



การเปรียบเทียบความไวของแผนภูมิควบคุม EWMA Max-GWMA และ Max-CUSUM สำหรับการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

Sensitivity Comparison of EWMA Max-GWMA and Max-CUSUM Control Charts for Exponential distribution

คณิตา เพ็ชรรัตน์

ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800

E-mail: kanita.p@sci.kmutnb.ac.th

Received: 1 December 2017 | Revised: 4 July 2018 | Accepted: 18 January 2019

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อเปรียบเทียบความไวของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average Control Chart : EWMA) แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบทั่วไปสูงสุด (Maximum Generally Weighted Moving Average Control : Max-GWMA) และ แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมสูงสุด (Maximum Cumulative Sum Control Chart : Max-CUSUM) สำหรับแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมใช้ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length : ARL) ซึ่งงานวิจัยใช้เทคนิคการจำลองแบบมอนติ-คาร์โล ในการประมาณค่า ARL โดยทำซ้ำ 10,000 รอบ ผลการวิจัยพบว่าเมื่อค่าสังเกตมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 0.01$ แผนภูมิควบคุม EWMA จะมีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก ($\delta = 0.01 - 0.06$) และแผนภูมิควบคุม Max-GWMA ที่ $\omega = 0.6$ จะมีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดกลาง ($\delta = 0.07 - 0.1$) ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 0.2$ แผนภูมิควบคุม Max-GWMA ที่ $\omega = 0.8$ จะมีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก ($\delta = 0.01 - 0.05$) และแผนภูมิควบคุม EWMA จะมีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดกลาง ($\delta = 0.06 - 0.1$)

ABSTRACT

The objective of this article is to compare the sensitivity of EWMA Max-GWMA and Max-CUSUM control charts for exponential distribution. The performance of control charts are measured by average run length (ARL). Monte-Carlo simulation method is used for evaluate ARL of EWMA Max-GWMA and Max-CUSUM control charts with 10,000 iterations. The results show that when process when observations are exponential distribution, for $\lambda = 0.01$ EWMA control chart is sensitive for small changes ($\delta = 0.01 - 0.06$) and Max-GWMA control chart with $\omega = 0.6$ is sensitive for moderate changes ($\delta = 0.07 - 0.1$). For $\lambda = 0.2$ Max-GWMA control chart with $\omega = 0.8$ is sensitive for small changes ($\delta = 0.01 - 0.05$) and EWMA control chart is sensitive for moderate changes ($\delta = 0.06 - 0.1$).

คำสำคัญ: แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบทั่วไปสูงที่สุด
แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมสูงที่สุด ความยาววิ่งเฉลี่ย

Keywords: EWMA, MAX-GWMA, MAX-CUSUM, Average Run Length

บทนำ

ในทางอุตสาหกรรม การควบคุมคุณภาพของกระบวนการผลิต และผลิตภัณฑ์มีความสำคัญมาก เพราะเป็นเครื่องมือที่ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพการผลิต และสามารถลดข้อบกพร่องต่าง ๆ ส่งผลให้ปริมาณของเสียที่เกิดขึ้นในกระบวนการผลิตมีปริมาณลดลง เครื่องมือทางสถิติที่นิยมใช้ในการควบคุมกระบวนการผลิตในอุตสาหกรรมคือ แผนภูมิควบคุม (Control Chart) เนื่องจากเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพและสามารถแสดงผลได้อย่างชัดเจน เมื่อกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลง เช่น การเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน แผนภูมิควบคุมที่ดีต้องสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้อย่างรวดเร็ว ทำให้สามารถหยุดกระบวนการและทำการปรับปรุงให้กระบวนการกลับสู่สภาวะปกติ ส่งผลให้ปริมาณของเสียในกระบวนการผลิตลดลง แผนภูมิควบคุมที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวางคือ แผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ท (Shewhart control chart) ซึ่งเป็นแผนภูมิควบคุมที่ใช้ตรวจจับในกรณีที่กระบวนการมีการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ แต่ในกรณีที่กระบวนการมีการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กแผนภูมิที่นิยมใช้ได้แก่ แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average : EWMA) และแผนภูมิผลรวมสะสม (Cumulative Sum : CUSUM) ซึ่งแผนภูมิดังกล่าวไม่สามารถตรวจจับการเกิดความผันแปรจากค่าเฉลี่ยและการกระจายได้พร้อมกัน Hawkins (1993) นำเสนอแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยและการกระจาย โดยทำการพล็อตค่าสถิติทั้งสองค่าในแผนภูมิเดียว แต่วิธีการนี้ไม่สะดวกในการใช้งาน Cheng และ Cheng (1998) นำเสนอแผนภูมิ Max-Chart สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปรกติ ซึ่งสามารถตรวจจับ ค่าเฉลี่ย และการกระจายของกระบวนการ โดยใช้การพล็อตค่าตัวแปรเพียงตัวเดียว และพบว่าสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กในกระบวนการได้อย่างรวดเร็ว Chen และคณะ (2001) ได้นำเสนอแผนภูมิควบคุม Max-EWMA ซึ่งเป็นการรวมแผนภูมิควบคุม EWMA เพื่อทำการตรวจจับค่าเฉลี่ย และการกระจาย ของกระบวนการภายในแผนภูมิเดียว และพบว่าสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงในกระบวนการเพียงเล็กน้อยได้อย่างมีประสิทธิภาพ Cheng และ Thaga (2011) ได้ทำการเสนอแผนภูมิ Max-CUSUM สำหรับตรวจจับค่าเฉลี่ย และการกระจายของค่าสังเกตของกระบวนการที่มีการแจกแจงแบบปรกติ จากนั้นเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิ Max-CUSUM กับแผนภูมิ Max-EWMA และ Max-Chart พบว่า แผนภูมิ Max-CUSUM มีประสิทธิภาพดีที่สุดในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย และการกระจายของค่าสังเกตของกระบวนการ Sheu และคณะ (2012) ได้นำเสนอแผนภูมิ Max-GWMA สำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของกระบวนการ เมื่อกระบวนการมีการแจกแจงแบบปรกติ โดยทำการเปรียบเทียบกับแผนภูมิควบคุม Max-EWMA พบว่าแผนภูมิควบคุม Max-GWMA มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม Max-EWMA ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนของกระบวนการ โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุม Max-GWMA (q) มีค่าเท่ากับ 0.95 การศึกษาวิจัยโดยทั่วไปค่าสังเกตของกระบวนการจะมีการแจกแจงแบบปรกติ แต่ในทางปฏิบัติค่าสังเกตที่เกิดขึ้นจากกระบวนการผลิตสามารถมีการแจกแจงที่หลากหลาย เช่น Derya และ Cannan (2012) ทำการศึกษาแผนภูมิควบคุมสำหรับกระบวนการที่มีการแจกแจงแบบเบ้ ได้แก่ ไวบูล แกมมา และ ล็อกนอร์มอล พบว่าเมื่อกระบวนการมีการแจกแจงแบบเบ้ประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการจะลดลง Panyem (2013) ได้ทำการเปรียบเทียบแผนภูมิควบคุม Max-EWMA และ Max-GWMA ในกรณีที่ค่าสังเกตมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังพบว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก แผนภูมิควบคุม Max-EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย ได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม Max-GWMA แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ แผนภูมิควบคุม Max-EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กได้ดีกว่า และ Max-GWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยที่มีขนาดใหญ่ได้ดีกว่า

ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจนำแผนภูมิควบคุมคุณภาพ 3 ชนิด ได้แก่ แผนภูมิ EWMA แผนภูมิ Max-GWMA และ แผนภูมิ Max-CUSUM โดยนำมาเปรียบเทียบประสิทธิภาพการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยขนาดเล็ก ๆ เมื่อกระบวนการมีการแจกแจงแบบชี้กำลัง ลักษณะการแจกแจงดังกล่าวได้แก่ อายุการใช้งานของผลิตภัณฑ์ เวลาที่ใช้ในการรอคอยรับบริการซึ่งมีการประยุกต์ใช้มากในทฤษฎีแถวคอย ทั้งนี้เพื่อให้ผู้ใช้สามารถเลือกใช้แผนภูมิควบคุมที่เหมาะสมกับการใช้งานและเกิดประสิทธิภาพมากที่สุดในแต่ละสถานการณ์ โดยงานวิจัยนี้จะใช้ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) เป็นเกณฑ์สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม

วิธีการดำเนินการวิจัย

1. ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

งานวิจัยนี้ใช้การจำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ด้วยพารามิเตอร์ α เขียนแทนด้วย $X \sim Exp(\alpha)$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability density function : pdf) ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} & ; x > 0 \\ 0 & ; other \end{cases}$$

โดยที่ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X คือ $E(X)$ มีค่าเท่ากับ α และค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X คือ $V(X)$ มีค่าเท่ากับ α^2

2. แผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการศึกษา

แผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการศึกษานี้ ได้แก่

2.1 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average Control Chart: EWMA)

แผนภูมิควบคุม EWMA เสนอครั้งแรกโดย Robert ในปี 1959 เพื่อใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยขนาดเล็ก โดยค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA คือ

$$\xi_t = (1-\lambda)\xi_{t-1} + \lambda X_t, \quad t=1,2,\dots$$

เมื่อ ξ_t คือ สถิติ EWMA ณ เวลา t เมื่อกำหนด $\xi_0 = \alpha_0$

X_t คือ ค่าสังเกตที่มีการแจกแจงชี้กำลัง ณ เวลา t เมื่อ $t = 1,2,3,\dots$

λ คือ ค่าพารามิเตอร์ของตัวสถิติ EWMA โดย $0 < \lambda \leq 1$

เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม $X_t : Exp(\alpha_0)$ ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA ออกนอกเขตควบคุมเมื่อ $|\xi_t| > b$ เมื่อ b คือ ขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุม EWMA

2.2 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบทั่วไปสูงสุด (Maximum Generally Weighted Moving Average Control : Max-GWMA)

แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบทั่วไปสูงสุดเป็นแผนภูมิควบคุมที่นำเสนอครั้งแรกโดย Sheu และ Lin (2003) ซึ่งพัฒนาวิธีการมาจากแผนภูมิควบคุม EWMA ซึ่งแผนภูมิควบคุม Max-GWMA ได้จากการรวมแผนภูมิควบคุม Max-EWMA และตัวสถิติ GWMA เข้าด้วยกัน กำหนดให้ $X_i = X_{i1}, \dots, X_{in}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = \mu_0$ และความแปรปรวน σ_0 จะได้ว่า $\bar{X}_i$ และ S_i^2 เป็นค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของตัวอย่าง กลุ่มที่ i ตามลำดับ

$$\text{โดยที่ } \bar{X}_i = \frac{(X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})}{n} \text{ และ } S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}$$

ตัวค่าสถิติ Max-GWMA สามารถแสดงได้ดังนี้

$$MG_i = \max\{|G_i|, |H_i|\}$$

โดยที่ $G_i = P(M=1)U_i + P(M=2)U_{i-1} + \dots + P(M=i)U_1 + P(M>i)G_0, i=1, 2, \dots$

$$H_i = P(M=1)V_i + P(M=2)V_{i-1} + \dots + P(M=i)V_1 + P(M>i)H_0, i=1, 2, \dots$$

ดังนั้น $U_i = \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n_i}}$ และ $V_i = \phi^{-1}\left\{F\left[\frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma^2}, n_i-1\right]\right\}$

เมื่อ M แทนค่าของข้อมูลในอดีตและปัจจุบัน

G_0 คือ ค่าเริ่มต้นของค่าสถิติ G_i กำหนดให้ $G_0 = 0$

H_0 คือ ค่าเริ่มต้นของค่าสถิติ H_i กำหนดให้ $H_0 = 0$

$\bar{X}_i$ คือ ค่าเริ่มต้น

เนื่องจาก U_i และ V_i เป็นอิสระกัน ดังนั้น G_i และ H_i จึงเป็นอิสระกันด้วย ซึ่งจะได้ว่า $G_i : N(0, \sigma_{G_i}^2)$ และ

$H_i : N(0, \sigma_{H_i}^2)$ เมื่อ $\sigma_{G_i}^2 = \sigma_{H_i}^2 = Q_i = \sum_{j=1}^i [P(M=j)]^2$ ดังนั้น เพื่อให้สะดวกในการคำนวณ $P(M>i) = q^{i^w}$ จะได้ว่า

$P(M=i) = q^{(i-1)^w} - q^{i^w}$ เมื่อ $i=1, 2, 3, \dots$, q เป็นค่าคงที่โดยที่ $0 \leq q \leq 1$, $q=1-\lambda$ และ w เป็นค่าพารามิเตอร์ โดยที่ $w > 0$

ขีดจำกัดของแผนภูมิควบคุม Max-GWMA คือ

$$\text{ขีดจำกัดควบคุมบน} \quad UCL_{MG} = E(MG_i) + L_{MG} \sqrt{\text{Var}(MG_i)}$$

$$\text{ขีดจำกัดควบคุมล่าง} \quad LCL_{MG} = 0$$

เมื่อ $E(MG_i)$ แทนค่าเฉลี่ยของ MG_i

$\text{Var}(MG_i)$ แทนความแปรปรวนของ MG_i

L_{MG} แทนความกว้างของขอบเขตการควบคุมเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม

2.3 แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมสูงสุดที่สุด (Maximum Cumulative Sum Control Chart: Max-CUSUM)

Cheng และ Thaga (2011) พัฒนาควบคุม CUSUM ไปประยุกต์ใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงในค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกระบวนการ โดยเรียกแผนภูมิดังกล่าวว่าแผนภูมิควบคุม Max-CUSUM ค่าสถิติ Max-CUSUM ของกระบวนการผลิต แสดงได้ดังนี้ กำหนดให้ $X_i = X_{i1}, \dots, X_{in}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = \mu_0$ และความแปรปรวน σ_0 จะได้ว่า $\bar{X}_i$ และ S_i^2 เป็นค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของตัวอย่าง กลุ่มที่ i ตามลำดับ

$$\text{โดยที่} \quad \bar{X}_i = \frac{(X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})}{n} \quad \text{และ} \quad S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad Z_i = \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_i - \mu_0)}{\sigma_0} \quad \text{และ} \quad Y_i = \Phi^{-1} \left\{ H \left[\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2}, n-1 \right] \right\}$$

เมื่อ $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน $Z : N(0,1)$ ดังนั้น Φ^{-1} คือฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Z : N(0,1)$ และ $H(w; p) = P(W \leq w | p)$ ดังนั้น W มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi square distribution) ที่มียอดอิสระเท่ากับ p นั่นคือ $W : \chi_p^2$

ฟังก์ชัน Z_i และ Y_i เป็นอิสระกัน และ Y_i มีการแจกแจงแบบปรกติมาตรฐาน ค่าสถิติ Max-CUSUM ที่ขึ้นกับ ฟังก์ชัน Z_i และ Y_i คือ

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max[0, Z_i - k + C_{i-1}^+] \\ C_i^- &= \max[0, -Z_i - k + C_{i-1}^-] \\ S_i^+ &= \max[0, Y_i - k + S_{i-1}^+] \\ S_i^- &= \max[0, -Y_i - k + S_{i-1}^-] \end{aligned}$$

เมื่อ C_0 และ S_0 เป็นค่าเริ่มต้น ดังนั้น ค่าสถิติ Max-CUSUM สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$M_i = \max[C_i^+, C_i^-, S_i^+, S_i^-]$$

จะออกนอกเขตควบคุมเมื่อ $M_i > h$ เมื่อ h แทนขีดจำกัดควบคุม และ k คือ ค่าอ้างอิง (Reference value)

3. เกณฑ์ใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพ

เกณฑ์ที่นิยมในการประมาณประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมคือ ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) (Montgomery, 2009) ซึ่งความยาววิ่งเฉลี่ย คือ จำนวนค่าสังเกตโดยเฉลี่ยที่ต้องการตรวจสอบจนกระทั่งพบค่าสังเกตที่อยู่นอกเหนือการควบคุม โดยกำหนดให้ ARL_0 แทนกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (In-Control State) และ ARL_1 แทนกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม (Out-of-Control State) โดยค่า ARL_0 และ ARL_1 สามารถคำนวณได้ดังต่อไปนี้ เมื่อกระบวนการผลิตอยู่ภายใต้การควบคุม $ARL_0 = \frac{1}{\rho}$ เมื่อ ρ คือความน่าจะเป็นของความผิดพลาดประเภทที่ 1 (Type I error) และเมื่อกระบวนการผลิต

ไม่อยู่ภายใต้การควบคุม $ARL_1 = \frac{1}{1-\gamma}$ เมื่อ γ คือความน่าจะเป็นของความผิดพลาดประเภทที่ 2 (Type II error)

งานวิจัยนี้จะพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำที่สุดเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพและสรุปผลการดำเนินงาน ซึ่งคำนวณได้จากการนำข้อมูลที่จำลองขึ้นมาตรวจจับด้วยแผนภูมิควบคุม EWMA Max-GWMA และ Max-CUSUM กำหนดจำนวนการทำซ้ำมีค่าเท่ากับ 10,000 รอบ โดยที่ค่า ARL คำนวณได้ดังนี้

$$ARL = \sum_{i=1}^M \frac{RL_i}{M}$$

เมื่อ RL_i แทนความยาววิ่งในแต่ละรอบของการทำซ้ำ

M แทนจำนวนรอบของการทำซ้ำ

ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการผลิตอยู่ภายใต้การควบคุม (In-Control Process) แทนด้วยสัญลักษณ์ ARL_0 หมายถึง จำนวนชุดตัวอย่างโดยเฉลี่ยที่ต้องใช้ในการตรวจสอบจนกว่าตัวสถิติตัวหนึ่งตัวใดจะเริ่มออกนอกขีดจำกัดควบคุมภายใต้สภาวะการณ์ที่ค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตยังไม่เปลี่ยนแปลงหรือเป็นค่าเริ่มต้น (α_0)

ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการผลิตอยู่นอกการควบคุม (Out-of-Control Process) แทนด้วยสัญลักษณ์ ARL_1 หมายถึง จำนวนชุดตัวอย่างโดยเฉลี่ยที่ต้องใช้ในการตรวจสอบจนกว่าตัวสถิติตัวหนึ่งตัวใดจะเริ่มออกนอกขีดจำกัดควบคุมภายใต้สภาวะการณ์ที่ค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตมีการเปลี่ยนแปลงไปในระดับต่าง ๆ (α_1)

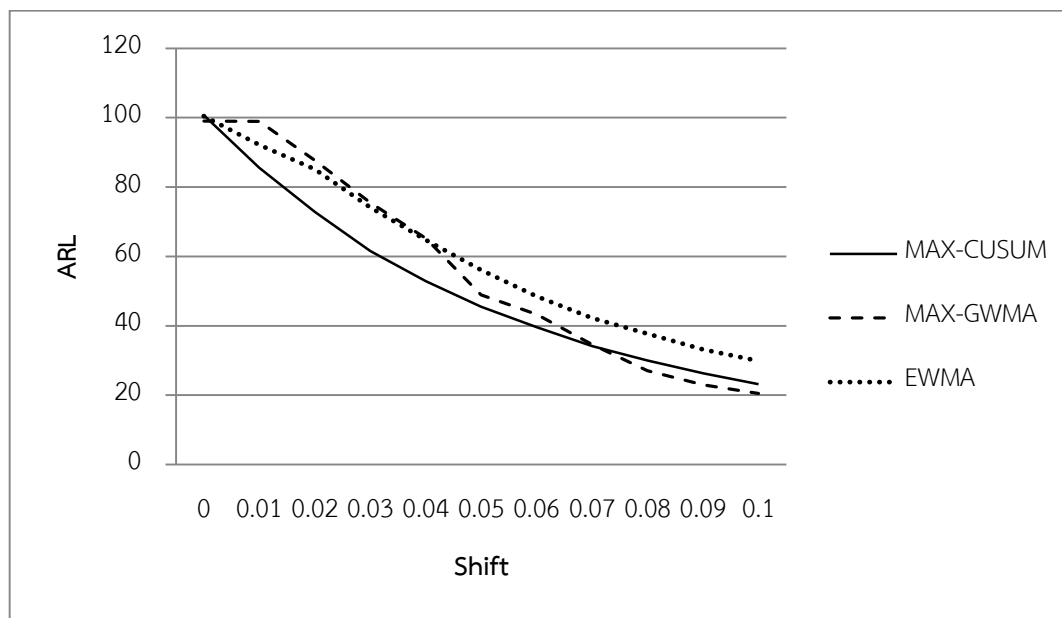
ผลงานวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบความไวในการการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการระหว่างแผนภูมิควบคุม EWMA Max-GWMA และ Max-CUSUM ในกรณีที่ข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง กำหนดค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการ (α) เมื่อกระบวนการผลิตอยู่ภายใต้การควบคุม (In-Control Process) กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\alpha = \alpha_0$ และเมื่อกระบวนการออกนอกการควบคุม (Out-of Control Process) กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\alpha = \alpha_1$ โดยที่ $\alpha_1 = \alpha_0 + \delta$ เมื่อ δ คือ

ระดับของการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย โดยระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยเพิ่มขึ้นทีละ 0.01 ตั้งแต่ 0.01 – 0.1 เกณฑ์การประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมจะพิจารณาจากค่า ARL โดยพิจารณาว่าค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการผลิตออกนอกการควบคุม (ARL_1) ของแผนภูมิควบคุมใดที่มีค่า ARL_1 ต่ำที่สุดจะถือว่าแผนภูมิควบคุมนี้มีประสิทธิภาพดีที่สุด

ตารางที่ 1 ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA MAX-GWMA และ MAX-CUSUM เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 100$

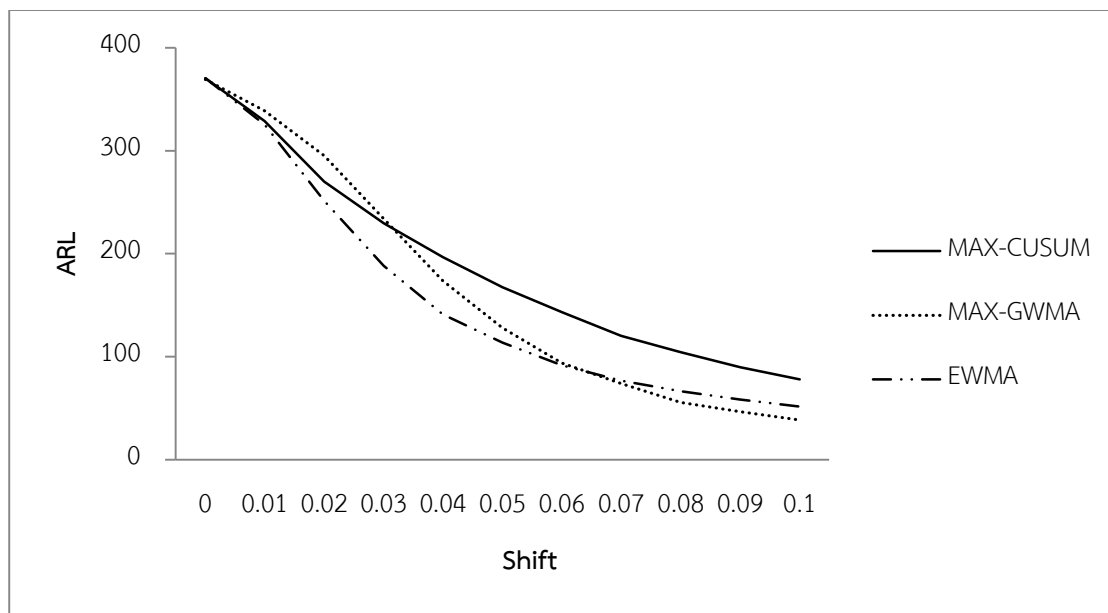
Shift(δ)	EWMA $\lambda=0.01, L_2=0.365$	MAX-GWMA $q=0.99, \omega=0.6, L_1=0.82$	MAX-CUSUM $k=1.5, h=1.354$
0	100.488	99.001	100.666
0.01	92.162	98.932	85.4989
0.02	85.085	87.680	72.798
0.03	74.158	75.480	61.565
0.04	64.777	65.246	52.865
0.05	56.045	48.921	45.462
0.06	48.478	43.283	39.550
0.07	42.212	34.589	34.160
0.08	37.671	27.058	30.039
0.09	33.146	22.970	26.271
0.1	29.830	20.452	23.152



รูปที่ 1 ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA MAX-GWMA และ MAX-CUSUM เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 100$

ตารางที่ 2 ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA MAX-GWMA และ MAX-CUSUM เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370$

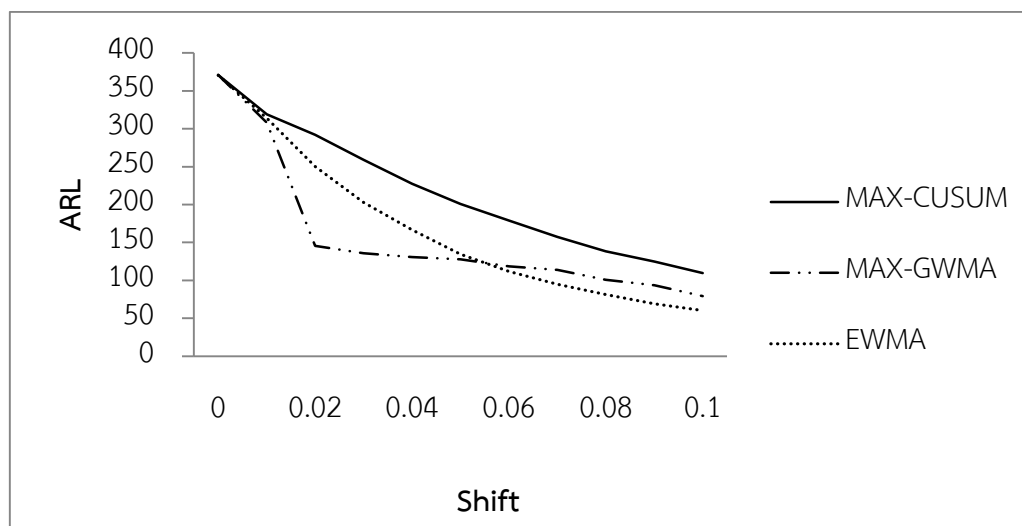
Shift(δ)	EWMA	MAX-GWMA	MAX-CUSUM
	$\lambda = 0.01, L_2=0.582$	$q=0.99, \omega=0.6, L_1=0.50$	$k=0.8, h=3.585$
0.00	370.467	369.078	370.464
0.01	325.538	338.692	328.755
0.02	251.424	295.365	270.051
0.03	188.444	234.010	229.661
0.04	140.983	173.644	196.576
0.05	113.594	127.883	167.492
0.06	91.774	93.709	143.177
0.07	76.844	73.8234	120.101
0.08	66.515	55.521	104.471
0.09	58.379	46.403	89.800
0.1	51.451	38.435	77.887



รูปที่ 2 ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA MAX-GWMA และ MAX-CUSUM เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370$

ตารางที่ 3 ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA MAX-GWMA และ MAX-CUSUM เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370$

Shift(δ)	EWMA $\lambda = 0.2, L_2=0.943$	MAX-GWMA $q=0.8, \omega=0.8, L_1=5.5$	MAX-CUSUM $k = 1.5, h=2.183$
0.00	370.673	371.1026	370.803
0.01	314.027	308.073	319.080
0.02	250.225	145.491	291.988
0.03	202.904	136.052	258.983
0.04	166.624	130.613	227.280
0.05	134.442	127.644	200.859
0.06	111.950	118.555	178.733
0.07	95.059	113.847	157.415
0.08	81.515	100.961	138.253
0.09	69.297	93.640	124.739
0.1	60.506	79.481	109.583



รูปที่ 3 ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA MAX-GWMA และ MAX-CUSUM เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370$

จากตารางที่ 1 กำหนดให้ $ARL_0 = 100$ $\lambda = 0.01$ พบว่า แผนภูมิควบคุม Max-CUSUM มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่ระดับ 0.01-0.07 ในขณะที่แผนภูมิควบคุม Max-GWMA ที่ $q=0.99$ และ $\omega=0.6$ มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่ระดับ 0.08 - 1.0 แสดงได้ดังรูปที่ 1 จากตารางที่ 2 กำหนดให้ $ARL_0 = 370$ พบว่า แผนภูมิควบคุม EWMA ที่ $\lambda = 0.01$ มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่ระดับ 0.01 - 0.06 ในขณะที่แผนภูมิควบคุม Max-GWMA ที่ $q=0.99$ และ $\omega=0.6$ มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่ระดับ 0.07 - 1.0 แสดงได้ดังรูปที่ 2 จากตารางที่ 3 กำหนดให้ $ARL_0 = 370$ พบว่า Max-GWMA ที่ $q=0.8$ และ $\omega=0.8$ มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่ระดับ 0.01 - 0.05 ในขณะที่แผนภูมิควบคุม EWMA ที่ $\lambda = 0.2$ มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่ระดับ 0.06 - 1.0

สรุปผลการวิจัย

จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA Max-GWMA และ Max-CUSUM โดยพิจารณาค่า ARL_1 เป็นเกณฑ์ในการประเมินประสิทธิภาพ สรุปได้ดังนี้ ในกรณีที่ กำหนด $ARL_0 = 100$ แผนภูมิควบคุม MAX-CUSUM มีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก และแผนภูมิควบคุม MAX-GWMA มีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดกลาง ในกรณีที่ กำหนด $ARL_0 = 370$ แผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อ $\lambda = 0.01$ มีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก และแผนภูมิควบคุม Max-GWMA ที่ $q=0.99$ $\omega=0.6$ จะมีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดกลาง แต่เมื่อ $\lambda = 0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับ $q=0.8$ พบว่า แผนภูมิควบคุม Max-GWMA เมื่อ $\omega=0.8$ มีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก ในขณะที่แผนภูมิควบคุม EWMA มีความไวในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาด

จากผลการวิจัยจะพบว่า ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม Max-GWMA จะขึ้นกับพารามิเตอร์ q และ ω ซึ่งสามารถกำหนดได้หลากหลาย ภายใต้เงื่อนไข $0 < q < 1$ และ $\omega > 0$ นอกจากนี้ยังอาจทำการศึกษาในการแจกแจงแบบเบ้ชนิดอื่นที่มักพบในทางอุตสาหกรรม เช่น การแจกแจงไวบูล ซึ่งเป็นลักษณะการแจกแจงของอายุการใช้งานผลิตภัณฑ์ และ การแจกแจงแกมมา ซึ่งเป็นลักษณะการแจกแจงของเวลาที่ใช้ในการซ่อมเครื่องจักร เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

- Chen, G., Cheng, G.W. and Xie, H. (2001). Monitoring process mean and variability with one EWMA chart. *Journal of quality technology* 33: 223-333.
- Cheng, S. W. and Cheng, G. W. (1998). Max-chart: Combining X-bar chart and S chart. *Statistica Sinica* 8: 263-271.
- Cheng, S. W. and Thaga, K. (2011). The Max-CUSUM Chart. In: Lenz HJ., Wilrich PT., Schmid W. (eds) *Frontiers in Statistical Quality Control* 9. Physica-Verlag HD: 85-98.
- Derya, K. and Canan, H. (2012). Control charts for skewed distributions. *Metodološki zvezki* 9(2): 95-106.
- Hawkins, D. M. (1993). Cumulative sum control charting. An underutilized SPC tool. *Quality Engineering* 5: 51-59.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th ed., New York: John Wiley & Sons. pp. 191-193.
- Phanyem, S. (2013). An evaluation of average run length of MAX-EWMA and MAX-GWMA Charts. *International Journal of Mathematical, computational, physical and quantum engineering* 8: 777-780.
- Robert, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving average. *Technometrics* 1: 239-250.
- Sheu, S. H. and Lin, T. C. (2003). The generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean. *Quality Engineering* 16: 209-231.
- Sheu, S. H, Huang, C. J. and Hsu, T. S. (2012). Extended maximum generally weighted moving average control chart for monitoring process mean and variability. *Computers & Industrial Engineering* 62: 216-225.

