การใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรบางรูปแบบ

Using Undetermined Coefficients to Solve Some Classes of Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients

กฤษฎา สิริเพ็ญโสภา[1] และ คำสิงห์ นนเลาพล[1*]

[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น อ.เมือง จ.ขอนแก่น 40002

Kridsada siripensopa[1] and Kamsing Nonlaopon[1*]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Science, Khon Kaen University, Muang, Khon Kaen 40002, Thailand

[*]Corresponding Author, E-mail: nkamsi@kku.ac.th

Received: 1 July 2020 | Revised: 24 August 2020 | Accepted: 14 September 2020

บทคัดย่อ

โดยทั่วไปวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสูงที่ได้นำเสนอในหนังสือสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ส่วนมากมีอยู่ 2 วิธีด้วยกัน วิธีแรกคือวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ ซึ่งจะใช้สำหรับสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แต่วิธีนี้ใช้ได้กับบางรูปแบบของฟังก์ชันด้านขวามือของสมการเท่านั้น วิธีที่สองคือวิธีการแปรผันตัวแปร สำหรับวิธีนี้ใช้ได้ไม่จำกัดรูปแบบของฟังก์ชันด้านขวามือของสมการ และสามารถใช้หาผลเฉลยเฉพาะสำหรับสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรได้ด้วย ซึ่งถือว่าวิธีนี้ใช้งานได้หลากหลายกว่าวิธีแรก แต่ก็ต้องใช้เวลาและกระบวนการในการหาผลเฉลยที่มากกว่า ในบทความนี้จะนำเสนอการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

ABSTRACT

In most undergraduate differential equations textbooks, there are two methods of finding a particular solution for higher-order nonhomogeneous ordinary differential equations that be introduced. The first one is the method of undetermined coefficients. This method can be used to solving differential equations with constant coefficients but it is limited to cases of a right-hand side function. The second one is the method of variation of parameters, which is not limited to cases of a right-hand side function, nor is it limited to differential equations with constant coefficients but it takes longer time and has more processes than the first one. In this paper, we introduce the method of undetermined coefficients to solve some classes of ordinary differential equations with variable coefficients.

คำสำคัญ: สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร สมการออยเลอร์-โคชี วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ วิธีการแปรผันตัวแปร
Keywords: Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients, Euler-Cauchy Equations,
Method of Undetermined Coefficients, Method of Variation of Parameters

บทนำ

การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสูงที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่ได้นำเสนอในช่วงแรก ๆ ของการศึกษาก็คือ การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชี ซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)}(t) = g(t) \tag{1}$$

โดยที่ $a_i, i = 0,1,\ldots,n$ เป็นค่าคงตัว และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t ซึ่งสมการ (1) สามารถแปลงเป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้ สิ่งนี้สื่อถึงการที่อาจจะสามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้หากฟังก์ชัน $g(t)$ ของสมการ (1) หลังการแปลงเป็นฟังก์ชันที่สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้ และนอกเหนือไปจากสมการออยเลอร์-โคชีแล้ว ยังมีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสูงที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรอื่นอีกที่สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้ แต่ก็ไม่ใช่ทุกรูปแบบที่จะใช้วิธีดังกล่าวได้

ในบทความนี้จะนำเสนอการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชี และสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่นอกเหนือไปจากสมการออยเลอร์-โคชีด้วยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้ โดยเริ่มจากสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับสองซึ่ง $g(t) = At^m$ โดยที่ $A, m \in \mathbb{R}$ นอกจากนี้จะนำเสนอการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับ n โดยที่ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันเอกนามและฟังก์ชันพหุนาม ตามลำดับ ซึ่งกรณีที่ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันเอกนาม (และฟังก์ชันพหุนาม) ก็เป็นเพียงกรณีเฉพาะของฟังก์ชัน At^m ที่ได้ถูกนำเสนอก่อนหน้า และในกรณีนี้ได้มีการพบความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเอกนาม (และฟังก์ชันพหุนาม) กับสัมประสิทธิ์ของผลเฉลยเฉพาะในรูปปิดที่เรียบง่าย หลังจากนั้นก็จะนำเสนอสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับสองซึ่ง $g(t)$ เป็นฟังก์ชันอื่นที่สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้

ในตอนท้ายจะนำเสนอการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่นอกเหนือจากสมการออยเลอร์-โคชีด้วยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ โดยเริ่มต้นจากสมการที่อยู่ในรูป

$$(A_2t^2 + A_1t + A_0)y''(t) + (B_1t + B_0)y'(t) + C_0y(t) = At^m \tag{2}$$

โดยที่ $A, A_2, A_1, A_0, B_1, B_0, C_0 \in \mathbb{R}$ และ $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ นั่นคือด้านขวามือของสมการ (2) เป็นฟังก์ชันเอกนาม จากนั้นจะศึกษาสมการที่อยู่ในรูป

$$(A_1t + A_0)y''(t) + (B_1t + B_0)y'(t) + (C_1t + C_0)y(t) = At^m e^{at} \tag{3}$$

โดยที่ $A, A_1, A_0, B_1, B_0, C_1, C_0, a \in \mathbb{R}$ และ $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ นั่นคือด้านขวามือของสมการ (3) เป็นผลคูณของฟังก์ชันเอกนามและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ไม่เพียงเท่านั้น ยังสามารถใช้หลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ในการขยายขอบเขตของสมการ (2) และสมการ (3) ได้ด้วย

สมการออยเลอร์-โคชี

พิจารณาสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับสอง ซึ่งอยู่ในรูป

$$a_2t^2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1t\frac{dy}{dt} + a_0y = g(t) \tag{4}$$

โดยที่ a_0, a_1, a_2 เป็นค่าคงตัว และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t ซึ่งหากแทนค่า $t = e^z$ ลงในสมการ (4) และเปลี่ยนจากอนุพันธ์ของตัวแปร y เทียบกับตัวแปร t เป็นอนุพันธ์ของตัวแปร y เทียบกับตัวแปร z จะได้ว่า

$$a_2 \frac{d^2 y}{dz^2} + (a_1 - a_2)\frac{dy}{dz} + a_0 y = g(e^z) \tag{5}$$

ซึ่งเป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ส่วนด้านขวามือของสมการก็เป็นฟังก์ชันของตัวแปร z ที่ถูกแทน t ด้วย e^z ซึ่งหากอยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ หรือผลคูณและผลบวกของฟังก์ชันเหล่านี้ ก็จะสามารถหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (5) ด้วยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ได้ และเมื่อแทนค่า $z = \ln t$ ลงในรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะที่ได้มาจากสมการ (5) ก็จะได้รูปแบบของผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4) นั่นหมายความว่า สมการ (4) สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้

ทฤษฎีบท 1. สำหรับสมการออยเลอร์-โคชี ไม่เอกพันธุ์อันดับสอง ที่อยู่ในรูป

$$a_2 t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 t \frac{dy}{dt} + a_0 y = At^m \tag{6}$$

โดยที่ $A, m \in \mathbb{R}$ และ $t \in (0, \infty)$ จะมีผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$ อยู่ในรูป

1) $y_p(t) = Ct^m$ เมื่อ m ไม่เป็นรากของสมการช่วยของสมการ (6)
2) $y_p(t) = Ct^m (\ln t)^r$ เมื่อ m เป็นรากของสมการช่วย ซึ่ง r คือ จำนวนของราก m ในสมการช่วยของสมการ (6)

ตัวอย่าง 2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีที่อยู่ในรูป

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 10t \frac{dy}{dt} + 8y = t^2 \tag{7}$$

วิธีทำ พิจารณาหาสมการช่วยของสมการ (7) โดยการแทนค่า $y = t^\lambda$ ลงในสมการเอกพันธุ์ของสมการ (7) จะได้ว่า

$$(\lambda - 1)\lambda + 10\lambda + 8 = (\lambda + 1)(\lambda + 8) = 0 \tag{8}$$

เนื่องจาก 2 ไม่เป็นรากของสมการช่วย (8) จึงได้ว่าสมการ (7) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = Ct^2$ ซึ่งเมื่อแทนค่าลงในสมการ (7) จะได้ว่า

$$2C + 20C + 8C = 1$$

นั่นคือ $C = \frac{1}{30}$ ดังนั้น $y_p(t) = \frac{1}{30}t^2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (7) □

ตัวอย่าง 3. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีที่อยู่ในรูป

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + y = 2t \tag{9}$$

วิธีทำ พิจารณาหาสมการช่วยของสมการ (9) โดยการแทนค่า $y = t^\lambda$ ลงในสมการเอกพันธุ์ของสมการ (9) จะได้ว่า

$$(\lambda - 1)\lambda - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \tag{10}$$

เนื่องจาก 1 เป็นรากของสมการช่วย (10) และ $r = 2$ จึงได้ว่าสมการ (9) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = Ct(\ln t)^2$ ซึ่งเมื่อแทนค่าลงในสมการ (9) จะได้ว่า $C = 1$ ดังนั้น $y_p(t) = t(\ln t)^2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (9) □

ต่อไปพิจารณาสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับ n ที่มีด้านขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันเอกนาม ซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)}(t) = At^m \tag{11}$$

ซึ่งสมการ (11) จะมีสมการช่วยที่ได้จากการแทนค่า $y = t^{\lambda}$ ลงในสมการเอกพันธุ์ของสมการ (11) อยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{n} a_i P(\lambda, i) = 0 \tag{12}$$

โดยที่ $P(\lambda, i)$ คือ การเรียงสับเปลี่ยนทั่วไป ซึ่งหาก m ไม่ได้เป็นรากของสมการช่วย (12) สมการ (11) ก็อาจจะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = Ct^m$ และหาก m เป็นรากของสมการช่วย (12) สมการ (11) ก็อาจจะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = Ct^m (\ln t)^r$ โดยที่ r คือ จำนวนของราก m ในสมการช่วย ซึ่งหากสังเกตผลเฉลยเฉพาะที่อยู่ในรูป $y_p(t) = Ct^m$ จะพบว่าสามารถหาได้จากผลเฉลยเฉพาะที่อยู่ในรูป $y_p(t) = Ct^m (\ln t)^r$ เมื่อ $r = 0$ นั่นหมายความว่า ไม่มี m เป็นรากในสมการช่วย

หากทดลองแทนค่า $y_p(t) = Ct^m (\ln t)^r$ ลงในสมการ (11) และสังเกตจะพบรูปแบบของการหาอนุพันธ์ของผลเฉลยเฉพาะที่ถูกแทนลงในสมการ (11) ที่แน่นอน ไม่เพียงเท่านี้เราจะพบความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ C และ A ที่อยู่ในรูปปิด ซึ่งสิ่งนี้ก็หมายถึงการขยายขอบเขตของทฤษฎีบท 1 ให้ครอบคลุมไปถึงสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับ n ที่มีด้านขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันเอกนาม ซึ่งฟังก์ชันเอกนามเป็นเพียงกรณีเฉพาะของฟังก์ชัน At^m ในทฤษฎีบท 1

ทฤษฎีบท 4. สำหรับสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับ n ที่มีด้านขวาของสมการเป็นฟังก์ชันเอกนาม ซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)}(t) = At^m \tag{13}$$

โดยที่ $t \in (0, \infty)$ จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = Ct^m (\ln t)^r$ โดยที่ r คือ จำนวนของราก m ในสมการช่วย และสัมประสิทธิ์ในผลเฉลยเฉพาะ C สามารถหาได้จาก

$$C = \frac{A}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^{(r)}(m, i)}$$

โดยที่ $P^{(r)}(m, i)$ คืออนุพันธ์อันดับ r ของการเรียงสับเปลี่ยนทั่วไป $P(\lambda, i)$ เมื่อ $\lambda = m$

เพื่อความสะดวก จะนิยามให้

$$Q(\lambda) := \sum_{i=0}^{n} a_i P(\lambda, i)$$

ซึ่งจะพบว่า $Q^{(r)}(m) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(r)}(m, i)$ และทำให้รูปปิดของการหาสัมประสิทธิ์ในผลเฉลยเฉพาะ C ในทฤษฎีบท 4 สามารถเขียนได้อีกแบบว่า $C = \dfrac{A}{Q^{(r)}(m)}$

ตัวอย่าง 5. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีในตัวอย่าง 3 โดยใช้ทฤษฎีบท 4

วิธีทำ พิจารณาหาสมการช่วยของสมการ (9) จากสมการ (12) จะได้ว่า

$$Q(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \tag{14}$$

เนื่องจาก 1 เป็นรากของสมการช่วย (14) และ $r = 2$ จึงได้ว่าสมการ (9) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = Ct(\ln t)^2$ และหาสัมประสิทธิ์ในผลเฉลยเฉพาะได้ว่า

$$C = \frac{2}{Q^{(2)}(1)} = \frac{2}{(2)(1)} = 1$$

ดังนั้น $y_p(t) = t(\ln t)^2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (9) □

ตัวอย่าง 6. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีที่อยู่ในรูป

$$t^3\frac{d^3y}{dt^3}-t^2\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}+6y=t^2 \tag{15}$$

วิธีทำ พิจารณาหาสมการช่วยของสมการ (15) จากสมการ (12) จะได้ว่า

$$Q(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda-(\lambda-1)\lambda-2\lambda+6=\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6=0 \tag{16}$$

เนื่องจาก 2 เป็นรากของสมการช่วย (16) และ $r=1$ จึงได้ว่าสมการ (15) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t)=Ct^2(\ln t)$ และหาสัมประสิทธิ์ในผลเฉลยเฉพาะได้ว่า

$$C=\frac{1}{Q^{(1)}(2)}=\frac{1}{3(2)^2-8(2)+1}=-\frac{1}{3}$$

ดังนั้น $y_p(t)=-\frac{1}{3}t^2(\ln t)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (15) □

ไม่เพียงเท่านี้ ทฤษฎีบท 4 ยังสามารถขยายให้ครอบคลุมถึงกรณีที่ด้านขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันพหุนามได้ โดยอาศัยหลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์

ทฤษฎีบท 7. สำหรับสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับ n ที่มีด้านขวาของสมการเป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{n}a_it^iy^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}A_jt^j \tag{17}$$

โดยที่ $t\in(0,\infty)$ จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t)=\sum_{j=0}^{m}C_jt^j(\ln t)^{r_j}$ โดยที่ r_j คือ จำนวนของราก j ในสมการช่วย และสัมประสิทธิ์ในผลเฉลยเฉพาะ C_j สามารถหาได้จาก

$$C_j=\frac{A_j}{Q^{(r_j)}(j)}$$

ตัวอย่าง 8. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีที่อยู่ในรูป

$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2}+5t\frac{dy}{dt}+y=t^2-t \tag{18}$$

วิธีทำ พิจารณาหาสมการช่วยของสมการ (18) จากสมการ (12) จะได้ว่า

$$Q(\lambda)=2(\lambda-1)\lambda+5\lambda+1=2\lambda^2+3\lambda+1=0 \tag{19}$$

เนื่องจาก 1 และ 2 ไม่เป็นรากของสมการช่วย (19) จะได้ว่า $r_1=0$ และ $r_2=0$ ทำให้ได้ว่าสมการ (18) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t)=C_2t^2(\ln t)^0+C_1t(\ln t)^0$ และหาสัมประสิทธิ์ในผลเฉลยเฉพาะได้ว่า

$$C_2=\frac{1}{Q(2)}=\frac{1}{2(2)^2+3(2)+1}=\frac{1}{15}$$

$$C_1=-\frac{1}{Q(1)}=-\frac{1}{2(1)^2+3(1)+1}=-\frac{1}{6}$$

ดังนั้น $y_p(t)=\frac{1}{15}t^2-\frac{1}{6}t$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (18) □

ตัวอย่าง 9. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีที่อยู่ในรูป

$$t^3y'''(t)+2t^2y''(t)-4ty'(t)+4y(t)=5-t+t^2 \tag{20}$$

วิธีทำ พิจารณาหาสมการช่วยของสมการ (20) จากสมการ (12) จะได้ว่า

$$Q(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda+2(\lambda-1)\lambda-4\lambda+4=\lambda^3-\lambda^2-4\lambda+4=0 \tag{21}$$

เนื่องจาก 1 และ 2 เป็นรากของสมการช่วย (21) และ $r_1=1, r_2=1$ แต่ 0 ไม่เป็นรากของสมการช่วย (21) จะได้ว่า $r_0=0$ ทำให้ได้ว่าสมการ (20) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p=C_2t^2(\ln t)^1+C_1t^1(\ln t)^1+C_0t^0(\ln t)^0$ และหาสัมประสิทธิ์ของผลเฉลยเฉพาะได้ว่า

$$C_2=\frac{1}{Q^{(1)}(2)}=\frac{1}{3(2)^2-2(2)-4}=\frac{1}{4}$$

$$C_1=-\frac{1}{Q^{(1)}(1)}=-\frac{1}{3(1)^2-2(1)-4}=\frac{1}{3}$$

$$C_0=\frac{5}{Q(0)}=\frac{5}{(0)^3-(0)^2-4(0)+4}=\frac{5}{4}$$

ดังนั้น $y_p(t)=\frac{1}{4}t^2\ln t+\frac{1}{3}t\ln t+\frac{5}{4}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (20) □

หากลองพิจารณาทฤษฎีบท 4 อีกครั้ง แต่ในครั้งนี้ไม่ได้จำกัดรูปแบบของฟังก์ชันด้านขวามือของสมการให้เป็นเพียงแค่ฟังก์ชันเอกนาม แต่เป็นฟังก์ชันในรูปแบบเดียวกันกับทฤษฎีบท 1 จะพบว่าอาจจะสามารถหาผลเฉลยเฉพาะด้วยหลักการในทฤษฎีบท 4 ได้ แต่ก็อาจจะไม่สามารถอ้างได้ว่า $P(\lambda,i)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนทั่วไป ซึ่งเป็นเพียงแค่รูปแบบที่แน่นอนที่คล้ายคลึงกันเท่านั้น เนื่องจาก m มีโอกาสเป็นจำนวนประเภทอื่นที่นอกเหนือไปจากจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ไม่เพียงเท่านี้ หากข้อสันนิษฐานนี้เป็นจริง ก็จะสามารถใช้หลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการที่มีด้านขวามือเป็นผลบวกของฟังก์ชันในรูปแบบเดียวกันกับทฤษฎีบท 1 ได้ด้วย นั่นหมายความว่าอาจจะสามารถใช้หลักการในทฤษฎีบท 5 ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการที่มีด้านขวามือเป็นผลบวกของฟังก์ชันในรูปแบบเดียวกันกับทฤษฎีบท 1 ได้นั่นเอง

ตัวอย่าง 10. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีที่อยู่ในรูป

$$t^3\frac{d^3y}{dt^3}+2t^2\frac{d^2y}{dt^2}-8t\frac{dy}{dt}+12y=t^{-4} \tag{22}$$

วิธีทำ พิจารณาหาสมการช่วยของสมการ (22) จากสมการ (12) จะได้ว่า

$$Q(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda+2(\lambda-1)\lambda-8\lambda+12=\lambda^3-\lambda^2-8\lambda+12=0 \tag{23}$$

เนื่องจาก -4 ไม่ใช่รากของสมการช่วย (23) จะได้ว่า $r=0$ ทำให้ได้ว่าสมการ (22) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t)=Ct^{-4}(\ln t)^0$ และหาสัมประสิทธิ์ในผลเฉลยเฉพาะได้ว่า

$$C=\frac{1}{Q(-4)}=\frac{1}{(-4)^3-(-4)^2-8(-4)+12}=\frac{1}{-36}$$

ดังนั้น $y_p(t)=-\frac{1}{36}t^{-4}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (22) □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงว่ามีฟังก์ชัน $g(t)$ ในสมการ (4) ในรูปแบบอื่นอีกที่สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้

ทฤษฎีบท 11. สำหรับสมการออยเลอร์-โคชี ไม่เอกพันธุ์อันดับสองที่อยู่ในรูป

$$a_2t^2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1t\frac{dy}{dt}+a_0y=At^m(\ln t)^n \tag{24}$$

โดยที่ $A, m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และ $t \in (0, \infty)$ จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p(t) = \left(C_0 + C_1 \ln t + \cdots + C_n (\ln t)^n \right) t^m$$

เมื่อ $t^m (\ln t)^i$ (สำหรับ $i = 0, 1, \ldots, n$) ไม่สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็ม

ในวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ หากเกิดกรณีที่รูปแบบของผลเฉลยเฉพาะสามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็ม จะแก้ปัญหานี้ด้วยการคูณตัวแปรต้น (ซึ่งในบทความนี้คือ z) เข้าในผลเฉลยเฉพาะดังกล่าวจนกว่ารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะจะไม่สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็ม ซึ่งสำหรับทฤษฎีบท 11 ถ้า $0 \le r \le n$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่ง $t^m \left(\ln t \right)^r$ สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (24) ก็จะสามารถแก้ปัญหานี้ได้ด้วยการคูณ $\left(\ln t \right)^{r+1}$ เข้าในรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะดังกล่าว ทำให้ได้รูปแบบผลเฉลยเฉพาะใหม่ คือ

$$y_p(t) = \left(C_0 + C_1 \ln t + \cdots + C_n (\ln t)^n \right) \left(\ln t \right)^{r+1} t^m$$

ตัวอย่าง 12. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการออยเลอร์-โคชีที่อยู่ในรูป

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 3y = -48t^3 (\ln t)^2 \qquad (25)$$

วิธีทำ เนื่องจาก $t^3 \left(\ln t \right)^2$ ไม่สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (25) จึงได้ว่าสมการ (25) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = \left(C_0 + C_1 \ln t + C_2 (\ln t)^2 \right) t^3$ และเมื่อแทน y_p ลงในสมการ (25) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 12C_0 + 6C_1 + 2C_2 &= 0 \\ 12C_1 + 12C_2 &= 0 \\ 12C_2 &= -48 \end{aligned}$$

นั่นคือ $C_2 = -4, C_1 = 4$ และ $C_0 = -\frac{4}{3}$

ดังนั้น $y_p(t) = -\frac{4}{3} t^3 + 4t^3 \ln t - 4t^3 (\ln t)^2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (25) □

ในความจริงแล้ว ยังมีฟังก์ชัน $g(t)$ ในสมการ (4) อื่นอีกที่สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้ เช่น $A\cos(k \ln t), A\sin(k \ln t), At^m \cos(k \ln t), At^m \sin(k \ln t), At^m (\ln t)^n \cos(k \ln t)$ และ $At^m (\ln t)^n \sin(k \ln t)$ เพราะเมื่อแทน $t = e^z$ ลงในฟังก์ชันเหล่านี้แล้วจะทำให้ฟังก์ชันอยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้ และหลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ก็สามารถใช้ได้กับผลบวกของฟังก์ชันเหล่านี้

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่ไม่ใช่สมการออยเลอร์-โคชี

จากที่ได้กล่าวไว้ในบทนำ ต่อไปจะนำเสนอสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่นอกเหนือไปจากสมการออยเลอร์-โคชีที่สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการได้

ทฤษฎีบท 13. สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรและมีด้านขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันเอกนาม ซึ่งอยู่ในรูป

$$(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) y''(t) + (B_1 t + B_0) y'(t) + C_0 y(t) = At^m \qquad (26)$$

โดยที่ $A_2, A_1, A_0, B_1, B_0, C_0 \in \mathbb{R}$ หาก t^i (สำหรับ $i = 0, 1, \ldots, m$) ไม่สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (26) แล้วจะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ c_j สำหรับ $j = 0, 1, \ldots, m$ หาได้จาก

1) $c_m = \dfrac{A}{m(m-1)A_2 + mB_1 + C_0}$

2) $c_{m-1} = -\dfrac{m\left((m-1)A_1 + B_0\right)A}{\left((m-1)(m-2)A_2 + (m-1)B_1 + C_0\right)\left(m(m-1)A_2 + mB_1 + C_0\right)}$

3) $c_j = -\dfrac{(j+1)(jA_1 + B_0)c_{j+1} + (j+2)(j+1)A_0 c_{j+2}}{j(j-1)A_2 + jB_1 + C_0}$

สำหรับ $j = m-2, m-3, \ldots, 0$

สำหรับทฤษฎีบท 13 สามารถพิสูจน์ได้ด้วยการแทนค่า $y_p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m$ ลงในสมการ (26) ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นขึ้นมา และเมื่อนำเมทริกซ์มาแทนระบบสมการดังกล่าวจะนำมาซึ่งเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมเป็น $j(j-1)A_2 + jB_1 + C_0$ โดยที่ $j = 0,1,\ldots,m$ ดังนั้นการยืนยันให้ได้ว่าระบบสมการดังกล่าวมีเพียงหนึ่งคำตอบคือการที่ $j(j-1)A_2 + jB_1 + C_0 \neq 0$ ทุก $j = 0,1,\ldots,m$ ซึ่งได้มีการอ้างว่าหมายถึงการที่ t^i สำหรับ $i = 0,1,\ldots,m$ ไม่สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (26) และหลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ก็สามารถใช้ได้ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในรูป

$$(A_2 t^2 + A_1 t + A_0)y''(t) + (B_1 t + B_0)y'(t) + C_0 y(t) = p_m(t) \tag{27}$$

โดยที่ $p_m(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งสมการ (27) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m$$

และสัมประสิทธิ์ c_j สำหรับ $j = 0,1,\ldots,m$ สามารถหาได้จาก

1) $c_m = \dfrac{a_m}{m(m-1)A_2 + mB_1 + C_0}$

2) $c_{m-1} = \dfrac{a_{m-1} - m\left((m-1)A_1 + B_0\right)c_m}{(m-1)(m-2)A_2 + (m-1)B_1 + C_0}$

3) $c_j = \dfrac{a_j - (j+1)(jA_1 + B_0)c_{j+1} - (j+2)(j+1)A_0 c_{j+2}}{j(j-1)A_2 + jB_1 + C_0}$

สำหรับ $j = m-2, m-3, \ldots, 0$

ตัวอย่าง 14. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(2t^2 + 2t + 1)y''(t) + (3t+1)y'(t) + 5y(t) = 2t^2 \tag{28}$$

วิธีทำ สามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า $1,\ t$ และ t^2 ไม่สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (28) จึงได้ว่าสมการ (28) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ และหาสัมประสิทธิ์ในผลเฉลยเฉพาะได้ว่า

$$c_2 = \frac{2}{(2)(1)(2) + (2)(3) + 5} = \frac{2}{15}$$

$$c_1 = -\frac{(2)\left((1)(2) + 2\right)(2)}{\left(0 + (1)(3) + 5\right)(15)} = -\frac{1}{10}$$

$$c_0 = -\frac{(1)(0+1)\left(-\dfrac{1}{10}\right) + (2)(-1)\left(\dfrac{2}{15}\right)}{0 + 0 + 5} = -\frac{1}{30}$$

ดังนั้น $y_p(t) = -\dfrac{1}{30} - \dfrac{1}{10}t + \dfrac{2}{15}t^2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (28) □

เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 11 ทฤษฎีบท 13 ก็มีโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ที่มี $0 \le r \le m$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่ง t^r สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็ม

ทฤษฎีบท 15. สำหรับสมการ (26) ถ้า $0 \le r \le m$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่ง t^r สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (26) แล้วผลเฉลยเฉพาะของสมการ (26) จะอยู่ในรูป

$$y_p(t) = \left(c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m\right) t^{r+1}$$

โดยมีเงื่อนไขว่า

1) $A_0 = 0$
2) $(r+m+1)(r+m)A_2 + (r+m+1)B_1 + C_0 = 0$
3) $(r+i)A_1 + B_0 \ne 0$

สำหรับ $i = 0,1,\ldots,m$

สำหรับทฤษฎีบท 15 มีการพิสูจน์ที่คล้ายคลึงกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 13 และหลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ก็สามารถใช้ได้ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในรูป

$$(A_2t^2 + A_1t + A_0)y''(t) + (B_1t + B_0)y'(t) + C_0y(t) = a_mt^m + a_{m+1}t^{m+1} + \cdots + a_pt^p \tag{29}$$

ตัวอย่าง 16. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(3t - t^2)y''(t) + 5ty'(t) - 5y(t) = 6t^3 \tag{30}$$

วิธีทำ จากการตรวจสอบฟังก์ชัน $1, t, t^2$ และ t^3 จะพบว่า t สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (30) และเนื่องจากสมการ (30) สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบท 15 จึงได้ว่าสมการ (30) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t) = \left(c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3\right)t^2$ และเมื่อแทน $y_p(t)$ ลงในสมการ (30) จะได้ว่า $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{6}$ และ $c_3 = -\frac{1}{120}$ ดังนั้น $y_p(t) = \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{120}t^5$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (30) □

ยังมีสมการในรูปแบบอื่นอีกที่สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้

ทฤษฎีบท 17. สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรและด้านขวามือของสมการเป็นผลคูณของฟังก์ชันเลขชี้กำลังกับฟังก์ชันเอกนาม ซึ่งอยู่ในรูป

$$(A_1t + A_0)y''(t) + (B_1t + B_0)y'(t) + (C_1t + C_0)y(t) = At^me^{at} \tag{31}$$

โดยที่ $A_1, A_0, B_1, B_0, C_1, C_0, a \in \mathbb{R}$ หาก t^ie^{at} (สำหรับ $i = 0,1,\ldots,m$) ไม่สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (31) แล้วจะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p(t) = \left(c_0 + c_1t + \cdots + c_mt^m\right)e^{at}$$

โดยมีเงื่อนไขว่า

1) $a^2A_1 + aB_1 + C_1 = 0$
2) $j\left(2aA_1 + B_1\right) + a^2A_0 + aB_0 + C_0 \ne 0$

สำหรับ $j = 0,1,\ldots,m$

และสัมประสิทธิ์ c_j สำหรับ $j = 0,1,\ldots,m$ หาได้จาก

a) $c_m = \dfrac{A}{m\left(2aA_1 + B_1\right) + a^2 A_0 + aB_0 + C_0}$

b) $c_{m-1} = -\dfrac{m\left(\left(m-1\right)A_1 + 2aA_0 + B_0\right)c_m}{\left(m-1\right)\left(2aA_1 + B_1\right) + a^2 A_0 + aB_0 + C_0}$

c) $c_j = -\dfrac{\left(j+1\right)\left(jA_1 + 2aA_0 + B_0\right)c_{j+1} + \left(j+2\right)\left(j+1\right)A_0 c_{j+2}}{j\left(2aA_1 + B_1\right) + a^2 A_0 + aB_0 + C_0}$

สำหรับ $j = m-2, m-3, \ldots, 0$

สำหรับทฤษฎีบท 17 มีการพิสูจน์ที่คล้ายคลึงกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 13 และหลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ก็สามารถใช้ได้ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในรูป

$$(A_1 t + A_0)y''(t) + (B_1 t + B_0)y'(t) + (C_1 t + C_0)y(t) = p_m(t)e^{at} \tag{32}$$

โดยที่ $p_m(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งสมการ (32) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p(t) = \left(c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m\right)e^{at}$$

และสัมประสิทธิ์ c_j สำหรับ $j = 0, 1, \ldots, m$ หาได้จาก

1) $c_m = \dfrac{a_m}{m\left(2aA_1 + B_1\right) + a^2 A_0 + aB_0 + C_0}$

2) $c_{m-1} = \dfrac{a_{m-1} - m\left(\left(m-1\right)A_1 + 2aA_0 + B_0\right)c_m}{\left(m-1\right)\left(2aA_1 + B_1\right) + a^2 A_0 + aB_0 + C_0}$

3) $c_j = \dfrac{a_j - \left(j+1\right)\left(jA_1 + 2aA_0 + B_0\right)c_{j+1} - \left(j+2\right)\left(j+1\right)A_0 c_{j+2}}{j\left(2aA_1 + B_1\right) + a^2 A_0 + aB_0 + C_0}$

สำหรับ $j = m-2, m-3, \ldots, 0$

เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 11 ทฤษฎีบท 17 ก็มีโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ที่มี $0 \le r \le m$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่ง $t^r e^{at}$ สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็ม

ทฤษฎีบท 18. สำหรับสมการ (31) ถ้า $0 \le r \le m$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่ง $t^r e^{at}$ สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (31) แล้วผลเฉลยเฉพาะของสมการ (31) จะอยู่ในรูป

$$y_p(t) = \left(c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m\right)t^{r+1}e^{at}$$

โดยมีเงื่อนไขว่า

1) $A_0 = 0$

2) $\left(r+m+1\right)\left(2aA_1 + B_1\right) + a^2 A_0 + aB_0 + C_0 = 0$

3) $\left(r+i\right)A_1 + B_0 \ne 0$

สำหรับ $i = 0, 1, \ldots, m$

สำหรับทฤษฎีบท 18 มีการพิสูจน์คล้ายคลึงกับทฤษฎีบท 13 และหลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ก็สามารถใช้ได้ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในรูป

$$(A_1 t + A_0)y''(t) + (B_1 t + B_0)y'(t) + (C_1 t + C_0)y(t) = \left(a_m t^m + a_{m+1}t^{m+1} + \cdots + a_p t^p\right)e^{at} \tag{33}$$

ตัวอย่าง 19. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$2ty''(t)+(2-4t)y'(t)+(2t-2)y(t)=3te^{t} \tag{34}$$

วิธีทำ จากการตรวจสอบฟังก์ชัน e^t และ te^t จะพบว่า e^t สามารถหาได้จากผลเฉลยเติมเต็มของสมการ (34) และเนื่องจากสมการ (34) สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบท 18 จึงได้ว่าสมการ (34) จะมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_p(t)=\left(c_0+c_1t\right)te^t$ และเมื่อแทน $y_p(t)$ ลงในสมการ (34) จะได้ว่า $c_0=0$ และ $c_1=\frac{3}{8}$ ดังนั้น $y_p(t)=\frac{3}{8}t^2e^t$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (34) □

บทสรุป

ในบทความนี้ ได้นำเสนอสมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับสอง สมการออยเลอร์-โคชีไม่เอกพันธุ์อันดับ n และสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธุ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่นอกเหนือไปจากสมการออยเลอร์-โคชี โดยทั้งสามรูปแบบนี้สามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้ ซึ่งถือได้ว่ารวดเร็วและมีกรรมวิธีที่น้อยกว่าวิธีการแปรผันตัวแปร

เอกสารอ้างอิง

Adnan, H. S. and Leon, D. D. (2011). Particular solution to the Euler-Cauchy equation with polynomial non-homogeneities. Conference Publications 2011(Special): 1271-1278.

Leon, D. D. (2010). Euler-Cauchy Using Undetermined Coefficients. The College Mathematics Journal 41(3): 235-237.

Leon, D. D. (2015). Using Undetermined Coefficients to Solve Certain Classes of Variable-Coefficient Equations. The American Mathematical Monthly 122(3): 246-255.

Zill, D. G. (2018). A First Course in Differential Equations with Modeling Applications, 2nd ed. Boston: Cengage Learning.

Zill, D. G. (2017). Advanced Engineering Mathematics, 2nd ed. Burlington: Jones & Bartlett Learning.

❑❑❑❑❑