



## ปรากฏการณ์ควอนตัมฮอลล์จำนวนเต็ม

### Integer Quantum Hall effect

สิทธิโชค อำนวยพล<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ อ. คลองหลวง จ. ปทุมธานี 12120

Sitichoke Amnuanpol<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Klong Luang, Pathumthani, 12120 Thailand.

E-mail: sitichok@tu.ac.th

Received: 15 April 2019 | Revised: 25 October 2019 | Accepted: 26 December 2019

#### บทคัดย่อ

ที่อุณหภูมิต่ำและในเงื่อนไขที่มีสนามแม่เหล็กสูง ความต้านทานฮอลล์เพิ่มขึ้นแบบขั้นบันไดกับสนามแม่เหล็ก ค่าความต้านทานฮอลล์ที่ตำแหน่งขั้นบันไดคือ  $h/ne^2$  โดย  $n$  เป็นจำนวนเต็ม อธิบายได้โดยพิจารณาจำนวนอิเล็กตรอนซึ่งครอบครองสถานะขจรและสถานะเฉพาะที่ จำนวนเต็ม  $n$  แท้จริงแล้วคือจำนวนเชอร์ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนเชิงทอพอโลยี

#### ABSTRACT

At low temperatures and strong magnetic fields, the Hall resistance increases stepwise with magnetic field. Its value at each step is  $h/ne^2$ , where  $n$  is an integer. The integer quantum Hall effect can be understood on a basis of the number of electrons occupying the extended states and the localized states. The integer  $n$  is interpreted as a topological invariance, Chern number.

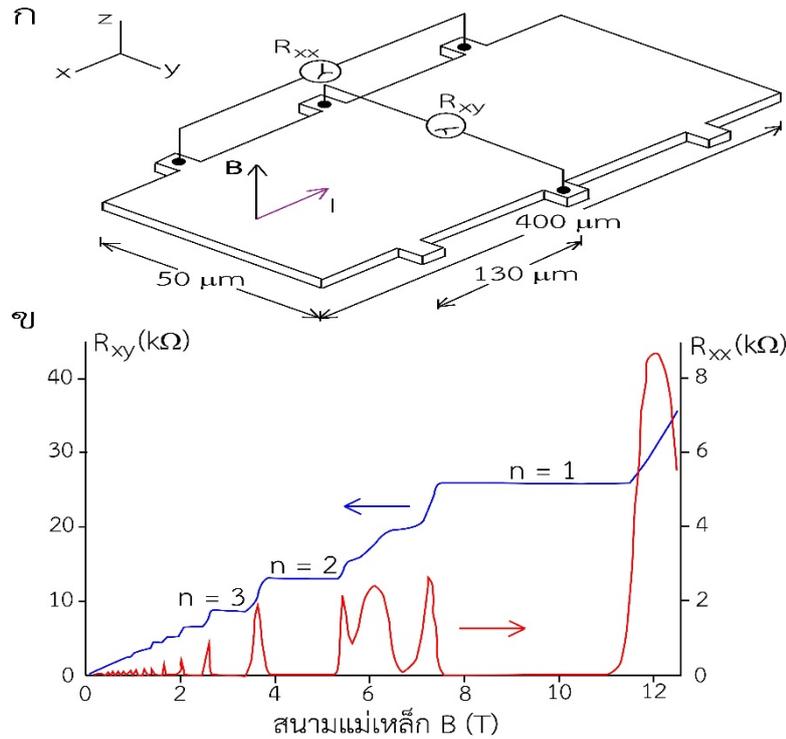
**คำสำคัญ:** ปรากฏการณ์ควอนตัมฮอลล์จำนวนเต็ม ระดับชั้นพลังงานแลนดาอว เลขเชอร์

**Keywords:** Integer quantum Hall effect, Landau energy level, Chern number

#### บทนำ

วัสดุนำไฟฟ้าบางเป็นระบบที่เหมาะสมสำหรับศึกษาอิเล็กตรอนในระบบสองมิติ ที่พบโดยทั่วไปคือ ทรานซิเตอร์โลหะออกไซด์หรือรอยต่อระหว่าง AlGaAs กับ GaAs รูปที่ 1 ก แสดงกระแสไฟฟ้า  $I$  ไหลในทิศ  $x$  ลบ วัดความต่างศักย์ในทิศเดียวกับกระแสได้เป็น  $V_{xx}$  ความต้านทานในทิศเดียวกับกระแส  $R_{xx} = V_{xx}/I$  เมื่อวัสดุตั้งกล่าวอยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอก  $B$  ซึ่งอยู่ในทิศ  $z$  จะมีความต่างศักย์ในทิศตั้งฉากกับกระแส  $V_{xy}$  เรียกว่า ศักย์ฮอลล์ ความต้านทานในทิศตั้งฉากกับกระแส  $R_{xy} = V_{xy}/I$  เรียกว่า ความต้านทานฮอลล์ ซึ่งเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้นกับสนามแม่เหล็ก พฤติกรรมเชิงเส้นดังกล่าวสามารถเข้าใจได้โดยฟิสิกส์แผนเดิม แต่เมื่อทำการทดลองนี้ที่อุณหภูมิต่ำ 1.5 K และสนามแม่เหล็กเข้มถึง 12 T รูปที่ 1 ข แสดงในช่วงสนามแม่เหล็ก  $B$  น้อยกว่า 1 T ความต้านทานฮอลล์เพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้นกับ  $B$  แต่ในช่วงสนามแม่เหล็ก  $B$  มากกว่า 1 T ความต้านทานฮอลล์  $R_{xy}$  เพิ่มขึ้นแบบขั้นบันไดกับ  $B$  ตำแหน่งที่เกิดขั้นบันไดตรงกับค่า  $h/ne^2$  โดย  $n$  เป็นจำนวนเต็ม (Paalanen et al., 1982) เรียกว่า ปรากฏการณ์ควอนตัมฮอลล์จำนวนเต็ม สังเกตว่า ทุกครั้งที่ความต้านทาน

ฮอลล์  $R_{xy}$  เกิดขึ้นบันได ความต้านทาน  $R_{xx}$  จะเท่ากับศูนย์ เป็นที่น่าแปลกใจว่า  $R_{xy} = h/ne^2$  ที่ตำแหน่งขั้นบันไดขึ้นกับค่าคงที่มูลฐานเท่านั้นคือ ค่าคงที่พลังค์  $h$  และประจุอิเล็กตรอน  $e$  ซึ่งให้เห็นว่า แม้ขึ้นตัวอย่างจะมีเรขาคณิตที่เปลี่ยนไป หรือมีอะตอมอื่นเจือปน ค่า  $R_{xy}$  ที่ตำแหน่งขั้นบันไดจะยังคงเดิม จึงเหมาะที่จะใช้เป็นมาตรฐานสำหรับเทียบความต้านทาน  $h/e^2 \approx 25813 \Omega$  เราสามารถวัดความต้านทานได้ละเอียดถึง 1 ส่วนใน  $10^8$  โดยใช้เทคนิคตัวเก็บประจุไขว้ ค่าความต้านทานฮอลล์ที่ตำแหน่งขั้นบันไดยังใช้หาค่าคงที่โครงสร้างละเอียด (fine-structure constant)  $\alpha$  ได้อย่างแม่นยำมาก (Klitzing et al., 1980)

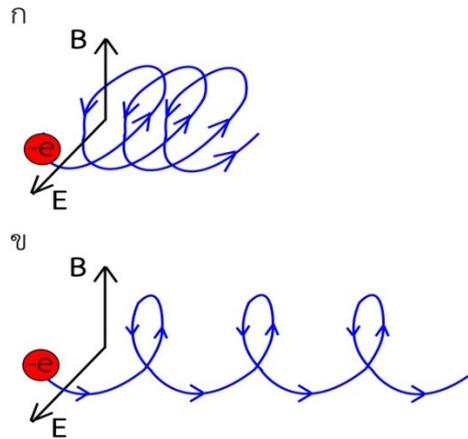


**รูปที่ 1** ปรากฏการณ์ควอนตัมฮอลล์จำนวนเต็ม (ก) วัดความต้านทานโดยเทคนิคสี่จุด (four probes) (ข) ความต้านทานฮอลล์  $R_{xy}$  เพิ่มขึ้นแบบขั้นบันไดกับสนามแม่เหล็ก  $B$  ค่าความต้านทานฮอลล์ที่ขั้นบันได  $R_{xy} = h/ne^2 = 25.8 \text{ k}\Omega, 12.9 \text{ k}\Omega$  และ  $8.6 \text{ k}\Omega$  สำหรับ  $n = 1, 2$  และ  $3$  ตามลำดับ เมื่อสนามแม่เหล็กอยู่ในช่วงขั้นบันได ความต้านทานในทิศเดียวกับกระแส  $R_{xx} = 0$

ในทางกลศาสตร์ควอนตัม อิเล็กตรอนทำตัวเป็นคลื่น การทดลองจำเป็นต้องทำที่อุณหภูมิต่ำเพื่อให้ความยาวคลื่นของอิเล็กตรอนยาวกว่าระยะห่างเฉลี่ยระหว่างอิเล็กตรอน จึงจะเห็นผลทางควอนตัม อีกเหตุผลหนึ่งคือ เพื่อลดการชนระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน เพราะโฟนอนมีจำนวนไม่มากนักที่อุณหภูมิต่ำ การชนส่วนใหญ่จึงเป็นการชนระหว่างอิเล็กตรอนกับอะตอมเจือปนแรงเนื่องจากสนามแม่เหล็กอยู่ในระนาบ  $xy$  ระดับชั้นพลังงานจึงเหมือนกับของคลื่นระนาบ ส่วนอิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ  $xy$  จะโคจรเป็นวงกลมด้วยความถี่ซินโคลตรอน  $\omega_c = eB/m$  โดย  $m$  คือมวลอิเล็กตรอน ระดับชั้นพลังงานจึงเหมือนกับของตัวสั้นฮาร์มอนิก ช่องว่างระหว่างระดับชั้นพลังงานคือ  $\hbar\omega_c$  สนามแม่เหล็ก  $B$  ในการทดลองมีความแรงมากเพื่อเปิดช่องว่างพลังงานให้กว้างจนกระทั่งพลังงานความร้อน  $k_B T$  ไม่สามารถกระตุ้นอิเล็กตรอนขึ้นไปครอบครองระดับชั้นพลังงานที่สูงขึ้นได้ พลังงานความร้อนดังกล่าวมีไม่มากนักเพราะการทดลองทำที่อุณหภูมิต่ำ พลังงานเฟอร์มี  $E_F$  คือระดับชั้นพลังงานสูงสุดที่อิเล็กตรอนครอบครอง การกำจัดการกระตุ้นทางความร้อนออกไป ทำให้เราสามารถปรับ  $E_F$  ในการทดลองได้โดยปรับความแรงของสนามแม่เหล็กแทนที่จะปรับความหนาแน่นอิเล็กตรอน  $n_e$  ของวัสดุซึ่งทำได้ยาก ที่กึ่งกลางของแต่ละขั้นบันไดเกิดขึ้นที่สนามแม่เหล็ก  $B = (n_e/n)\Phi_0$  โดยฟลักซอน (fluxon)  $\Phi_0 \equiv h/e = 4.14 \times 10^{-15} \text{ T}\cdot\text{m}^2$  ความหนาแน่นอิเล็กตรอน  $n_e$  อยู่ที่ประมาณ  $10^{15} \text{ m}^{-2}$

## เส้นทางเดินของอิเล็กตรอนภายใต้สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า

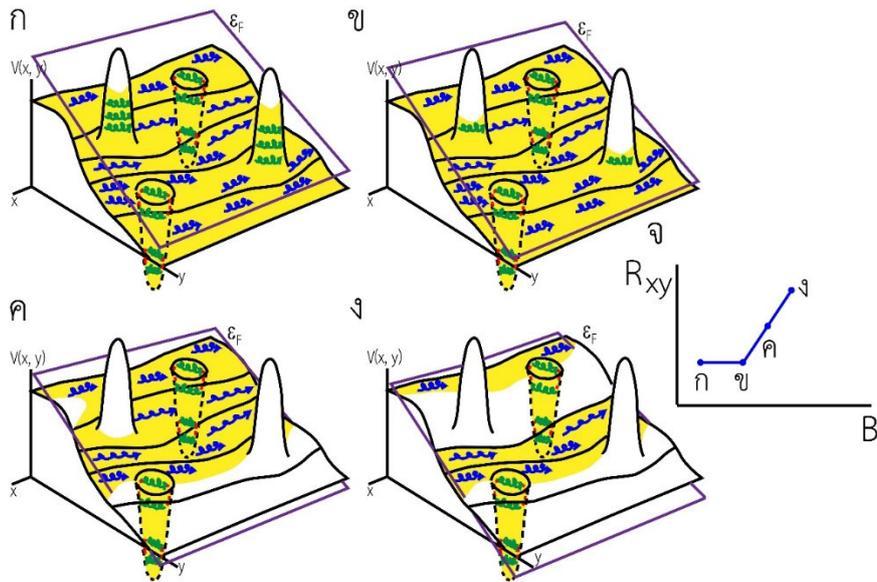
ศักย์ฮอลล์  $V_{xy}$  อยู่ที่ระดับ 10 mV ความกว้างของชิ้นตัวอย่างตามรูปที่ 1ก คือ 50  $\mu\text{m}$  ก่อให้เกิดสนามไฟฟ้า  $E$  ประมาณ 200 V/m อิเล็กตรอนจึงอยู่ภายใต้ทั้งสนามแม่เหล็ก  $B$  และสนามไฟฟ้า  $E$  จุดศูนย์กลางของวงซินโคลตรอนจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $E/B$  ในทิศ  $-E \times B$  เครื่องหมายลบเพราะอิเล็กตรอนมีประจุลบ เส้นทางเดินจึงเป็นไซคลอยด์ (cycloid) รูปที่ 2ก แสดงเมื่อสนามแม่เหล็ก  $B$  แรง หรือสนามไฟฟ้า  $E$  อ่อน อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงซินโคลตรอนขนาดใหญ่ อิเล็กตรอนจึงไม่ค่อยเคลื่อนที่ไปทางขวา รูปที่ 2ข แสดงเมื่อสนามแม่เหล็ก  $B$  อ่อน หรือสนามไฟฟ้า  $E$  แรง อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงซินโคลตรอนขนาดเล็ก อิเล็กตรอนจึงเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็วสูงขึ้น นำกระแสไฟฟ้าได้ดีมากขึ้น ส่งผลให้ความต้านทานลดน้อยลง



**รูปที่ 2** เส้นทางเดินของอิเล็กตรอนเป็นไซคลอยด์ภายใต้สนามแม่เหล็ก  $B$  และสนามไฟฟ้า  $E$  ซึ่งตั้งฉากกัน (ก) เมื่อ  $B$  แรง หรือ  $E$  อ่อน อิเล็กตรอนใช้เวลาส่วนใหญ่ในการโคจรเป็นวงซินโคลตรอน ทำให้เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็วต่ำ (ข) เมื่อ  $B$  อ่อน หรือ  $E$  แรง อิเล็กตรอนใช้เวลาส่วนใหญ่ในการเคลื่อนที่ไปทางขวา ทำให้เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็วสูง

## ภูมิภาคพลังงาน

เมื่อไม่มีศักย์  $V$  ทุกตำแหน่ง  $(x, y)$  มีศักย์เท่ากับศูนย์เหมือนกัน ภูมิภาคพลังงาน  $V(x, y) = 0$  จึงเป็นระนาบ เมื่อมีศักย์ฮอลล์  $V_{xy}$  ภูมิภาคพลังงาน  $V(x, y)$  เป็นระนาบที่เอียงด้วยมุม  $\theta$  โดย  $\tan \theta = V_{xy}/w$  กำหนดให้  $w$  เป็นความกว้างตามแกน  $y$  เมื่อมีอะตอมอื่นเจือปน จะเกิดศักย์ซึ่งมีลักษณะเป็นหุบเขาหรือเนินเขาขึ้น ถ้าอะตอมเจือปนให้อิเล็กตรอนแก่ระบบ อะตอมเจือปนมีความเป็นประจุบวก ทำให้อิเล็กตรอนในระบบชอบมาอยู่บริเวณใกล้อะตอมเจือปน อิเล็กตรอนกับประจุบวกอยู่ใกล้กัน ระบบมีพลังงานต่ำลง กล่าวได้ว่า อะตอมเจือปนซึ่งให้อิเล็กตรอนแก่ระบบสร้างหุบเขา ในทางกลับกัน ถ้าอะตอมเจือปนรับอิเล็กตรอนจากระบบ อะตอมเจือปนมีความเป็นประจุลบ อิเล็กตรอนกับอะตอมเจือปนซึ่งมีความเป็นประจุลบด้วยกันทั้งคู่อยู่ใกล้กัน ระบบมีพลังงานสูงขึ้น กล่าวได้ว่า อะตอมเจือปนซึ่งรับอิเล็กตรอนจากระบบสร้างเนินเขา ความกว้างของหุบเขาหรือเนินเขาอยู่ในระดับเดียวกับความยาวแม่เหล็ก (magnetic length)  $l_B = (\hbar/eB)^{1/2}$  ประมาณ 10 nm สำหรับสนามแม่เหล็ก  $B$  ในช่วง 5-10 T ตำแหน่งของหุบเขาหรือเนินเขาอยู่ตำแหน่งเดียวกับอะตอมเจือปน อะตอมเจือปนระจัดกระจายอย่างไร้ระเบียบไปทั่วแลตทิซ จึงมีหุบเขาและเนินเขาเกิดขึ้นมากมาย ระเกะระกะไปทั่วแลตทิซเช่นกัน



**รูปที่ 3** ชั้นบันไดเป็นช่วงที่ความต้านทานฮอลล์  $R_{xy}$  คงที่ แม้ว่าสนามแม่เหล็ก  $B$  จะเพิ่มขึ้น ชั้นบันไดเกิดขึ้นเมื่อระดับพลังงาน  $\epsilon_F$  ตัดในช่วงเนินเขาหรือหุบเขา (ก) และ (ข) ระดับพลังงาน  $\epsilon_F$  ตัดในช่วงเนินเขา ทำให้อิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่มีจำนวนน้อยลง ขณะที่อิเล็กตรอนในสถานะขจรมีจำนวนคงเดิม ดังนั้น  $R_{xy}$  มีค่าคงที่ (ค) และ (ง) ระดับพลังงาน  $\epsilon_F$  ตัดในช่วงพื้นผิวเอียง ทำให้อิเล็กตรอนในสถานะขจรมีจำนวนน้อยลง ดังนั้น  $R_{xy}$  มีค่าเพิ่มขึ้น (จ) กราฟระหว่าง  $R_{xy}$  กับ  $B$  ของรูป ก, ข, ค, และ ง

ชั้นตัวอย่างในการทดลองจริงมีทั้งศักย์ฮอลล์และอะตอมอื่นเจือปน รูปที่ 3ก ภูมิภาคพลังงาน  $V(x, y)$  เป็นพื้นผิวเอียงที่ขรุขระ บางตำแหน่งเป็นหุบเขา บางตำแหน่งเป็นเนินเขา กระจุกกระจายไปทั่ว พลังงานเฟอร์มี  $\epsilon_F$  ในกรณีนี้มีค่าแตกต่างกันขึ้นกับตำแหน่ง ซึ่งแสดงด้วยระดับเอียง ระดับพลังงาน  $\epsilon_F$  ตัดกับเนินเขา ทุกสถานะที่อยู่ต่ำกว่าจุดตัดดังกล่าวถูกรอบครองโดยอิเล็กตรอน แสดงสถานะที่ถูกครอบครองเป็นส่วนที่แรงๆ อิเล็กตรอนครอบครองสถานะต่างๆ ซึ่งมีพลังงานน้อยกว่าหรือเท่ากับ  $\epsilon_F$  สถานะดังกล่าวแบ่งเป็นสองประเภทคือ (1) สถานะขจร (extended state) (2) สถานะเฉพาะที่ (localized state) อิเล็กตรอนซึ่งครอบครองสถานะเฉพาะที่จะถูกจำกัดให้เคลื่อนที่เป็นวงภายในหุบเขาหรือเนินเขา ไม่สามารถเคลื่อนที่ไปยังบริเวณต่างๆ ได้ การไหลของกระแสไฟฟ้าอาศัยอิเล็กตรอนในสถานะขจรเพียงอย่างเดียว ไม่เกี่ยวข้องกับอิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่ อิเล็กตรอนในสถานะขจรมีเส้นทางเดินเป็นไซคลอยด์ อิเล็กตรอนดังกล่าวเคลื่อนที่ไปข้างหน้าด้วยความเร็วแตกต่างกันเพราะพื้นผิวเอียงมีความชันที่ตำแหน่งต่างๆ แตกต่างกัน อีกนัยหนึ่งคือ สนามไฟฟ้ามีความแรงเปลี่ยนแปลงกับตำแหน่ง บริเวณใดมีความชันมาก บริเวณนั้นสนามไฟฟ้าแรง ทำให้อิเล็กตรอนในสถานะขจรที่บริเวณดังกล่าวเคลื่อนที่ไปข้างหน้าด้วยความเร็วสูงและมีวงขนาดเล็กตามรูปที่ 2ข

เมื่อสนามแม่เหล็ก  $B$  แรงขึ้น จำนวนสถานะซ้ำซ้อน (number of degeneracies)  $g = 2eaB/h$  (Landau and Lifshitz, 1965) เพิ่มมากขึ้นด้วย โดย  $a$  คือพื้นที่ตัดขวางในระนาบ  $xy$  ซึ่งตั้งฉากกับ  $B$  จำนวนสถานะที่เพิ่มมากขึ้นทำให้ระดับชั้นพลังงานหนึ่งรองรับจำนวนอิเล็กตรอนได้มากขึ้น จึงใช้เพียงไม่กี่ระดับชั้นพลังงานก็สามารถรองรับอิเล็กตรอนได้ทั้งหมด ระดับชั้นพลังงานสูงสุดที่อิเล็กตรอนครอบครองจึงต่ำลง กล่าวได้ว่า เมื่อ  $B$  แรงขึ้น พลังงานเฟอร์มี  $\epsilon_F$  ลดน้อยลง ระดับพลังงาน  $\epsilon_F$  ในรูปที่ 3ข จึงเคลื่อนลงตัดกับเนินเขาที่ตำแหน่งต่ำลง อิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่มีจำนวนลดน้อยลง เห็นได้จากเนินเขามีส่วนแรเงาลดน้อยลง อย่างไรก็ตาม อิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่ไม่ได้รับผิดชอบต่อการไหลของกระแสไฟฟ้า ความต้านทานฮอลล์  $R_{xy}$  ในรูป ก และรูป ข จึงเท่ากันแม้ว่า  $B$  จะแรงขึ้น การเท่ากันของ  $R_{xy}$  เห็นเป็นชั้นบันไดในกราฟรูป จ ระหว่างที่ระดับพลังงาน  $\epsilon_F$  เคลื่อนลงตามเนินเขา จำนวนอิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่ลดลงเรื่อยๆ แต่  $R_{xy}$  ยังคงเดิม หากชั้นตัวอย่างมีอะตอมอื่นเจือปนปริมาณมาก หุบเขาจะลึกขึ้นและเนินเขาจะสูงขึ้น เนินเขาที่สูงขึ้นทำให้ระดับพลังงาน  $\epsilon_F$  ต้องเคลื่อนลงไปเป็นระยะทางที่ไกลขึ้นกว่าจะถึงฐานของเนินเขา ช่วงของ  $B$  ซึ่ง  $R_{xy}$  ไม่เปลี่ยนแปลงจึงกว้างขึ้น ความกว้างของชั้นบันไดจึงมากขึ้น

เมื่อสนามแม่เหล็ก B แรงขึ้นไปอีก ระบายเชิง  $E_F$  ในรูปที่ 3ค จึงเคลื่อนต่ำลงไปอีกจนไปตัดพื้นผิวเอียง ทำให้อิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่ของเนินเขามีจำนวนลดน้อยลง และยังทำให้อิเล็กตรอนในสถานะขจรมีจำนวนลดน้อยลงอีกด้วย เห็นได้จากพื้นผิวเอียงมีส่วนแรงแจกลดน้อยลง อิเล็กตรอนในสถานะขจรรับผิดชอบต่อการไหลกระแสไฟฟ้า เมื่อมีอิเล็กตรอนในสถานะขจรจำนวนลดน้อยลงย่อมทำให้ความต้านทานฮอลล์  $R_{xy}$  ในรูป ค มากกว่าในรูป ก และ ข เห็นเป็นการเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้นในกราฟรูป จ การเพิ่มขึ้นของ  $R_{xy}$  แบบเชิงเส้นกับ B นี้เหมือนกับปรากฏการณ์ฮอลล์แบบคลาสสิก

เมื่อเพิ่มสนามแม่เหล็ก B ต่อไป ระบายเชิง  $E_F$  ในรูปที่ 3ง จะเคลื่อนต่ำลงไปตัดพื้นผิวเอียงที่ตำแหน่งต่ำกว่าในรูป ค ลดจำนวนอิเล็กตรอนในสถานะขจรลงไปอีก พื้นผิวเอียงมีส่วนแรงแจกน้อยกว่าในรูปที่ ค ความต้านทานฮอลล์  $R_{xy}$  เพิ่มสูงขึ้นมีค่ามากกว่าในรูป ค เมื่อเพิ่ม B ต่อไปอีก คราวนี้ระบายเชิง  $E_F$  จะเคลื่อนต่ำลงไปจนตัดกับหุบเขา ลดจำนวนอิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่โดยจำนวนอิเล็กตรอนในสถานะขจรคงเดิม กราฟของ  $R_{xy}$  เข้าสู่ขั้นบันไดอันดับถัดไป

**ระดับชั้นพลังงาน**

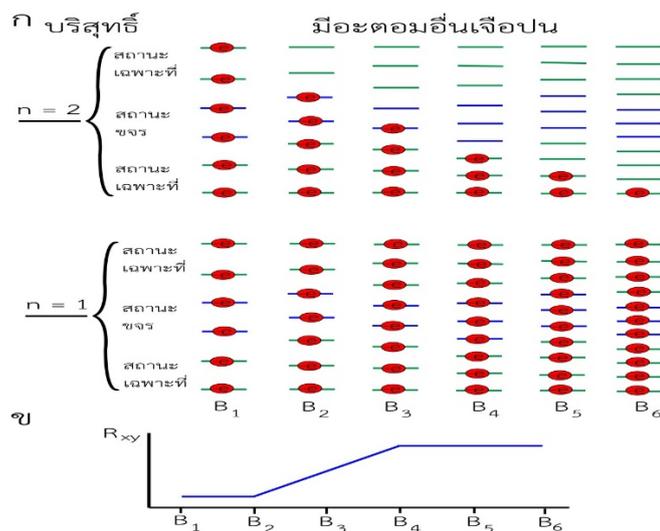
ในทางกลศาสตร์ควอนตัม บรรยายสนามแม่เหล็ก B ด้วยศักย์เวกเตอร์ A ซึ่งสัมพันธ์กันโดย  $B = \nabla \times A$  โมเมนตัมของอิเล็กตรอนเปลี่ยนจาก p เป็น  $p + eA$  ในที่นี้ เราละทิ้งศักย์ซึ่งมีความเป็นรอบในแลตทิซและอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนด้วยตัวเองเพื่อความง่าย พิจารณารูปที่ 1ก ศักย์ฮอลล์สร้างสนามไฟฟ้า E ขึ้นที่ทิศ y บวก จุดศูนย์กลางของวงซินโคลตรอนมีตำแหน่งตามแนวแกน y อยู่ที่ (Laughlin, 1981)

$$y_0 = \frac{1}{\omega_c} \left[ \frac{\hbar k_x}{m} - \frac{E}{B} \right] \tag{1}$$

โดย  $k_x$  คือองค์ประกอบ x ของเวกเตอร์คลื่น k ทิศ x ลบคือทิศการไหลของกระแสไฟฟ้า ระดับชั้นพลังงานคือ

$$\epsilon_n = \left[ n + \frac{1}{2} \right] \hbar \omega_c + eE y_0 + \frac{1}{2} m \left[ \frac{E}{B} \right]^2 \tag{2}$$

เรียกว่าระดับชั้นพลังงานแลนดาว (Landau energy level) เทอมแรกคือระดับชั้นพลังงานของตัวสันฮาร์มอนิก เทอมที่สองคือพลังงานเนื่องจากสนามไฟฟ้า และเทอมสุดท้ายคือพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางของวงซินโคลตรอนด้วยความเร็ว E/B



**รูปที่ 4** การเกิดขั้นบันได (n) เมื่อขึ้นตัวอย่างบริสุทธิ์ ระดับชั้นพลังงานแลนดาว  $E_n$  มีค่าไม่ต่อเนื่อง แต่ในความเป็นจริง ขึ้นตัวอย่างมีอะตอมอื่นเจือปน  $E_n$  ขยายเป็นแถบประกอบด้วยสถานะเฉพาะที่และสถานะขจร แสดงการจัดเรียงอิเล็กตรอนเข้าสู่สถานะต่างๆ ที่ความแรงของสนามแม่เหล็กจาก  $B_1$  ถึง  $B_6$  ขั้นบันไดเกิดขึ้นเมื่อพลังงานเฟอร์มี  $E_F$  อยู่ในช่วงสถานะเฉพาะที่ เพราะการลดลงของอิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่ไม่ส่งผลต่อการไหลของกระแสไฟฟ้า (ข) กราฟระหว่าง  $R_{xy}$  กับสนามแม่เหล็กสังเกตว่า ขั้นบันไดในช่วงสนามแม่เหล็กแรงกว้างกว่าในช่วงสนามแม่เหล็กอ่อน

เมื่อไม่มีอะตอมอื่นเจือปน รูปที่ 4ก แสดงระดับชั้นพลังงานแลนดา  $E_n$  มีค่าไม่ต่อเนื่อง เมื่อมีอะตอมอื่นเจือปน แต่ละระดับชั้นพลังงานแลนดาขยายเป็นแถบ บริเวณส่วนบนและส่วนล่างของแถบคือสถานะเฉพาะที่ ส่วนบนของแถบเปรียบได้กับเนินเขา ในรูปที่ 3 และส่วนล่างของแถบเปรียบได้กับหุบเขา ขณะที่ส่วนกลางของแถบคือสถานะขจร แถบหนึ่งประกอบด้วยหลายสถานะทั้งที่เป็นสถานะเฉพาะที่และสถานะขจร การเพิ่มสนามแม่เหล็กจาก  $B_1$  เป็น  $B_2$  ทำให้แต่ละแถบมีจำนวนสถานะมากขึ้น ขณะที่จำนวนอิเล็กตรอนยังคงเดิม ระดับชั้นพลังงานสูงสุดซึ่งอิเล็กตรอนครอบครองจึงมีค่าต่ำลง นั่นคือ พลังงานเฟอร์มี  $E_F$  ลดลงเมื่อสนามแม่เหล็กแรงขึ้น ที่  $B_2$  สถานะเฉพาะที่ในบริเวณส่วนบนของชั้น  $n = 2$  ไม่ถูกครอบครองโดยอิเล็กตรอน จำนวนอิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่ลดน้อยลง แต่อิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่ไม่มีส่วนในการไหลของกระแสไฟฟ้า ฉะนั้นความต้านทานฮอลล์  $R_{xy}$  ที่  $B_2$  จึงเท่ากับที่  $B_1$  เห็นเป็นขั้นบันไดในกราฟระหว่างความต้านทานฮอลล์กับสนามแม่เหล็ก การเพิ่มสนามแม่เหล็กต่อเป็น  $B_3$  พลังงานเฟอร์มี  $E_F$  ลดลงอีก หนึ่งสถานะขจรของชั้น  $n = 2$  ไม่ถูกครอบครองโดยอิเล็กตรอน การไหลของกระแสไฟฟ้าอาศัยอิเล็กตรอนในสถานะขจร การลดลงของจำนวนอิเล็กตรอนในสถานะขจรทำให้  $R_{xy}$  ที่  $B_3$  มากกว่าที่  $B_2$  การเพิ่มสนามแม่เหล็กต่อเป็น  $B_4$  พลังงานเฟอร์มี  $E_F$  ลดลงอีก สถานะขจรของชั้น  $n = 2$  ไม่ถูกครอบครองโดยอิเล็กตรอนเลย ที่  $B_4$  จำนวนอิเล็กตรอนในสถานะขจรของชั้น  $n = 1$  เท่ากับ 3 ตัวมากกว่าที่  $B_3$  ซึ่งมี 2 ตัว แม้ว่าจำนวนอิเล็กตรอนในสถานะขจรของชั้น  $n = 1$  จะเพิ่มขึ้น แต่สนามแม่เหล็กที่แรงขึ้นลดความเร็วในการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในสถานะขจร ผลทั้งสองหักล้างกันพอดี เหลือเพียงผลจากจำนวนที่ลดลงของอิเล็กตรอนในสถานะขจรของชั้น  $n = 2$  ฉะนั้น  $R_{xy}$  ที่  $B_4$  จึงมากกว่าที่  $B_3$  การเพิ่มสนามแม่เหล็กต่อเป็น  $B_5$  พลังงานเฟอร์มี  $E_F$  ลดลงอีก บางสถานะเฉพาะที่ในบริเวณส่วนล่างของชั้น  $n = 2$  ไม่ถูกครอบครองโดยอิเล็กตรอน การลดลงของจำนวนอิเล็กตรอนในสถานะเฉพาะที่ไม่ส่งผลต่อการไหลของกระแสไฟฟ้า ฉะนั้น  $R_{xy}$  ที่  $B_5$  จึงเท่ากับที่  $B_4$  เห็นเป็นอีกขั้นบันได การเพิ่มสนามแม่เหล็กต่อเป็น  $B_6$  พลังงานเฟอร์มี  $E_F$  ลดลงอีก สถานะเฉพาะที่ใหญ่ในบริเวณส่วนล่างของชั้น  $n = 2$  ไม่ถูกครอบครองโดยอิเล็กตรอน ฉะนั้น  $R_{xy}$  ที่  $B_6$  จึงยังคงเท่ากับที่  $B_5$  เห็นในรูปที่ 4ข เป็นขั้นบันไดที่เกิดขึ้นในช่วงสนามแม่เหล็กแรงมีความกว้างมากกว่าที่เกิดขึ้นในช่วงสนามแม่เหล็กอ่อน คล้ายคลึงกับผลการทดลองในรูปที่ 1ข

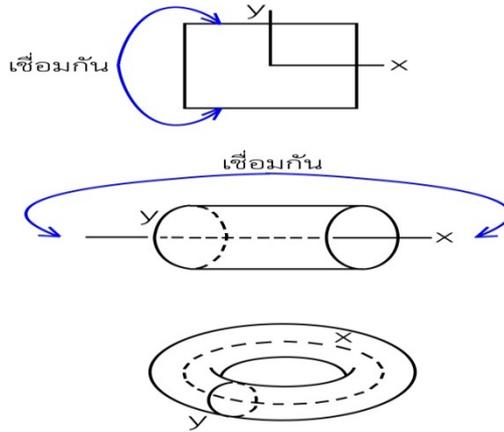
## แนวคิดเชิงทอพอโลยี

ความต้านทานฮอลล์ที่ขั้นบันได  $R_{xy} = h/ne^2$  โดย  $n$  เป็นจำนวนเต็ม เมื่อขึ้นตัวอย่างมีเรขาคณิตเปลี่ยนแปลง ความต้านทาน  $R_{xx}$  จะเปลี่ยนแปลงแต่ค่าความต้านทานฮอลล์ที่ขั้นบันไดยังคงเดิม เทียบเคียงได้กับ เรามีดินน้ำมันเป็นรูปทรงกลม เราสามารถบิดเบี้ยวมันเป็นรูปร่างต่างๆ โดยห้ามมีการฉีกขาด รูปร่างต่างๆ เหล่านี้สมมูลเชิงทอพอโลยีกับทรงกลม การบิดเบี้ยวไม่สามารถเปลี่ยนแปลงสมบัติทอพอโลยีได้ เช่น ทรงกลมไม่มีรู บิดเบี้ยวทรงกลมเป็นทรงรีก็ยังไม่มียูเหมือนเดิม แม้ว่าทรงกลมและทรงรีมีเรขาคณิตต่างกัน แต่มีสมบัติทอพอโลยีเหมือนกัน เช่น จำนวนรูหรือที่เรียกว่าจีนัส (genus)  $g$  ทั้งทรงกลมและทรงรีมี  $g = 0$  สมบัติทอพอโลยีที่เหมือนเดิมแสดงออกให้เห็นเป็น ค่า  $R_{xy}$  ที่ขั้นบันไดไม่เปลี่ยนแปลงแม้ว่าเรขาคณิตของชั้นตัวอย่างจะเปลี่ยนไปหรือมีปริมาณอะตอมอื่นเจือปนในชั้นตัวอย่างมากขึ้น จำนวนเต็ม  $n$  จึงน่าจะมีความหมายเชิงทอพอโลยี ในทางเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ พื้นผิวใดๆ สามารถบรรยายด้วยความโค้งเกาส์เซียน (Gaussian curvature)  $K$  ซึ่งเป็นสมบัติเฉพาะที่มีค่าที่จุดต่างๆ บนพื้นผิวแตกต่างกัน อินทิกรัลของ  $K$  ทั่วพื้นผิวปิดกลายเป็นสมบัติทอพอโลยีซึ่งไม่ขึ้นกับรายละเอียดทางเรขาคณิต ทฤษฎีเกาส์-บอนเน็ต (Gauss-Bonnet theorem) กล่าวว่า (Carmo, 1976)

$$\frac{1}{2\pi} \int ds K = 2(1 - g) \quad (3)$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า  $K$  เป็นจำนวนจริง แต่  $\int ds K$  เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น อินทิกรัลดังกล่าวจึงเปลี่ยนแปลงแบบขั้นบันไดที่ละหนึ่งชั้นตัวอย่างเป็นระนาบ  $xy$  ในสองมิติตามรูปที่ 1ก เราม้วนระนาบ  $xy$  เป็นพื้นผิวปิด รูปที่ 5 แสดงการเชื่อมขอบด้านบนกับด้านล่างเข้าด้วยกัน ระนาบกลายเป็นทรงกระบอก เชื่อมปลายด้านซ้ายของทรงกระบอกกับปลายด้านขวาเข้าด้วยกัน ทรงกระบอกกลายเป็นทรงห่วงยาง แกน  $x$  คือเส้นรอบวงของแกนกลางทรงห่วงยาง แกน  $y$  คือเส้นรอบวงของพื้นที่ตัดขวาง ข้อดีของทรงห่วงยางคือ นอกจากเป็นพื้นผิวปิดแล้ว ยังเปิดโอกาสให้เราเพิ่มสองพารามิเตอร์แก่ระบบ คือ ฟลักซ์แม่เหล็ก  $\Phi_x$  ซึ่งเราจินตนาการขึ้นผ่านรูของทรงห่วงยางตาม

รูปที่ 6 และฟลักซ์แม่เหล็ก  $\Phi_y$  ซึ่งเราจินตนาการขึ้นผ่านพื้นที่ตัดขวางของทรงห่วงยาง สนามแม่เหล็กจริง  $\mathbf{B}$  ตั้งฉากกับผิวของทรงห่วงยาง ฟลักซ์แม่เหล็กทั้งสองเพิ่มเติม  $\hat{H} = -\sum_j (\Phi_j / L_j) \hat{I}_j$  ให้แก่แฮมิลโทเนียน (Hamiltonian)  $L_x$  และ  $L_y$  คือความยาวตามแกน  $x$  และแกน  $y$  ตัวดำเนินการกระแส  $\hat{I}_j = -(e/m) (-i\hbar\partial/\partial x_j + eA_j)$  กำหนดให้  $\psi_0$  เป็นฟังก์ชันคลื่นในสถานะพื้นเมื่อไม่มีฟลักซ์แม่เหล็กทั้งสอง ทฤษฎีเพอร์เทอร์เบชันให้ฟังก์ชันคลื่นในสถานะพื้นเมื่อมีฟลักซ์แม่เหล็กทั้งสองเป็น

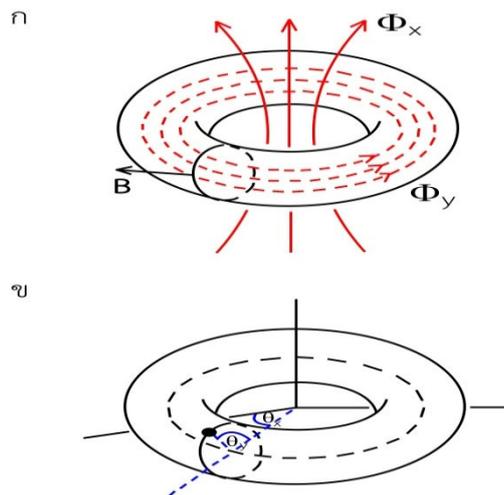


รูปที่ 5 ม้วนระนาบ  $xy$  เป็นพื้นผิวปิด จะได้ทรงห่วงยาง มีความเป็นรอบทั้งตามแนวแกน  $x$  และแกน  $y$

$$\psi'_0 = \psi_0 + \sum_{j \neq 0} \frac{\langle \psi_j | \hat{H}' | \psi_0 \rangle}{\epsilon_j - \epsilon_0} \psi_j \tag{4}$$

ฟังก์ชันคลื่นเปลี่ยนแปลงกับฟลักซ์แม่เหล็กบรรยายด้วย

$$\frac{\partial \psi'_0}{\partial \Phi_j} = - \frac{1}{L_j} \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \psi_k | \hat{I}_j | \psi_0 \rangle}{\epsilon_k - \epsilon_0} \psi_k \tag{5}$$



รูปที่ 6 สร้างปริภูมิพารามิเตอร์ (ก) ปริภูมิจริงเป็นทรงห่วงยาง สนามแม่เหล็กจริง  $\mathbf{B}$  ตั้งฉากกับผิวของทรงห่วงยาง เราจินตนาการให้มีฟลักซ์แม่เหล็ก  $\Phi_x$  ผ่านรูและ  $\Phi_y$  ผ่านพื้นที่ตัดขวาง นิยามมุม  $\theta_x \equiv 2\pi\Phi_x/\Phi_0$  และ  $\theta_y \equiv 2\pi\Phi_y/\Phi_0$  (ข) มุม  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ระบุตำแหน่งบนผิวของทรงห่วงยาง ปริภูมิพารามิเตอร์เป็นทรงห่วงยางเช่นกัน

ความนำไฟฟ้าฮอลล์  $\sigma_{xy} = 1/R_{xy}$  หาได้จากสูตรของคูโบ (Thouless et al., 1982)

$$\sigma_{xy} = i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial \Phi_y} \langle \psi_0 | \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_x} \rangle - \frac{\partial}{\partial \Phi_x} \langle \psi_0 | \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_y} \rangle \right] \quad (6)$$

สองพารามิเตอร์ของแฮมิลโทเนียนคือฟลักซ์แม่เหล็ก  $\Phi_x$  และ  $\Phi_y$  สเปกตรัมพลังงานขึ้นกับเศษที่เหลือจากการหาร  $\Phi_j$  ด้วย  $\Phi_0$  เราจึงสร้างปริภูมิพารามิเตอร์โดยนิยามสองมุมคือ  $\theta_x \equiv 2\pi\Phi_x/\Phi_0$  และ  $\theta_y \equiv 2\pi\Phi_y/\Phi_0$  มุมทั้งสองมีค่าระหว่าง 0 กับ  $2\pi$  รูปที่ 6x แสดงปริภูมิพารามิเตอร์เป็นทรงห่วงยางเช่นเดียวกับปริภูมิจริงตามรูปที่ 6g การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันคลื่นในปริภูมิพารามิเตอร์กับมุม  $\theta_j$  บรรยายด้วยการเชื่อมโยงเบอร์รี่ (Berry connection)  $\mathcal{A}_j = -i\langle \psi_0 | \partial/\partial \theta_j | \psi_0 \rangle$  แสดงบทบาทเหมือนกับศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}$  ในปริภูมิจริง อนุพันธ์ของ  $\mathcal{A}_j$  เทียบกับ  $\theta_k$  ให้ความโค้ง  $\mathcal{F}_{jk}$  ซึ่งแสดงบทบาทเหมือนกับสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}$  ในปริภูมิจริง องค์ประกอบ  $xy$  คือ  $\mathcal{F}_{xy} = \partial\mathcal{A}_x/\partial\theta_y - \partial\mathcal{A}_y/\partial\theta_x$  เขียนในเทอมฟังก์ชันคลื่นได้เป็น

$$\mathcal{F}_{xy} = -i \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_y} \langle \psi_0 | \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta_x} \rangle - \frac{\partial}{\partial \theta_x} \langle \psi_0 | \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta_y} \rangle \right] \quad (7)$$

เปรียบเทียบกับสมการ (6) พบว่า ความนำไฟฟ้าฮอลล์  $\sigma_{xy} = (e^2/\hbar)\mathcal{F}_{xy}$  ทำการเฉลี่ยทั่วทั้งมุม  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  จะได้

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar} \int \frac{d\theta_x}{2\pi} \frac{d\theta_y}{2\pi} \mathcal{F}_{xy} \quad (8)$$

อินทิกรัลนี้มีลักษณะเหมือนกับอินทิกรัลของความโค้งเกาส์เซียน  $K$  ทั่วพื้นผิวปิดในปริภูมิจริงตามสมการ (3) เทอม  $d\theta_x d\theta_y$  คือชิ้นประกอบของพื้นผิว  $d^2\theta$  ของทรงห่วงยางในปริภูมิพารามิเตอร์ ความโค้ง  $\mathcal{F}_{xy}$  ของพื้นผิวในปริภูมิพารามิเตอร์แสดงบทบาทเป็นความโค้งเกาส์เซียน  $K$  ของพื้นผิวในปริภูมิจริง คล้ายคลึงกับทฤษฎีเกาส์-โบเนต แม้ว่าความโค้ง  $\mathcal{F}_{xy}$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แต่อินทิกรัลของ  $\mathcal{F}_{xy}$  ทั่วพื้นผิวปิดในปริภูมิพารามิเตอร์เป็นจำนวนเต็มซึ่งเรียกว่า จำนวนเชอร์ C (Chern number) เป็นสมบัติทอพอโลยี

$$\frac{1}{2\pi} \int d^2\theta \mathcal{F}_{xy} = C \quad (9)$$

ดังนั้นความนำไฟฟ้าฮอลล์

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C \quad (10)$$

ความต้านทานฮอลล์  $R_{xy} = h/Ce^2$  จำนวนเชอร์  $C$  เป็นจำนวนเต็ม ทำให้  $R_{xy}$  เปลี่ยนแปลงอย่างไม่ต่อเนื่องมีลักษณะเป็นขั้นบันไดตามรูปที่ 1x จำนวนเต็ม  $n$  ในผลการทดลองแท้จริงแล้วคือจำนวนเชอร์  $C$  การมีอะตอมอื่นเจือปนในชั้นตัวอย่างมากขึ้น ทำให้แฮมิลโทเนียนของระบบเปลี่ยนไป ส่งผลให้ฟังก์ชันคลื่นเปลี่ยนไป ทรงห่วงยางในปริภูมิพารามิเตอร์จึงบิดเบี้ยวไปเป็นรูปทรงอื่น เช่น ถ้วยกาแฟ แม้ว่าความโค้ง  $\mathcal{F}_{xy}$  จะเปลี่ยนไป แต่จำนวนเชอร์  $C$  ไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การบิดเบี้ยว นี่เป็นเหตุผลว่า ทำไมค่าความต้านทานฮอลล์ที่ขั้นบันไดยังคงเดิมไม่ขึ้นกับรายละเอียดของฟิสิกส์ เช่น อันตรกิริยาระหว่างอะตอมเจือปนกับอิเล็กตรอน เรขาคณิตของชั้นตัวอย่าง และเงื่อนไขขอบ เมื่อระบบอยู่ในสถานะที่ขั้นบันได ระบบจะมีภูมิคุ้มกันจากการรบกวนภายนอก แนวคิดนี้อาจเป็นวิธีรักษาสหพันธ์ (coherence) ระหว่างคิวบิต (qubits) ซึ่งเป็นหน่วยมูลฐานของคอมพิวเตอร์ควอนตัม

## บทสรุป

ต้นเหตุของการเกิดขั้นบันไดของความต้านทานฮอลล์  $R_{xy} = h/ne^2$  คือ จำนวนอิเล็กตรอนซึ่งครอบครองสถานะเฉพาะที่มากขึ้นหรือน้อยลงไม่มีผลต่อความต้านทานฮอลล์ ความต้านทานฮอลล์จึงมีค่าคงที่เมื่อพลังงานเฟอร์มีอยู่ในช่วงพลังงานของสถานะเฉพาะที่ นอกจากนี้ การคงที่ของความต้านทานฮอลล์ที่ขั้นบันไดยังเป็นการแสดงออกของสมบัติทอพอโลยี จำนวนเต็ม  $n = 1, 2, \dots$  ซึ่งระบุอันดับขั้นบันไดแท้จริงแล้วก็คือ จำนวนเชอร์ C กล่าวได้ว่า การเกิดขั้นบันไดอันดับต่างๆ เป็นการเปลี่ยนเฟสเชิงทอพอโลยีซึ่งไม่มีสมมาตรแตกปรากฏการณ์ควอนตัมฮอลล์ยังพบในระบบสองมิติอื่น เช่น แกรฟีน (Geim and Novoselov, 2007) อย่างไรก็ตาม อิเล็กตรอนในแกรฟีนมีความเร็วคงที่ไม่ขึ้นกับโมเมนตัม คล้ายคลึงกับความเร็วแสงที่คงที่ของโฟตอน อิเล็กตรอนในแกรฟีนประพฤติตัวราวกับเป็นอนุภาคเฟอร์มีออนมีมวลเป็นศูนย์และคำนึงถึงผลทางสัมพันธภาพพิเศษ อิเล็กตรอนที่อยู่ลึกเข้าไปในชั้นตัวอย่างโคจรเป็นวงซินโคตรอน ไม่สามารถเคลื่อนที่ไปไกล จึงถือว่าเป็นฉนวน แต่อิเล็กตรอนที่ขอบของชั้นตัวอย่าง วงโคจรจะไม่ครบรอบเหลือเพียงครึ่งวงกลมเพราะชนกับขอบเสียก่อน การต่อกันของครึ่งวงกลมดังกล่าวทำให้อิเล็กตรอนสามารถเคลื่อนที่จากด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งได้ จึงถือว่าเป็นตัวนำ กล่าวคือ สสารเป็นฉนวนข้างในแต่เป็นตัวนำที่ขอบ นี่เป็นตัวอย่างแรกของฉนวนทอพอโลยี สนามแม่เหล็กที่ใช้ในปรากฏการณ์ควอนตัมฮอลล์ต้องแรงถึง 10 T ในตัวอย่างอื่นของฉนวนทอพอโลยี เราใช้การคู่ควบสปิน-ออบิต (spin-orbit coupling) แทนสนามแม่เหล็ก

## เอกสารอ้างอิง

- Carmo, M.P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. New Jersey: Prentice-Hall. pp. 264-282.
- Geim, A.K. and Novoselov, K.S. (2007). The rise of graphene. *Nature Materials* 6: 183-191.
- Klitzing, K.V., Dorda, G. and Pepper, M. (1980). New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Physical Review Letters* 45: 494-497.
- Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. (1965). *Quantum mechanics*. Oxford: Pergamon Press. pp. 424-427.
- Laughlin, R.B. (1981). Quantized Hall conductivity in two dimensions. *Physical Review B* 23: 5632-5633.
- Paalonen, M., Tsui, D. and Gossard, A. (1982). Quantized Hall effect at low temperatures. *Physical Review B* 25: 5566-5569.
- Thouless, D.J., Kohmoto, M., Nightingale, M.P. and Nijss, M. (1982). Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters* 49: 405-408.

