้ ให้เราสงสัยว่ามีผลเฉลยโซลิตอน เราควรจะแปลงสมการให้อยู่ในรูปแบบเชิงสามเส้น หรือเชิงหลายเส้น
- เมื่อเรามีสมการเชิงเส้นคู่ เราอาจจะมองหาผลเฉลยคาบ (periodic) หรือหลายคาบ (multi-periodic) โดยฟังก์ชันรีมันน์ η

วิธีการตรงอีโรตใช้ได้กับสมการดังนี้ สมการวิวัฒนาการไม่เชิงเส้น (nonlinear evolution equations), สมการคลื่น (wave equations) และระบบสมการคู่ (coupled system equations) และสิ่งที่วิธีการตรงอีโรตต้องการคือ การเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วของตัวแปรตาม การนำตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ที่แปลกใหม่มาใช้ และการขยายตัวรบกวนที่ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นคู่ (bilinear equation)

เอกสารอ้างอิง

- Russell, S. J., (1844). Fourteenth meeting of the British association of the advancement of science, Report on waves, London: eds. John Murray. 311 – 390.
- Airy, G. B., (1845). Tides and waves. Encyclopedia Metropolitana. London. 5: 241-396.

- Korteweg, D. J. and de Vries, G. (1985), On the change of form of long waves advancing in rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag. Ser. 5*(39): 422-443.
- Fermi, A., Pasta, J. and Ulam, S. (1955). Studies of non-linear problems, I. Los. Alamos Report LA 1940.
- Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D., (1965). Interaction of solitons in a collision less plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* 15: 240-243.
- Hirota, R. (1971). Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys. Rev. Lett.* 27: 1192.
- Hirota, R. (1972). Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *J. Phys. Soc. Japan.* 33: 1456.
- Hirota, R. (1972). Exact solution of the sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons. *J. Phys. Soc. Japan.* 33: 1459.
- Hirota, R. (1973). Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, *J. Math. Phys.* 14: 805-809.
- Hirota, R. (1973). Exact N-soliton solution of a nonlinear lumped network equation. *J. Phys. Soc. Japan.* 35: 286-288.
- Grammaticos, B., Ramani, A. and Hietarinta, J. (1994). Multilinear operators: the natural extension of Hirota's bilinear formalism. *Phys. Lett. A.* 190: 65-70.
- Hietarinta, J. (1991). Searching for integrable PDE's by testing Hirota's three soliton condition, *Proceedings of the 1991 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC'91*". Stephen M.Watt. (Association for Computing Machinery, 1991), 295-300.
- Hietarinta, J. (1987). A search of bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition: I. KdV-type bilinear equations. *J. Math. Phys.* 28: 1732-1742.
- Hietarinta, J. (1987). A search of bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition: II. MKdV-type bilinear equations. *J. Math. Phys.* 28: 2094-2101.
- Hietarinta, J. (1987). A search of bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition: III. sine-Gordon-type bilinear equations. *J. Math. Phys.* 28: 2586-2592.
- Hietarinta, J. (1988). A search of bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition: IV. Complex bilinear equations. *J. Math. Phys.* 29: 628-635.

