การหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีการประมาณแบบดับเบิลยูเคบี

Finding the Transmission Probabilities for Various Potentials Using the WKB Approximation

กุลภัทร แสนสุข[1] เพชรอาภา บุญเสริม[1,3] และไตรทศ งามปิติพันธ์[2,3*]

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพฯ 10330

[2]คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม กรุงเทพฯ 10900

[3]ศูนย์ความเป็นเลิศด้านฟิสิกส์ กระทรวงการอุดมศึกษา วิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม เขตราชเทวี กรุงเทพฯ 10400

Kunlapat Sansuk[1] Petarpa Boonserm[1,3] and Tritos Ngampitipan[2,3*]

[1]Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok 10330, Thailand

[2]Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Bangkok 10900, Thailand

[3]Thailand Center of Excellence in Physics, Ministry of Higher Education, Science, Research and Innovation, Bangkok 10400, Thailand

[*]Corresponding Author, E-mail: tritos.ngampitipan@gmail.com

Received: 23 March 2020 | Revised: 23 August 2020 | Accepted: 14 September 2020

บทคัดย่อ

กลศาสตร์ควอนตัมเป็นทฤษฎีที่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ของวัตถุที่มีขนาดระดับอะตอมหรือเล็กกว่าได้ ในขณะที่กลศาสตร์แบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายได้ สมการหลักของกลศาสตร์ควอนตัมคือสมการชเรอดิงเงอร์ ในทางคณิตศาสตร์ สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ซึ่งเป็นสมการที่อธิบายว่า ฟังก์ชันคลื่นเปลี่ยนแปลงกับเวลาอย่างไร สำหรับปัญหาส่วนใหญ่ในกลศาสตร์ควอนตัม เราไม่สามารถแก้สมการชเรอดิงเงอร์แบบแม่นตรงได้ ยกเว้นในระบบที่อุดมคติบางระบบเท่านั้น ที่สามารถหาคำตอบแบบแม่นตรงได้ ดังนั้น เราจำเป็นต้องหาวิธีการประมาณเพื่อให้ได้คำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์ ในบทความนี้ เราสนใจระบบที่อยู่ในสถานะคงตัว ซึ่งสมการชเรอดิงเงอร์จะลดรูปเป็นสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา วิธีการประมาณวิธีการหนึ่งที่สามารถใช้ได้กับระบบที่อยู่ในสถานะคงตัวคือ วิธีการประมาณแบบดับเบิลยูเคบี ในบทความนี้ เราคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีการประมาณแบบดับเบิลยูเคบี พลังงานศักย์ที่เราศึกษาในบทความนี้ได้แก่ พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสสอสมมาตร พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง และพลังงานศักย์แบบดับเบิลไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง

ABSTRACT

Quantum mechanics is a theory that can explain phenomena of atom-sized matter or smaller, which classical mechanics cannot do. The central equation of quantum mechanics is the Schrödinger equation. Mathematically, the Schrödinger equation is a second order partial differential equation which tells us how a wave function changes with time. For most problems in quantum mechanics, the Schrödinger equation cannot present exact solutions, except for a few idealized systems in which the Schrödinger equation can be solved exactly. Therefore, approximation methods are needed to find solutions to the Schrödinger equation. In this paper, systems in stationary states are of special interest, in which the Schrödinger equation is reduced to the time-independent Schrödinger equation. One of the approximation methods that work for systems in stationary states is the WKB approximation. In this paper, transmission probabilities for various potentials are calculated using the WKB approximation. The potentials studied in this paper are composed of the asymmetric square-well potential, the hyperbolic tangent potential, the squared hyperbolic secant potential, and the double squared hyperbolic secant potential.

คำสำคัญ: กลศาสตร์ควอนตัม การประมาณแบบดับเบิลยูเคบี ความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน พลังงานศักย์ สมการชเรอดิงเงอร์
Keywords: Quantum mechanics, WKB approximation, Transmission probability, Potential, Schrödinger equation

1. บทนำ

ในทางฟิสิกส์ กลศาสตร์แบบดั้งเดิม อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุขนาดใหญ่และถูกใช้อธิบายกลศาสตร์นิวตันซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแรงและโมเมนตัม ซึ่งสามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ได้ (พงษ์แก้ว, 2553) แต่เมื่อวัตถุมีขนาดเล็กหรือความเร็วสูง กลศาสตร์แบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายได้ เช่น อิเล็กตรอนในอะตอม ทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตเป็นการประมาณของทฤษฎีควอนตัมของแสงและในระดับขนาดที่เล็กมาก ๆ ที่มีระดับความเป็นอิสระมาก เมื่อมองตัวอย่างในชีวิตประจำวันกลศาสตร์ดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายในเชิงวิศวกรรมได้ คือ การทำอุโมงค์ควอนตัม (Quantum Tunneling) ภายในอุโมงค์ไดโอด ประตูทรานซิสเตอร์ (Transistor gate) ที่แคบมากในวงจรรวมและการพัฒนาเพิ่มเติมของการใช้วัตถุผสมและการย่อขนาดของ Integrated circuits ทำให้คอมพิวเตอร์ใช้พื้นที่น้อยและทำงานอย่างรวดเร็ว อันนำมาซึ่งการปฏิวัติวิถีทางของฟิสิกส์และการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนให้สามารถเป็นไปได้ (พงศ์พันธุ์, 2555) ในปี ค.ศ. 1887 ไฮน์ริช เฮิร์ตซ์ พบว่าเมื่อฉายแสงอัลตราไวโอเล็ตไปยังขั้วไฟฟ้าซึ่งอยู่ในวงจร จะมีประจุไฟฟ้าหลุดออกมา ต่อมาฮอลล์วอชส์ พบว่าเมื่อมีแสงหรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่สูงตกกระทบผิวโลหะ จะมีอิเล็กตรอนหลุดออกจากผิวโลหะนั้น ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก (photoelectric effect) ในปี ค.ศ. 1905 อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ ได้อธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกโดยได้อธิบายว่าแสงมีสมบัติเป็นอนุภาค ในปี ค.ศ. 1913 นีลส์ โบร์ ได้ทำการศึกษาการเกิดสเปกตรัมของแก๊สไฮโดรเจนและได้สร้างแบบจำลองอะตอมเพื่อใช้อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนรอบ ๆ นิวเคลียสเป็นวงคล้ายกับวงโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ แต่ละวงจะมีระดับพลังงานเฉพาะตัว (สิขรินทร์, 2558) ในปี ค.ศ. 1923 หลุยส์ เดอบรอยล์ เสนอว่าถ้าคลื่นประพฤติตัวเป็นอนุภาค แล้วอนุภาคก็สามารถประพฤติตัวเสมือนเป็นคลื่นได้เช่นเดียวกัน (ไตรทศ และเพชรอาภา, 2558) ในปี ค.ศ. 1926 เออวิน ชเรอดิงเงอร์ นักฟิสิกส์ชาวออสเตรีย ได้ค้นพบสมการชเรอดิงเงอร์ซึ่งเป็นสมการคลื่นและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ในปี ค.ศ. 1927 เวอเนอร์ ไฮเซนเบิร์ก นักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมัน เสนอหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์กนั่นคือ ความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่งและโมเมนตัม (นรา, 2553) ต่อมาชเรอดิงเงอร์ได้พิสูจน์ว่าทั้ง 2 แบบนั้นให้ผลเหมือนกัน (สิทธิชัย, 2552)

สมการชเรอดิงเงอร์แบ่งออกเป็นสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา และสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา ในบทความนี้ เราสนใจศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา และเนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการคลื่น ผลเฉลยจะ

เป็นฟังก์ชันคลื่นซึ่งสามารถอธิบายพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของคลื่นได้ Boonserm et al. (2019) ได้คำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน ในกรณีที่พลังงานรวมมากกว่าพลังงานศักย์ โดยใช้วิธีเมทริกซ์ 2x2 ในบทความนี้ จะคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านในกรณีที่พลังงานรวมน้อยกว่าพลังงานศักย์ โดยใช้วิธีการประมาณแบบดับเบิลยูเคบี

2. วิธีการประมาณแบบดับเบิลยูเคบี

วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB) ถูกค้นพบโดย Wentzel-Kramers-Brillouin ซึ่งเป็นวิธีการหาคำตอบแบบประมาณของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ วิธีการแบบดับเบิลยูเคบีสามารถคำนวณพลังงานของสถานะจำกัดขอบเขตและอัตราการทะลุผ่านกำแพงศักย์

พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+V(x)X(x)=EX(x)$$

เมื่อ $\hbar = h/2\pi$ โดยที่ h คือค่าคงที่ของพลังค์ m คือมวลของอนุภาค $V(x)$ คือพลังงานศักย์ และ E คือพลังงานรวม เราจัดรูปสมการข้างต้นใหม่จะได้ว่า

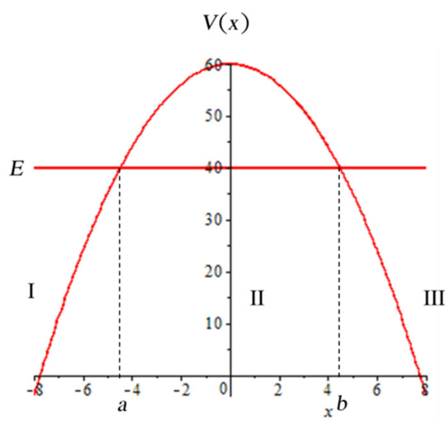
$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(x)\right]X(x) \tag{2.1}$$

ดังนั้น ผลเฉลยสามารถเขียนได้ในรูป

$$X(x)\approx\frac{U}{\sqrt{k(x)}}e^{\pm i\int k(x)dx} \tag{2.2}$$

โดยที่ U เป็นค่าคงตัว และ $k^2(x) = \left(2m/\hbar^2\right)\left[E-V(x)\right]$ (เพชรอาภา, 2556)

พิจารณาพลังงานศักย์และพลังงานรวมในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ปัญหาการขุดอุโมงค์และค่าพลังงานศักย์ในบริเวณต่าง ๆ

ในบริเวณที่ I เมื่อ $x < a$ และบริเวณที่ III เมื่อ $x > b$ พลังงานรวมมากกว่าพลังงานศักย์ $E > V(x)$ ดังนั้น $k(x)$ เป็นจำนวนจริง ในขณะที่ในบริเวณที่ II เมื่อ $a < x < b$ พลังงานรวมน้อยกว่าพลังงานศักย์ $E < V(x)$ ดังนั้น $k(x)$ เป็นจำนวนจินตภาพ จาก (2.2) ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ โดยวิธีการประมาณแบบดับเบิลยูเคบี คือ (เพชรอาภา, 2556)

$$X_{\mathrm{I}}(x)=\frac{A}{\sqrt{k(x)}}\exp\left[i\int_x^a k(x)dx\right]+\frac{B}{\sqrt{k(x)}}\exp\left[-i\int_x^a k(x)dx\right]$$

$$X_{\text{II}}(x)=\frac{C}{\sqrt{|k(x)|}}\exp\left[\int_a^x |k(x)|dx\right]+\frac{D}{\sqrt{|k(x)|}}\exp\left[-\int_a^x |k(x)|dx\right]$$

$$X_{\text{III}}(x)=\frac{F}{\sqrt{k(x)}}\exp\left[i\int_b^x k(x)dx\right]$$

เมื่อ *A*, *B*, *C*, *D* และ *F* คือค่าคงตัวไม่เจาะจง ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตคือ ฟังก์ชันคลื่นและอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นมีความต่อเนื่องที่ $x = a$ และ $x = b$ จะได้ดังนี้

$$A + B = C + D \tag{2.3}$$

$$iA - iB = -C + D \tag{2.4}$$

$$C\exp\left[\int_a^b |k(x)|dx\right]+D\exp\left[-\int_a^b |k(x)|dx\right]=F \tag{2.5}$$

$$C\exp\left[\int_a^b |k(x)|dx\right]-D\exp\left[-\int_a^b |k(x)|dx\right]=iF \tag{2.6}$$

เมื่อแก้สมการ (2.3) ถึง (2.6) จะได้ (Ngampitipan and Boonserm, 2012)

$$T=\left|\frac{F}{A}\right|^2\approx\exp\left[-2\int_a^b |k(x)|dx\right] \tag{2.7}$$

โดยสมการ (2.7) เป็นค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านที่สามารถหาได้จากวิธีการประมาณแบบดับเบิลยูเคบี ซึ่งจะนำไปใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ (เพชรอาภา, 2556)

พลังงานศักย์ที่จะศึกษาเพื่อหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ได้แก่ พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสสอสมมาตร พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง และพลังงานศักย์แบบดับเบิลไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง

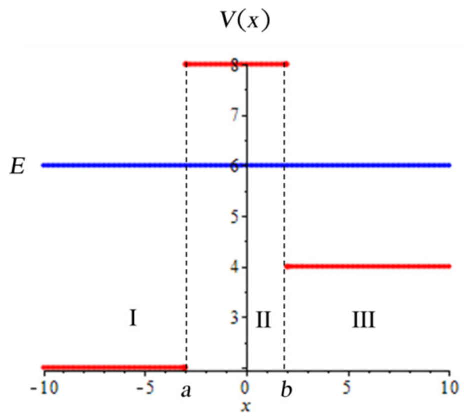
3. การหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน

3.1 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสสอสมมาตร

พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสสอสมมาตรมีรูปแบบดังนี้ (Boonserm, 2009)

$$V(x)=\begin{cases} V_1, & x<a \\ V_2, & a\le x\le b \\ V_3, & x>b \end{cases} \tag{3.1.1}$$

โดยที่ $E < V_2$ แต่ $E > V_1$ และ $E > V_3$ กราฟของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสสอสมมาตรแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร เมื่อ $V_1 = 2$, $V_2 = 8$, $V_3 = 4$, $E = 6$, $a = -3$ และ $b = 2$

ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านสำหรับกรณีพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีจาก (2.7) คือ

$$T \approx \exp\left[-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(b-a)\sqrt{V_2 - E}\right]$$

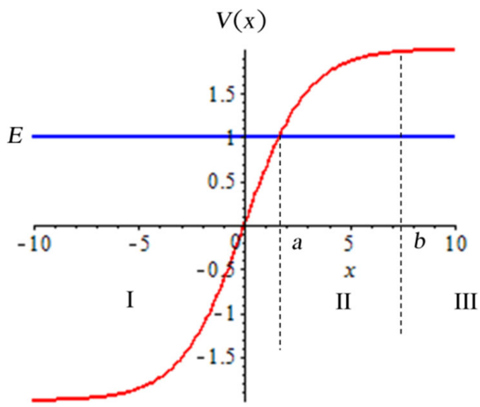
จะเห็นได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตรขึ้นกับความสูงและความกว้างของ V_2 เท่านั้น แต่ไม่ขึ้นกับความสูงของ V_1 และ V_3

3.2 พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์มีรูปแบบดังนี้ (Boonserm, 2009)

$$V(x) = V_{+\infty}\tanh(x/L) \tag{3.2.1}$$

กราฟของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์แสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เมื่อ $V_{+\infty} = 2$, $E = 1$, $L = 3$, $a = 3\text{arctanh}(0.5)$ และ $b \rightarrow \infty$ (กุลภัทร, 2562)

ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านสำหรับกรณีพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีจาก (2.7) คือ

$$T \approx \exp\left[-\frac{\sqrt{8m}}{\hbar}L\left\{\sqrt{V_{+\infty} - E}\,\text{arctanh}\left(\sqrt{\frac{V_{+\infty}\tanh(b/L) - E}{V_{+\infty} - E}}\right)\right.\right.$$

$$-\sqrt{V_{+\infty}-E}\,\text{arctanh}\left(\sqrt{\frac{V_{+\infty}\tanh(a/L)-E}{V_{+\infty}-E}}\right)$$
$$-\sqrt{V_{+\infty}+E}\,\text{arctan}\left(\sqrt{\frac{V_{+\infty}\tanh(b/L)-E}{V_{+\infty}+E}}\right)$$
$$\left.\left.+\sqrt{V_{+\infty}+E}\,\text{arctan}\left(\sqrt{\frac{V_{+\infty}\tanh(a/L)-E}{V_{+\infty}+E}}\right)\right\}\right]$$

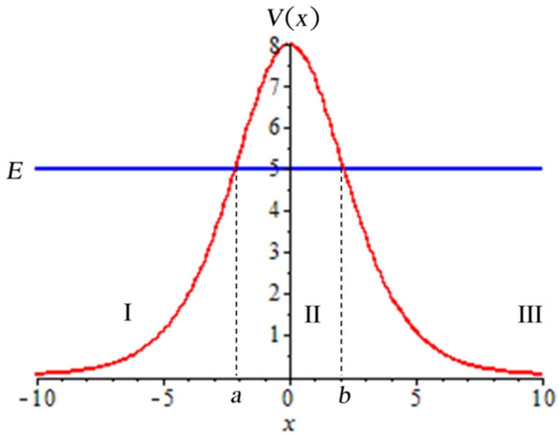
โดยที่ $a = L\text{arctanh}\left(E / V_{+\infty}\right)$

3.3 พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง

พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสองมีรูปแบบดังนี้ (Boonserm, 2009)

$$V(x) = V_e\,\text{sech}^2(x/L) \tag{3.3.1}$$

กราฟของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสองแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง เมื่อ V_e = 8, E = 5, L = 3, $a = -3\text{arcsech}\sqrt{5/8}$ และ $b = 3\text{arcsech}\sqrt{5/8}$ (กุลภัทร, 2562)

ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีจาก (2.7) คือ

$$T \approx \exp\left[-\frac{4}{\hbar}L\sqrt{2mV_e}F(b)\right] \tag{3.3.2}$$

โดยที่ $b = L\text{arcsech}\sqrt{E/V_e}$ และ

$$F(b) = -\text{arcsin}\left(\sqrt{\frac{V_e\,\text{sech}^2(b/L)-E}{V_e-E}}\right)$$

$$+\sqrt{\frac{E}{V_e}}\arctan\left[\sqrt{\frac{V_e}{E}}\left\{\frac{\left(V_e+E\right)\tanh(b/L)\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{V_e+E-2V_e\,\mathrm{sech}^2(b/L)} \right.\right. \quad (3.3.3)$$

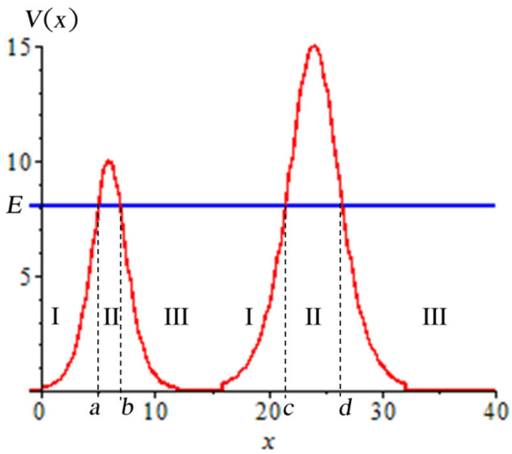
$$\left.\left. -\frac{\left(V_e-E\right)\mathrm{sech}^2(b/L)}{V_e+E-2V_e\,\mathrm{sech}^2(b/L)}\right\}\right]$$

3.4 พลังงานศักย์แบบดับเบิลไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง

พลังงานศักย์แบบดับเบิลไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสองมีรูปแบบดังนี้

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ V_1\,\mathrm{sech}^2[(x-A)/e_1], & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2<x<L_3\\ V_2\,\mathrm{sech}^2[(x-B)/e_2], & L_3\le x\le L_4\\ 0, & x>L_4\end{cases} \qquad (3.4.1)$$

กราฟของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสองแสดงในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 พลังงานศักย์แบบดับเบิลไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง เมื่อ L_1 = 0, L_2 = 12, L_3 = 15, L_4 = 32, V_1 = 10, V_2 = 15, A = 6, B = 24, e_1 = 2 และ e_2 = 3

ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี จาก (2.7) คือ

$$T\approx\exp\left[-\frac{4}{\hbar}\sqrt{2m}\left\{e_1\sqrt{V_1}G(b)+e_2\sqrt{V_2}H(d)\right\}\right]$$

โดยที่ $b = e_1\mathrm{arcsech}\sqrt{E/V_1}$, $d = e_2\mathrm{arcsech}\sqrt{E/V_2}$,

$$G(x) = -\arcsin\left(\sqrt{\frac{V_1\,\mathrm{sech}^2\left[x-(L_1+L_2)/2\right]-E}{V_1-E}}\right)+\sqrt{\frac{E}{V_1}}\arctan\left[\sqrt{\frac{V_1}{E}}A(x)\right]$$

$$A(x) = \frac{\left(V_1 + E\right)\tanh\left[x - (L_1 + L_2)/2\right]\sqrt{\operatorname{sech}^2\left[x - (L_1 + L_2)/2\right] - E/V_1}}{V_1 + E - 2V_1 \operatorname{sech}^2\left[x - (L_1 + L_2)/2\right]} - \frac{\left(V_1 - E\right)\operatorname{sech}^2\left[x - (L_1 + L_2)/2\right]}{V_1 + E - 2V_1 \operatorname{sech}^2\left[x - (L_1 + L_2)/2\right]}$$

เมื่อ $x > (L_1 + L_2)/2$ และ

$$H(x) = -\arcsin\left(\sqrt{\frac{V_2 \operatorname{sech}^2\left[x - (L_3 + L_4)/2\right] - E}{V_2 - E}}\right) + \sqrt{\frac{E}{V_2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{V_2}{E}}B(x)\right]$$

$$B(x) = \frac{\left(V_2 + E\right)\tanh\left[x - (L_3 + L_4)/2\right]\sqrt{\operatorname{sech}^2\left[x - (L_3 + L_4)/2\right] - E/V_2}}{V_2 + E - 2V_2 \operatorname{sech}^2\left[x - (L_3 + L_4)/2\right]} - \frac{\left(V_2 - E\right)\operatorname{sech}^2\left[x - (L_3 + L_4)/2\right]}{V_2 + E - 2V_2 \operatorname{sech}^2\left[x - (L_3 + L_4)/2\right]}$$

เมื่อ $x > (L_3 + L_4)/2$

จากการศึกษาหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี กรณีที่พลังงานรวมของระบบมีค่ามากกว่าพลังงานศักย์ ($E > V$) จะไม่นำมาพิจารณา เนื่องจากสมการที่ใช้คำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี พลังงานศักย์ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับพลังงานรวมของระบบ [$V(x) - E \geq 0$] ซึ่งเป็นปัญหาการขุดอุโมงค์ นอกจากนี้ เรายังสามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีของพลังงานศักย์แบบผสมได้ ซึ่งได้แก่ พลังงานศักย์แบบดับเบิลไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง

4. บทสรุป

พลังงานศักย์แบบต่าง ๆ ที่ศึกษานั้นสามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีได้ทั้งหมด ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีเหมาะกับระบบที่พลังงานศักย์มีค่ามากกว่าพลังงานรวมในบางตำแหน่ง และเป็นวิธีการสำคัญในการหาคำตอบแบบประมาณ

กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยขอขอบคุณโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) กองทุนรัชดาภิเษกสมโภชจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (Sci-Super 2014-032) และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา (สกอ.) และจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (RSA5980038) ที่ให้ทุนสนับสนุนการทำวิจัยจนทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

กุลภัทร แสนสุข. (2562). วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ. วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. กรุงเทพฯ. 153 หน้า.

ไตรทศ งามปิติพันธ์ และเพชรอาภา บุญเสริม. (2558). การหาขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านในปัญหาการกระเจิงทางควอนตัมใน 1 มิติ. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 43(4): 595-608.

นรา จิรภัทรพิมล. (2553). กลศาสตร์ควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: แอคทีฟ พริ้นท์ จำกัด.

พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ. (2553). ทฤษฎีควอนตัมพื้นฐาน. แหล่งข้อมูล: http://facstaff.swu.ac.th/pongkaew/book-quatum-5-1-53.pdf. ค้นเมื่อวันที่ 15 กรกฎาคม 2561

พงศ์พันธุ์ เชาวลิต. (2555). ประวัติของฟิสิกส์. แหล่งข้อมูล: https://sites.google.com/site/physicsforgu/home.

พรชัย สาตรวาหา. (2550). สมการเชิงอนุพันธ์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

เพชรอาภา บุญเสริม. (2556). วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 41(1): 101-111.

สิขรินทร์ อยู่คง. (2558). แมวของชเรอดิงเงอร์. แหล่งข้อมูล: https://medium.com/@sikarinyookong/แมวของชเรอดิงเงอร์ -schrödinger-s-cat-6fe3671e341e. ค้นเมื่อวันที่ 21 มิถุนายน 2558.

สิทธิชัย โภไคยอุดม. (2552). กลศาสตร์ควอนตัมพื้นฐาน. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร.

Boonserm, P. (2009). Rigorous Bounds on Transmission, Reflection, and Bogoliubov Coefficients. Ph. D. Thesis, Victoria University of Wellington. Wellington. 347 pages.

Ngampitipan, T. and Boonserm, P. (2012). Reflection and transmission resonances and accuracy of the WKB method, In: The 2nd Regional Conference on Applied and Engineering Mathematics, Universiti Malaysia Perlis 30-31 May 2012. Institut Matematik Kejuruteraan, Universiti Malaysia Perlis, Malaysia. 116-123.

Boonserm, P., Ngampitipan, T. and Sansuk, K. (2019). Reflection and transmission coefficients from the superposition of various potentials. Journal of Physics: Conference Series 1366: 012035.

❑❑❑❑❑