



KKU SCIENCE JOURNAL

Journal Home Page : <https://ph01.tci-thaijo.org/index.php/KKUSciJ>

Published by the Faculty of Science, Khon Kaen University, Thailand



ดีเทอร์มิแนนต์และเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับพหุนาม Determinant and Adjoint Matrices of Matrices Whose Members are Polynomial Sequences

นิรุต มีเกิด^{1*} อำภาพร คณะแพ่ง¹ พุฒิธร พุฒฤทธิ์¹ ชนากานต์ พรหมอินทร์¹ ชลธิชา สอนอยู่¹
และ ขวัญวิภา นิลจันทร์¹

Niroot Meekoed^{1*}, Amphaphon Khanaphaeng¹, Phuttithorn Putrit¹, Chanakan Promin¹,
Chonthicha Sonyoo¹ and Kwanwipha Ninchun¹

¹โรงเรียนบ้านไร่พิทยาคม จังหวัดสุโขทัย 64120

¹Banrai Pittayakhom School, Sukhothai, 64120, Thailand

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้เราศึกษาเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์และเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ แถว (หลัก) เป็นลำดับพหุนามดีกรี n เราพบว่าดีเทอร์มิแนนต์และผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลัก (แถว) ของเมทริกซ์ผกผันมีค่าเป็นศูนย์

ABSTRACT

In this research, we study the determinant and adjoint matrices of a matrices whose $n+2$ -row (column) entries are polynomial sequences of degree n . We obtain that the determinant and the sum of the entries in each column (row) of the adjoint matrices are zero.

คำสำคัญ: ดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ผกผัน ลำดับพหุนาม

Keywords: Determinant, Adjoint Matrix, Polynomial Sequences

บทนำและความรู้พื้นฐาน

เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาพีชคณิตเชิงเส้นซึ่งเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่น่าสนใจประยุกต์ใช้ในหลายศาสตร์ ทั้งสถิติ ทฤษฎีกราฟ ทฤษฎีความน่าจะเป็น แคลคูลัส เรขาคณิต ฟิสิกส์ เคมี วิศวกรรม ธรณีวิทยา คอมพิวเตอร์กราฟิก เศรษฐศาสตร์ รวมทั้งวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีด้านต่างๆ (Leon, 2015) มีผู้สนใจศึกษาเกี่ยวกับเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์หลายท่าน เช่น Hajrizaj (2009) ได้เสนอวิธีการใหม่ในการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 Thirumurugan (2014) ได้เสนอวิธีการใหม่ในการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ผกผัน และเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีตัวผกผันขนาด 3×3 จากงานวิจัยของ Mattingly (2000) สรุปได้ว่าดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัสกลอันดับคู่มีค่าเท่ากับ 0 Bahsi and Solak (2010) ได้ศึกษาเกี่ยวกับเมทริกซ์เซอร์กูลแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับเลขคณิต Yandl and

*Corresponding Author, E-mail: nirootko@gmail.com

Swenson (2012) ได้แสดงว่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นพหุนามดีกรี k มีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $n > k + 1$

จากการศึกษางานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์และเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ แถว (หลัก) เป็นลำดับพหุนามดีกรี n

ต่อไปจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ผกผัน และลำดับพหุนาม ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1 ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $\det A$, $\det(A)$ หรือ $|A|$
 ถ้า $A = [a]$ จะได้ว่า $\det A = a$
 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det A = ad - bc$

บทนิยาม 2 ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ไมเนอร์ (minor) ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออก เขียนแทนไมเนอร์ของ a_{ij} ด้วย $M_{ij}(A)$

บทนิยาม 3 ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ตัวประกอบร่วมเกี่ยว (cofactor) ของ a_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}(A)$ เขียนแทนตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij} ด้วย $C_{ij}(A)$ ซึ่งจะได้ว่า $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

บทนิยาม 4 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$ เมทริกซ์ผกผัน (adjoint matrix) ของ A คือ เมทริกซ์ $[C_{ij}(A)]^T$ เขียนแทนเมทริกซ์ผกผันของ A ด้วย $\text{adj}(A)$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & \cdots & C_{1n}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & \cdots & C_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(A) & C_{n2}(A) & \cdots & C_{nn}(A) \end{bmatrix}^T$$

บทนิยาม 5 ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ $a_{1j} C_{1j}(A) + a_{2j} C_{2j}(A) + \dots + a_{nj} C_{nj}(A)$ และ $a_{i1} C_{i1}(A) + a_{i2} C_{i2}(A) + \dots + a_{in} C_{in}(A)$

สมบัติที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนต์

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดเท่ากัน

$$1. \det AB = \det A \cdot \det B$$

$$2. \det A = \det A^T$$

$$3. \det A^n = (\det A)^n$$

4. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการคูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง ด้วยค่าคงที่ k กับเมทริกซ์ A

แล้วจะได้ว่า $\det B = k \det A$

5. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการสลับสองแถวหรือสองหลักใดๆ ของเมทริกซ์ A แล้วจะได้ว่า $\det B = -\det A$

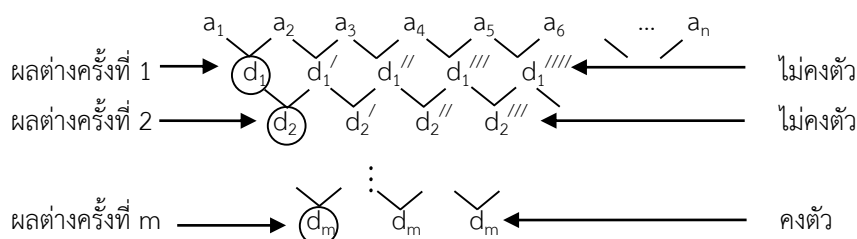
6. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการนำค่าคงที่ k คูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งกับเมทริกซ์ A แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่งหรือหลักหนึ่งของเมทริกซ์ A แล้วจะได้ว่า $\det B = \det A$

7. ถ้า A มีสมาชิกสองแถวใดๆ หรือสองหลักใดๆ เหมือนกันทั้งหมด แล้ว $\det A = 0$

บทนิยาม 6 กำหนดพหุนาม $P(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง แล้ว ลำดับ $(a_n) = P(n)$ จะเรียกว่า ลำดับพหุนาม

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับพหุนาม มีหลักการดังนี้

1. หาผลต่างระหว่างลำดับ “เรียกว่าผลต่างครั้งที่ 1” ถ้ายังไม่เป็นค่าคงตัว ก็ให้หาผลต่างของผลต่างครั้งที่ 1 อีกครั้ง “เรียกว่าผลต่างครั้งที่ 2” ถ้ายังไม่เป็นค่าคงตัว ก็ให้หาผลต่างของผลต่างครั้งที่ 2 อีกครั้ง “เรียกว่าผลต่างครั้งที่ 3” ถ้ายังไม่เป็นค่าคงตัว ก็ให้หาผลต่างของผลต่างครั้งที่ 3, 4, 5, ... ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้ค่าคงตัว



2. แทนค่าผลต่างตัวแรกของแต่ละครั้งในสมการ

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \dots + \binom{n-1}{m} d_m$$

จะได้พจน์ทั่วไปของลำดับพหุนามดีกรี m

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดลำดับ 1, 3, 6, 10, 15, ...

$$\text{พจน์ทั่วไป } (a_n) \text{ ของลำดับนี้ คือ } a_n = 1 + 2 \binom{n-1}{1} + 1 \binom{n-1}{2} = 1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

ผลลัพธ์หลัก

ต่อไปจะแสดงว่าดีเทอร์มิแนนต์และผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถว (แถว) ของเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ แถว (หลัก) เป็นลำดับพหุนามดีกรี n มีค่าเป็น 0

บทนิยาม 7 เมทริกซ์ขนาด $m \times m$ ที่มีสมาชิกในแต่ละแถวเป็นลำดับพหุนามดีกรี n คือ เมทริกซ์ที่อยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \dots & a_{11} + \binom{m-1}{1} d_{11} + \binom{m-1}{2} d_{12} + \dots + \binom{m-1}{n} d_{1n} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \dots & a_{21} + \binom{m-1}{1} d_{21} + \binom{m-1}{2} d_{22} + \dots + \binom{m-1}{n} d_{2n} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \dots & a_{31} + \binom{m-1}{1} d_{31} + \binom{m-1}{2} d_{32} + \dots + \binom{m-1}{n} d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} + d_{m1} & \dots & a_{m1} + \binom{m-1}{1} d_{m1} + \binom{m-1}{2} d_{m2} + \dots + \binom{m-1}{n} d_{mn} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ที่มีสมาชิกในแต่ละแถวเป็นลำดับพหุนามดีกรี 1 (ลำดับเลขคณิต) จะได้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & a_{11} + 2d_{11} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & a_{21} + 2d_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 5×5 ที่มีสมาชิกในแต่ละแถวเป็นลำดับพหุนามดีกรี 3
จะได้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & a_{11} + 2d_{11} + d_{12} & a_{11} + 3d_{11} + 3d_{12} + d_{13} & a_{11} + 4d_{11} + 6d_{12} + 4d_{13} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & a_{21} + 2d_{21} + d_{22} & a_{21} + 3d_{21} + 3d_{22} + d_{23} & a_{21} + 4d_{21} + 6d_{22} + 4d_{23} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} + d_{32} & a_{31} + 3d_{31} + 3d_{32} + d_{33} & a_{31} + 4d_{31} + 6d_{32} + 4d_{33} \\ a_{41} & a_{41} + d_{41} & a_{41} + 2d_{41} + d_{42} & a_{41} + 3d_{41} + 3d_{42} + d_{43} & a_{41} + 4d_{41} + 6d_{42} + 4d_{43} \\ a_{51} & a_{51} + d_{51} & a_{51} + 2d_{51} + d_{52} & a_{51} + 3d_{51} + 3d_{52} + d_{53} & a_{51} + 4d_{51} + 6d_{52} + 4d_{53} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ แถว เป็นลำดับพหุนามดีกรี n แล้ว $\det A = 0$

พิสูจน์ เราจะใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และการหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว
เป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ และเพื่อความสะดวกเราจะเขียนเฉพาะแถวที่มีสมาชิกเป็นลำดับพหุนาม
ถ้า $n = 1$ จะได้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก 3 แถว เป็นลำดับพหุนามดีกรี 1

$$\text{จะได้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & a_{11} + 2d_{11} & \cdots & a_{11} + (m-1)d_{11} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & a_{21} + 2d_{21} & \cdots & a_{21} + (m-1)d_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} & \cdots & a_{31} + (m-1)d_{31} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & a_{11} + 2d_{11} & \cdots & a_{11} + (m-1)d_{11} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & a_{21} + 2d_{21} & \cdots & a_{21} + (m-1)d_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} & \cdots & a_{31} + (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & a_{21} + 2d_{21} & \cdots & a_{21} + (m-1)d_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} & \cdots & a_{31} + (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 0 & d_{11} & 2d_{11} & \cdots & (m-1)d_{11} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & a_{21} + 2d_{21} & \cdots & a_{21} + (m-1)d_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} & \cdots & a_{31} + (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} & \cdots & a_{31} + (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ 0 & d_{21} & 2d_{21} & \cdots & (m-1)d_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} & \cdots & a_{31} + (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 0 & d_{11} & 2d_{11} & \cdots & (m-1)d_{11} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} & \cdots & a_{31} + (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 0 & d_{11} & 2d_{11} & \cdots & (m-1)d_{11} \\ 0 & d_{21} & 2d_{21} & \cdots & (m-1)d_{21} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & a_{31} + 2d_{31} & \cdots & a_{31} + (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ 0 & d_{21} & 2d_{21} & \cdots & (m-1)d_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} & \cdots & a_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ 0 & d_{21} & 2d_{21} & \cdots & (m-1)d_{21} \\ 0 & d_{31} & 2d_{31} & \cdots & (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} 0 & d_{11} & 2d_{11} & \cdots & (m-1)d_{11} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} & \cdots & a_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & d_{11} & 2d_{11} & \cdots & (m-1)d_{11} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} \\ 0 & d_{31} & 2d_{31} & \cdots & (m-1)d_{31} \end{vmatrix} \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 \quad (\text{ดึงตัวร่วมออก จะมีสมาชิก 2 แถว เหมือนกัน})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ทฤษฎีเป็นจริงสำหรับทุกๆ $n = k$ นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{1k} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1}d_{21} + \binom{m-1}{2}d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{2k} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,1} + d_{k+2,1} & \cdots & a_{k+2,1} + \binom{m-1}{1}d_{k+2,1} + \binom{m-1}{2}d_{k+2,2} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{k+2,k} \end{vmatrix} = 0$$

จะแสดงว่า

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{1,k+1} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1}d_{21} + \binom{m-1}{2}d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{2,k+1} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1}d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2}d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{k+3,k+1} \end{vmatrix} = 0$$

เนื่องจาก

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{1,k+1} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1}d_{21} + \binom{m-1}{2}d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{2,k+1} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1}d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2}d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{k+3,k+1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{1,k} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1}d_{21} + \binom{m-1}{2}d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{2,k+1} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1}d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2}d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{k+3,k+1} \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1}d_{1,k+1} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1}d_{21} + \binom{m-1}{2}d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{2,k+1} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1}d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2}d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{k+3,k+1} \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{1,k} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1}d_{21} + \binom{m-1}{2}d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{2,k} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1}d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2}d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{k+3,k+1} \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{1,k} \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1}d_{2,k+1} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1}d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2}d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{k+3,k+1} \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1}d_{1,k+1} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1}d_{21} + \binom{m-1}{2}d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k}d_{2,k} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1}d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2}d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1}d_{k+3,k+1} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{1,k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{2,k+1} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1} d_{31} + \binom{m-1}{2} d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k+1} d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1} d_{k+3,k+1} \end{array} \right| \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
& = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1} d_{11} + \binom{m-1}{2} d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{1,k} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1} d_{21} + \binom{m-1}{2} d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{2,k} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1} d_{31} + \binom{m-1}{2} d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1} d_{k+3,k+1} \end{array} \right| \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
& + \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1} d_{11} + \binom{m-1}{2} d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{1,k} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1} d_{21} + \binom{m-1}{2} d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{2,k} \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1} d_{k+3,k+1} \end{array} \right| \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
& + \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1} d_{11} + \binom{m-1}{2} d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{1,k} \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{2,k+1} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1} d_{31} + \binom{m-1}{2} d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1} d_{k+3,k+1} \end{array} \right| \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
& + \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1} d_{11} + \binom{m-1}{2} d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{1,k} \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{2,k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1} d_{k+3,k+1} \end{array} \right| \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\left| \begin{array}{cccc}
0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{1,k+1} \\
a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1} d_{21} + \binom{m-1}{2} d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{2,k} \\
a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1} d_{31} + \binom{m-1}{2} d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{3,k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1} d_{k+3,k+1}
\end{array} \right| \\
+ \\
\left| \begin{array}{cccc}
0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{1,k+1} \\
a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1} d_{21} + \binom{m-1}{2} d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{2,k} \\
0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{3,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k+1} d_{k+3,k+1}
\end{array} \right|
\end{array}$$

ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนครบทุกแถว จะได้

$$\begin{array}{c}
\det A = \left| \begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1} d_{11} + \binom{m-1}{2} d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{1,k} \\
a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1} d_{21} + \binom{m-1}{2} d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{2,k} \\
a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1} d_{31} + \binom{m-1}{2} d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{3,k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{k+3,k}
\end{array} \right| \\
+ \\
\left| \begin{array}{cccc}
0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{1,k+1} \\
a_{21} & a_{21} + d_{21} & \cdots & a_{21} + \binom{m-1}{1} d_{21} + \binom{m-1}{2} d_{22} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{2,k} \\
a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1} d_{31} + \binom{m-1}{2} d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{3,k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{k+3,k}
\end{array} \right| \\
+ \\
\left| \begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1} d_{11} + \binom{m-1}{2} d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{1,k} \\
0 & 0 & \cdots & \binom{m-1}{k+1} d_{2,k+1} \\
a_{31} & a_{31} + d_{31} & \cdots & a_{31} + \binom{m-1}{1} d_{31} + \binom{m-1}{2} d_{32} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{3,k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k+3,1} & a_{k+3,1} + d_{k+3,1} & \cdots & a_{k+3,1} + \binom{m-1}{1} d_{k+3,1} + \binom{m-1}{2} d_{k+3,2} + \cdots + \binom{m-1}{k} d_{k+3,k}
\end{array} \right|
\end{array}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} + d_{11} & \dots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \dots + \binom{m-1}{k}d_{1,k} \\ a_{21} & a_{21} + d_{21} & \dots & a_{21} + \binom{m-1}{1}d_{21} + \binom{m-1}{2}d_{22} + \dots + \binom{m-1}{k}d_{2,k} \\ a_{31} & a_{31} + d_{31} & \dots & a_{31} + \binom{m-1}{1}d_{31} + \binom{m-1}{2}d_{32} + \dots + \binom{m-1}{k}d_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{m-1}{k+1}d_{k+3,k+1} \end{vmatrix}$$

$= 0 + 0 + 0 + \dots + 0$ (จาก $P(k)$ เป็นจริง)

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ แถว เป็นลำดับพหุนามดีกรี n แล้ว $\det A = 0$

บทแทรก 2 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ หลัก เป็นลำดับพหุนามดีกรี n แล้ว $\det A = 0$

พิสูจน์ จาก $\det A = \det A^T$
ดังนั้นบทแทรกเป็นจริง

ต่อไปเราจะกล่าวถึงบทตั้ง 3 ซึ่งกล่าวว่า ถ้า A_i เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนที่สมาชิกแถวที่ i ของ A ด้วย 1 แล้วผลรวมของสมาชิกในหลักที่ i ของ $\text{adj } A$ จะเท่ากับ $\det A_i$ ซึ่งบทตั้งนี้จะใช้เป็นพื้นฐานสำคัญในการพิสูจน์ว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลัก (แถว) ของเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ แถว (หลัก) เป็นลำดับพหุนามดีกรี n มีค่าเป็น 0

บทตั้ง 3 ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ถ้า A_i เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนที่สมาชิกแถวที่ i ของ A ด้วย 1
แล้วผลรวมของสมาชิกในหลักที่ i ของ $\text{adj } A$ จะเท่ากับ $\det A_i$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ และ A_i เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนที่สมาชิกแถวที่ i ของ A ด้วย 1
จะได้

$$\det A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,m} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = 1C_{i1} + 1C_{i2} + \dots + 1C_{im}$$

จาก

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{i-1,1} & C_{i1} & C_{i+1,1} & \dots & C_{m1} \\ C_{12} & \dots & C_{i-1,2} & C_{i2} & C_{i+1,2} & \dots & C_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1m} & \dots & C_{i-1,m} & C_{im} & C_{i+1,m} & \dots & C_{mm} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า ผลรวมของสมาชิกในหลักที่ i ของ $\text{adj } A$ เท่ากับ $\det A_i$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ แถว เป็นลำดับพหุนามดีกรี n
แล้วผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของ $\text{adj } A$ เท่ากับ 0

พิสูจน์

จาก $a_{i1}, a_{i1} + d_{i1}, \dots, a_{i1} + \binom{m-1}{1}d_{i1} + \binom{m-1}{2}d_{i2} + \dots + \binom{m-1}{n}d_{in}$

เป็นลำดับพหุนามดีกรี n

จะได้ว่า $a_{i1} - 1, a_{i1} + d_{i1} - 1, \dots, a_{i1} + \binom{m-1}{1}d_{i1} + \binom{m-1}{2}d_{i2} + \dots + \binom{m-1}{n}d_{in} - 1$

เป็นลำดับพหุนามดีกรี n ด้วย

เนื่องจาก

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i1} + d_{i1} & \cdots & a_{i1} + \binom{m-1}{1}d_{i1} + \binom{m-1}{2}d_{i2} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{in} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n+2,1} & a_{n+2,1} + d_{n+2,1} & \cdots & a_{n+2,1} + \binom{m-1}{1}d_{n+2,1} + \binom{m-1}{2}d_{n+2,2} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{n+2,n}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i1} - 1 & a_{i1} + d_{i1} - 1 & \cdots & a_{i1} + \binom{m-1}{1}d_{i1} + \binom{m-1}{2}d_{i2} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{in} - 1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n+2,1} & a_{n+2,1} + d_{n+2,1} & \cdots & a_{n+2,1} + \binom{m-1}{1}d_{n+2,1} + \binom{m-1}{2}d_{n+2,2} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{n+2,n}
 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n+2,1} & a_{n+2,1} + d_{n+2,1} & \cdots & a_{n+2,1} + \binom{m-1}{1}d_{n+2,1} + \binom{m-1}{2}d_{n+2,2} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{n+2,n}
 \end{vmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{11} + d_{11} & \cdots & a_{11} + \binom{m-1}{1}d_{11} + \binom{m-1}{2}d_{12} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n+2,1} & a_{n+2,1} + d_{n+2,1} & \cdots & a_{n+2,1} + \binom{m-1}{1}d_{n+2,1} + \binom{m-1}{2}d_{n+2,2} + \cdots + \binom{m-1}{n}d_{n+2,n}
 \end{vmatrix} = 0$$

โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า ผลรวมของสมาชิกในหลักที่ i ของ $\text{adj } A$ เท่ากับ 0

ดังนั้นผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของ $\text{adj } A$ เท่ากับ 0

บทแทรก 5 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ หลัก เป็นลำดับพหุนามดีกรี n

แล้วผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวของ $\text{adj } A$ เท่ากับ 0

พิสูจน์

เนื่องจาก A^T เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก $n+2$ แถว เป็นลำดับพหุนามดีกรี n

โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของ $\text{adj } A^T$ เท่ากับ 0

ดังนั้นผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวของ $\text{adj } A$ เท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 1

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 14 & 21 \\ 4 & 10 & 18 & 28 \\ 3 & 9 & 19 & 33 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า A เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกแต่ละแถวเป็นลำดับพหุนามดีกรี 2 ดังนั้น $\det A = 0$

$$\text{และจะได้ว่า } \text{adj } A = \begin{bmatrix} -10 & -36 & 50 & -54 \\ 30 & 108 & -150 & 162 \\ -30 & -108 & 150 & -162 \\ 10 & 36 & -50 & 54 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเห็นว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของ $\text{adj } A$ เท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 2

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 5 & 24 \\ 9 & 4 & 7 & 8 & 21 \\ 15 & 10 & 17 & 7 & 15 \\ 23 & 19 & 32 & 14 & 6 \\ 33 & 31 & 52 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 5×5 ที่มีสมาชิกในหลักที่ 1, 2, 3 และ 5 เป็นลำดับพหุนามดีกรี 2

ดังนั้น $\det A = 0$

$$\text{และจะได้ว่า } \text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5796 & 14364 & -8316 & -3276 & 3024 \\ 3450 & -8550 & 4950 & 1950 & -1800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -46 & 114 & -66 & -26 & 24 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเห็นว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวของ $\text{adj } A$ เท่ากับ 0

เอกสารอ้างอิง

- Bahsi, M. and Solak, S. (2010). On the circulant matrices with arithmetic sequence. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences 5(25): 1213 – 1222.
- Hajrizaj, D. (2009). New Method to Compute the Determinant of a 3×3 Matrix. International Journal of Algebra 3(5): 211 – 219.
- Leon, S.J. (2015). Linear Algebra with Applications. 9th ed. Boston: Pearson.
- Mattingly, R.B. (2000). Even Order Regular Magic Squares Are Singular. The American Mathematical Monthly 107(9): 777 – 782.

- Thirumurugan, K. (2014). A New Method to Compute the Adjoint and Inverse of a 3×3 non-singular Matrices. International Journal of Mathematics and Statistics Invention 2(10): 52 – 55.
- Yandl, A.L. and Swenson, C. (2012). A Class of Matrices with Zero Determinant. Mathematics Magazine 85(2): 126 – 130.

