ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่ของค่าเฉลี่ยประชากร ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย

A Modified Dual to Product Estimator of Population Mean in Simple Random Sampling

พัชรี วงษ์เกษม
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา อ.เมือง จ.ชลบุรี 20131
E-mail: wongkasem@buu.ac.th

บทคัดย่อ

การศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรโดยปรับจากตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980) ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายชนิดไม่คืนที่ พร้อมทั้งหาความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณที่นำเสนอ และเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณที่นำเสนอกับตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980) Sharma and Tailor (2010) Choudhury and Singh (2012a) Choudhury and Singh (2012b) และ Adebola and Adegoke (2015) จากการศึกษาพบว่า ตัวประมาณที่นำเสนอมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณเหล่านี้อย่างมีเงื่อนไข และผลการคำนวณเชิงตัวเลขสอดคล้องกับผลการศึกษาเชิงทฤษฎี

ABSTRACT

This study is aim to propose the modified dual to product estimator for population mean by adapting Bandyopadhyay's (1980) estimator for simple random sampling without replacement. We will compare bias and mean square error (MSE) equations obtained with this proposed estimator with Bandyopadhyay's (1980) estimator, Sharma and Tailor's (2010) estimator, Choudhury and Singh's (2012a) estimator, Choudhury and Singh's (2012b) and Adebola and Adegoke's (2015). It is found that the proposed estimator is more efficient than these estimators under some conditions. In addition our results are supported by a numerical illustration.

คำสำคัญ: ตัวประมาณแบบผลคูณ ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กัน ความเอนเอียง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
Keywords: Product estimator, Dual to product estimator, Bias, Mean square error

บทนำ

โดยทั่วไปทฤษฎีการสำรวจตัวอย่างจะใช้การเลือกตัวอย่างแบบใช้ความน่าจะเป็น ในปัจจุบันการเลือกตัวอย่างเพื่อศึกษาคุณลักษณะของประชากรมีความสำคัญต่องานวิจัยในด้านต่าง ๆ ซึ่งส่วนมากประชากรที่ต้องการศึกษามักมีขนาดใหญ่ จึงยากต่อการที่จะสำรวจได้ทั้งหมด เนื่องจากข้อจำกัดในด้านต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ด้านเวลา ด้านงบประมาณ และด้านอื่น ๆ ทั้งนี้การทำให้ข้อมูลตัวอย่างมีคุณลักษณะใกล้เคียงกับประชากรมากที่สุด และตัวอย่างเป็นตัวแทนที่ดีของประชากรนั้นต้องอาศัยเทคนิคการเลือกตัวอย่าง (Sampling technique) โดยนำข้อมูลตัวอย่างไปวิเคราะห์และสรุปผลถึงคุณลักษณะของประชากรที่ต้องการศึกษาได้อย่างเหมาะสม

พิจารณาการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายชนิดไม่คืนที่ โดยสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรขนาด N ให้ Y เป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา โดยที่ค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ประมาณด้วยค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{y}$ ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาและไม่เอนเอียงของ $\bar{Y}$ ในทฤษฎีการสำรวจตัวอย่าง หากทราบว่าตัวแปร Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับตัวแปรช่วย X และทราบค่าของสารสนเทศของตัวแปร X เช่น ค่าเฉลี่ย $\bar{X}$ หรือค่ารวม T_X เป็นต้น เราอาจสร้างตัวประมาณรูปแบบอื่นที่นำสารสนเทศดังกล่าวมาใช้ ซึ่งอาจทำให้ได้ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ดีขึ้น ในกรณีที่ตัวแปร Y และตัวแปร X มีความสัมพันธ์เชิงเส้นในทิศทางเดียวกัน Cochran (1940) เสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วน เมื่อ $\bar{X}$ ทราบค่า ดังนี้

$$\bar{y}_R = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right) \tag{1}$$

ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_R$ คือ

$$B(\bar{y}_R) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}(C_X^2 - \rho C_Y C_X) \tag{2}$$

และ

$$MSE(\bar{y}_R) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2(C_Y^2 + C_X^2 - 2\rho C_Y C_X) \tag{3}$$

ตามลำดับ เมื่อ $f = \frac{n}{N}$ คือ สัดส่วนของตัวอย่าง (Sampling fraction) ทั้งนี้พบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_R$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$ ก็ต่อเมื่อ $\rho > C_X/2C_Y$ โดยที่ C_Y และ C_X คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปร Y และตัวแปร X และ ρ คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากรระหว่างตัวแปร Y และตัวแปร X

ต่อมา Murthy (1964) เสนอตัวประมาณแบบผลคูณ ในกรณีที่ตัวแปร Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นในทิศทางตรงข้ามกับตัวแปร X และทราบค่า $\bar{X}$ คือ

$$\bar{y}_P = \bar{y}\left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\right) \tag{4}$$

ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_P$ คือ

$$B(\bar{y}_P) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}(C_X^2 + \rho C_Y C_X) \tag{5}$$

และ

$$MSE(\bar{y}_P) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2(C_Y^2 + C_X^2 + 2\rho C_Y C_X) \tag{6}$$

ตามลำดับ ทั้งนี้พบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_P$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$ ก็ต่อเมื่อ $\rho < -C_X/2C_Y$

ในกรณีที่ทราบค่า $\bar{X}$ พิจารณาการแปลง $x_i^* = \frac{N\bar{X}-nx_i}{N-n}; i = 1,2,\ldots,N$ แล้ว $\bar{x}^* = \frac{N\bar{X}-n\bar{x}}{N-n}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ $\bar{X}$ และ $Corr(\bar{y},\bar{x}^*) = -\rho$ เมื่อ $Corr(\bar{y},\bar{x}^*)$ คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{y}$ และ $\bar{x}^*$ นักวิจัยท่านแรกที่ใช้การแปลงของ x_i^* มาปรับตัวประมาณที่ใช้ประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ได้แก่ Srivenkataramana (1980) ซึ่ง Srivenkataramana (1980) ได้เสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนคู่กัน (Dual to ratio estimator) ดังนี้

$$\bar{y}_R^* = \bar{y}\left(\frac{\bar{x}^*}{\bar{X}}\right) \tag{7}$$

ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_R^*$ คือ

$$B(\bar{y}_R^*) \cong -\frac{1-f}{n}\bar{Y}gC_X^2K \tag{8}$$

และ

$$MSE(\bar{y}_R^*) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2 + gC_X^2(g-2K)] \tag{9}$$

ตามลำดับ เมื่อ $g = \frac{n}{N-n}$ และ $K = \rho\frac{C_Y}{C_X}$ ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_R^*$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$ ก็ต่อเมื่อ $\rho > g\,C_X/2C_Y$

ในปีเดียวกันนี้ Bandyopadhyay (1980) ได้ใช้การแปลงนี้เช่นกัน เสนอตัวประมาณแบบผลคูณคู่กัน (Dual to product estimator) เมื่อ $\bar{X}$ ทราบค่า ดังนี้

$$\bar{y}_P^* = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}^*}\right) \tag{10}$$

ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_P^*$ คือ

$$B(\bar{y}_P^*) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}gC_X^2(g+K) \tag{11}$$

และ

$$MSE(\bar{y}_P^*) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2 + gC_X^2(g+2K)] \tag{12}$$

ตามลำดับ ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_P^*$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$ ก็ต่อเมื่อ $\rho < -gC_X/2C_Y$

ในเวลาต่อมาได้มีนักวิจัยเสนอตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายไม่คืนที่โดยนำตัวประมาณของ Srivenkataramana (1980) และตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980) มาปรับ ดังเช่น

Sharma and Tailor (2010) เสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนรวมกับผลคูณคู่กัน (Ratio-cum-dual to ratio estimator) เมื่อทราบค่า $\bar{X}$ ดังนี้

$$\hat{\bar{Y}}_{bk1} = \bar{y}\left[\alpha\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\bar{x}^*}{\bar{X}}\right)\right] \tag{13}$$

ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{bk1}$ คือ

$$B(\hat{\bar{Y}}_{bk1}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}C_X^2\left[\alpha - \{(1-g)\alpha + g\}K\right] \tag{14}$$

และ

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{bk1}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2 + \{(1-g)\alpha) + g\}^2C_X^2\{(1-g)\alpha + g - 2K)\}] \tag{15}$$

ตามลำดับ โดยที่ $MSE(\hat{\bar{Y}}_{bk1})$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $\alpha = \alpha_0 = \frac{K-g}{1-g}$ จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{bk1}^{(opt)}$ คือ

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{bk1}^{(opt)}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2C_Y^2(1-\rho^2) \tag{16}$$

ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{bk1}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_R^*$ ก็ต่อเมื่อ $-\infty < \alpha < \frac{2(K-g)}{1-g}$ หรือ $\frac{2(K-g)}{1-g} < \alpha < \infty$ และมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$, $\bar{y}_R$, $\bar{y}_P$, $\bar{y}_R^*$ และ $\bar{y}_P^*$ เสมอ

และต่อมา Choudhury and Singh (2012a) เสนอตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันรวมกับอัตราส่วนคู่กัน (Dual to product-cum-dual to ratio estimator) เมื่อทราบค่า $\bar{X}$ ดังนี้

$$\bar{y}_{PR}^* = \bar{y}\left[\alpha\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}^*}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\bar{x}^*}{\bar{X}}\right)\right] \tag{17}$$

ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}^*_{PR}$ คือ

$$B(\bar{y}^*_{PR}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}C_X^2 g\left[(2\alpha-1)K+\alpha g\right] \tag{18}$$

และ

$$MSE(\bar{y}^*_{PR}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2 + g(2\alpha-1)\{g(2\alpha-1)+2K\}C_X^2] \tag{19}$$

ตามลำดับ โดยที่ $MSE(\bar{y}^*_{PR})$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $\alpha = \alpha_0 = \left(1-\frac{K}{g}\right)\Big/2$ จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของตัวประมาณ $\bar{y}^{*(opt)}_{PR}$ คือ

$$MSE(\bar{y}^{*(opt)}_{PR}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2C_Y^2(1-\rho^2) \tag{20}$$

ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}^{*(opt)}_{PR}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$, $\bar{y}_R$, $\bar{y}_P$, $\bar{y}^*_R$ และ $\bar{y}^*_P$ เสมอ

ในปีเดียวกัน Choudhury and Singh (2012b) เสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนรวมกับผลคูณคู่กัน (Ratio-cum-dual to product estimator) เมื่อทราบค่า $\bar{X}$ ดังนี้

$$\bar{y}_{RdP} = \bar{y}\left[\alpha\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)+(1-\alpha)\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}^*}\right)\right] \tag{21}$$

ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_{RdP}$ คือ

$$B(\bar{y}_{RdP}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}C_X^2[\{g^2-\alpha(g^2-1)\}+K\{g-\alpha(g+1)] \tag{22}$$

และ

$$MSE(\bar{y}_{RdP}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2 + C_X^2\{g-\alpha(1+g)\}\{2K+g-\alpha(1+g)\}] \tag{23}$$

ตามลำดับ โดยที่ $MSE(\bar{y}_{RdP})$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $\alpha = \alpha_0 = \frac{g+K}{1+g}$ จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของตัวประมาณ $\bar{y}^{(opt)}_{RdP}$ คือ

$$MSE(\bar{y}^{(opt)}_{RdP}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2C_Y^2(1-\rho^2) \tag{24}$$

ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}^{(opt)}_{RdP}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$, $\bar{y}_R$, $\bar{y}_P$, $\bar{y}^*_R$ และ $\bar{y}^*_P$ เสมอ

และ Adebola and Adegoke (2015) เสนอตัวประมาณแบบการถดถอยโดยใช้ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กัน (Regression estimator with dual product estimator) เมื่อทราบค่า $\bar{X}$ ดังนี้

$$\bar{y}^*_{pd} = \bar{y}\frac{\bar{X}}{\bar{x}} + \alpha(\bar{X}-\bar{x}^*) \tag{25}$$

ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}^*_{pd}$ คือ

$$B(\bar{y}^*_{pd}) \cong \frac{1-f}{n}[g^2\bar{Y}^2C_X^2 + \bar{Y}g\rho C_YC_X] \tag{26}$$

และ

$$MSE(\bar{y}^*_{pd}) \cong \frac{1-f}{n}[\bar{Y}^2C_Y^2 + 2g\rho\bar{Y}C_YC_X(\bar{Y}+\alpha\bar{X}) + g^2C_X^2(\bar{Y}+\alpha\bar{X})^2] \tag{27}$$

ตามลำดับ โดยที่ $MSE(\bar{y}^*_{pd})$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $\alpha = \alpha_0 = -\left(R+\frac{\beta}{g}\right)$ โดยที่ $R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ และ $\beta = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$ คือ สัมประสิทธิ์การถดถอย จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของตัวประมาณ $\bar{y}^{*(opt)}_{pd}$ คือ

$$MSE(\bar{y}^{*(opt)}_{pd}) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2C_Y^2(1-\rho^2) \tag{28}$$

ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}^{*(opt)}_{pd}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$, $\bar{y}_R$, $\bar{y}_P$, $\bar{y}^*_R$ และ $\bar{y}^*_P$ เสมอ

นอกจากนี้ ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายชนิดไม่คืนที่นี้ มีนักวิจัยปรับตัวประมาณโดยนำค่าคงตัวมาคูณตัวประมาณ ดังเช่น Prasad (1989) เสนอตัวประมาณ $\bar{y}_\kappa = \kappa^*\bar{y}_R$ ผลการวิจัยพบว่า $\kappa^* = (1+\gamma\rho C_YC_X)/(1+\gamma\rho C_Y^2)$ ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลัง

สองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_K$ มีค่าต่ำสุด โดยที่ $\gamma = 1/n$ และพบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_K$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_R$ เสมอ หรือในการเลือกตัวอย่างสุ่มอย่างง่ายแบบแบ่งชั้นภูมิ (Stratified random sampling) ก็มีการปรับตัวประมาณในลักษณะนี้ ดังเช่น นิวัตร และคณะ (2552) ได้ปรับตัวประมาณอัตราส่วนแบบแยกโดยใช้ค่าคงตัวมาคูณ พบว่า ตัวประมาณที่ปรับมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอัตราส่วนแบบแยกอย่างมีเงื่อนไข

ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงสนใจปรับปรุงตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันของ Bandyopadhyay (1980) โดยนำค่าคงตัวมาคูณ เพื่อทำให้ตัวประมาณที่ปรับปรุงใหม่มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำลง แล้วตัวประมาณที่ปรับปรุงนี้จะมีประสิทธิภาพดีขึ้น ทั้งนี้จะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่ปรับปรุงใหม่กับตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980) Sharma and Tailor (2010) Choudhury and Singh (2012a) Choudhury and Singh (2012b) และ Adebola and Adegoke (2015) โดยใช้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error: MSE) เป็นเกณฑ์ สำหรับหัวข้อถัดไปแสดงวิธีการดำเนินการวิจัย ซึ่งจะเสนอตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่ ความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่ หาเงื่อนไขในเชิงทฤษฎีที่ทำให้ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980) Sharma and Tailor (2010) Choudhury and Singh (2012a) Choudhury and Singh (2012b) และ Adebola and Adegoke (2015) พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อสนับสนุนผลลัพธ์ในเชิงทฤษฎี และในหัวข้อสุดท้ายเป็นการสรุปผลการวิจัยและอภิปรายผลนี้ พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะ

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาครั้งนี้มีวิธีการดำเนินการวิจัยเป็นขั้นตอนดังนี้

1. จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องข้างต้น ผู้วิจัยนำเสนอตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่สำหรับประมาณ $\bar{Y}$ ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายชนิดไม่คืนที่ ซึ่งปรับโดยนำค่าคงตัวคูณตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันของ Bandyopadhyay (1980)

2. หาความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่

3. หาเงื่อนไขที่ทำให้ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980) Sharma and Tailor (2010) Choudhury and Singh (2012a) Choudhury and Singh (2012b) และ Adebola and Adegoke (2015)

4. แสดงตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อสนับสนุนผลการศึกษาเชิงทฤษฎี โดยใช้ข้อมูลประชากรทั้งหมด 4 ชุด ดังนี้

4.1 ข้อมูลจาก Singh (1969) ซึ่งข้อมูลดังกล่าวเป็นจำนวนลูกจ้างหญิง Y โดยมีจำนวนลูกจ้างหญิงที่มีการศึกษาเป็นตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงเส้นที่มีค่า $\rho = -0.207$

4.2 ข้อมูลจาก Subramani and Ajith S (2017) เมื่อตัวแปร Y และตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงเส้นที่มีค่า $\rho = 0.0919$

4.3 ข้อมูลจาก Kadilar and Cingi (2003) ซึ่งข้อมูลดังกล่าวเป็นผลผลิตของแอปเปิ้ล Y โดยมีจำนวนต้นแอปเปิ้ลเป็นตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงเส้นที่มีค่า $\rho = 0.82$

4.4 ข้อมูลจาก Steel and Torrie (1960) เมื่อค่าล็อกของเวลาในการเผาไหม้ของใบไม้เป็นตัวแปรที่สนใจ Y และร้อยละของคลอรีนเป็นตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงเส้นที่มีค่า $\rho = -0.4965$

ผลการวิจัย

1. ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่

ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่ของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายชนิดไม่คืนที่ กำหนดดังนี้

$$\bar{y}^*_{P.new} = \lambda \bar{y}^*_P \qquad (29)$$

เมื่อ $\bar{y}^*_P = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}^*}\right)$ คือ ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันของ Bandyopadhyay (1980) และ λ คือ ค่าคงตัวที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\bar{y}^*_{P.new}$ มีค่าต่ำสุด

2. หาความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแบบผลคูณที่ปรับปรุงใหม่

ความเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}^*_{P.new}$ หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} B(\bar{y}^*_{P.new}) &= B(\lambda\bar{y}^*_P) \\ &= E(\lambda\bar{y}^*_P) - \bar{Y} \\ &= \lambda E(\bar{y}^*_P) - \bar{Y} \\ &= \lambda E(\bar{y}^*_P) - \lambda\bar{Y} + \lambda\bar{Y} - \bar{Y} \\ &= \lambda[E(\bar{y}^*_P) - \bar{Y}] + \bar{Y}(\lambda - 1) \\ &= \lambda B(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}(\lambda - 1) \end{aligned} \qquad (30)$$

เมื่อ $B(\bar{y}^*_P) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}gC_X^2(g+K)$ โดยที่ $g = \frac{n}{N-n}$ และ $K = \rho\frac{C_Y}{C_X}$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}^*_{P.new}$ คือ

$$\begin{aligned} MSE(\bar{y}^*_{P.new}) &= E(\bar{y}^*_{P.new} - \bar{Y})^2 \\ &= E\left[(\bar{y}^*_{P.new})^2 - 2\bar{y}^*_{P.new}\bar{Y} + \bar{Y}^2\right] \\ &= E\left[(\lambda\bar{y}^*_P)^2 - 2\lambda\bar{y}^*_P\bar{Y} + \bar{Y}^2\right] \\ &= \lambda^2 E(\bar{y}^*_P)^2 - 2\lambda\bar{Y}E(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}^2 \\ &= \lambda^2 E(\bar{y}^*_P)^2 - \lambda^2\left[E(\bar{y}^*_P)\right]^2 + \lambda^2\left[E(\bar{y}^*_P)\right]^2 - 2\lambda\bar{Y}E(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}^2 \\ &= \lambda^2\left\{E(\bar{y}^*_P)^2 - \left[E(\bar{y}^*_P)\right]^2\right\} + \left\{\lambda E(\bar{y}^*_P) - \bar{Y}\right\}^2 \end{aligned}$$

พิจารณาความเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}^*_P$ คือ $B(\bar{y}^*_P) = E(\bar{y}^*_P) - \bar{Y}$ จะได้ $E(\bar{y}^*_P) = B(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}$ และ $Var(\bar{y}^*_P) = E(\bar{y}^*_P)^2 - \left[E(\bar{y}^*_P)\right]^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} MSE(\bar{y}^*_{P.new}) &= \lambda^2 Var(\bar{y}^*_P) + \left\{\lambda[B(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}] - \bar{Y}\right\}^2 \\ &= \lambda^2 Var(\bar{y}^*_P) + \left[(\lambda\bar{Y} - \bar{Y}) + \lambda B(\bar{y}^*_P)\right]^2 \\ &= \lambda^2 Var(\bar{y}^*_P) + \left[\bar{Y}(\lambda - 1) + \lambda B(\bar{y}^*_P)\right]^2 \end{aligned}$$

$$= \lambda^2 Var(\bar{y}_P^*) + \bar{Y}^2(\lambda-1)^2 + 2\lambda(\lambda-1)\bar{Y}B(\bar{y}_P^*) + \lambda^2 B(\bar{y}_P^*)^2$$

$$= \lambda^2\left[Var(\bar{y}_P^*) + \left[B(\bar{y}_P^*)\right]^2\right] + \bar{Y}(\lambda-1)\left[\bar{Y}(\lambda-1) + 2\lambda B(\bar{y}_P^*)\right]$$

$$= \lambda^2 MSE(\bar{y}_P^*) + \bar{Y}(\lambda-1)\left[\bar{Y}(\lambda-1) + 2\lambda B(\bar{y}_P^*)\right] \quad (31)$$

และเมื่อแทน $MSE(\bar{y}_P^*) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2 + gC_X^2(g+2K)]$ และ $B(\bar{y}_P^*) \cong \frac{1-f}{n}\bar{Y}gC_X^2(g+K)$ ในสมการที่ 31 และจัดรูปจะได้

$$MSE(\bar{y}_{P.new}^*) \cong \lambda^2\frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2 + gC_X^2(g+2K)] + \bar{Y}(\lambda-1)\left[\bar{Y}(\lambda-1) + 2\lambda\frac{1-f}{n}\bar{Y}gC_X^2(g+K)\right]$$

$$\cong \left[\frac{1}{Ng}[C_Y^2 + gC_X^2(g+2K)] + 1\right]\bar{Y}^2\lambda^2 - \left[\frac{2}{Ng}gC_X^2(g+K) + 1\right]\bar{Y}^2\lambda + \bar{Y}^2$$

$$\cong \left[\frac{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}{Ng}\right]\bar{Y}^2\lambda^2 - 2\left[\frac{g[N+C_X^2(g+K)]}{Ng}\right]\bar{Y}^2\lambda + \bar{Y}^2 \quad (32)$$

ต่อไปหาค่า λ ที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\bar{y}_{P.new}^*$ มีค่าต่ำสุดด้วยเงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition) คือ

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}MSE(\bar{y}_{P.new}^*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\left[\frac{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}{Ng}\right]\bar{Y}^2\lambda^2 - 2\left[\frac{g[N+C_X^2(g+K)]}{Ng}\right]\bar{Y}^2\lambda + \bar{Y}^2\right\}$$

$$= 2\left[\frac{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}{Ng}\right]\bar{Y}^2\lambda - 2\left[\frac{g[N+C_X^2(g+K)]}{Ng}\right]\bar{Y}^2$$

กำหนดให้ $\frac{\partial}{\partial\lambda}MSE(\bar{y}_{P.new}^*) = 0$ จะได้

$$\lambda = \frac{g[N+C_X^2(g+K)]}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2} \quad (33)$$

เมื่อ $g = \frac{n}{N-n}$ และ $K = \rho\frac{C_Y}{C_X}$ และเงื่อนไขที่เพียงพอ (Sufficient condition) ที่ทำให้ $MSE(\bar{y}_{P.new}^*)$ มีค่าต่ำสุด เมื่อ $\lambda = \frac{g[N+C_X^2(g+K)]}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}$ คือ

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}MSE(\bar{y}_{P.new}^*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{2\left[\frac{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}{Ng}\right]\bar{Y}^2\lambda - 2\left[\frac{g[N+C_X^2(g+K)]}{Ng}\right]\bar{Y}^2\right\}$$

$$= 2\left[\frac{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}{Ng}\right]\bar{Y}^2$$

$$> 0$$

ดังนั้นตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่ของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายชนิดไม่คืนที่ $\bar{y}_{P.new}^* = \lambda\bar{y}_P^*$ มีค่า $MSE(\bar{y}_{P.new}^*)$ ต่ำสุด ก็ต่อเมื่อ ค่า $\lambda = \lambda_0 = \frac{g[N+C_X^2(g+K)]}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}$ และแทนค่า λ ในสมการที่ 32 ด้วย λ_0 จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของ $\bar{y}_{P.new}^*$ คือ

$$MSE(\bar{y}_{P.new}^{*(opt)}) \cong \bar{Y}^2\left(1 - \frac{N+C_X^2(g+K)}{N}\lambda_0\right) \quad (34)$$

3. หาเงื่อนไขที่ทำให้ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980)

พิจารณา $MSE(\bar{y}^*_{P.new}) - MSE(\bar{y}^*_P)$

$$= \lambda^2 MSE(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}(\lambda-1)\left[\bar{Y}(\lambda-1)+2\lambda B(\bar{y}^*_P)\right] - MSE(\bar{y}^*_P)$$

$$= (\lambda^2-1)MSE(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}(\lambda-1)\left[\bar{Y}(\lambda-1)+2\lambda B(\bar{y}^*_P)\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda+1)MSE(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}\left[\bar{Y}(\lambda-1)+2\lambda B(\bar{y}^*_P)\right]\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda MSE(\bar{y}^*_P) + MSE(\bar{y}^*_P) + \lambda\bar{Y}^2 - \bar{Y}^2 + 2\lambda\bar{Y}B(\bar{y}^*_P)\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[MSE(\bar{y}^*_P) - \bar{Y}^2 + \lambda[MSE(\bar{y}^*_P) + 2\bar{Y}B(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}^2]\right]$$

ซึ่ง $MSE(\bar{y}^*_{P.new}) - MSE(\bar{y}^*_P) < 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$(\lambda-1)\left[MSE(\bar{y}^*_P) - \bar{Y}^2 + \lambda[MSE(\bar{y}^*_P) + 2\bar{Y}B(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}^2]\right] < 0 \tag{35}$$

และหาเงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า λ ที่ทำให้ประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\bar{y}^*_{P.new}$ ดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}^*_P$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $\lambda < 1$ จากอสมการที่ 35 หารด้วย $\lambda - 1$ จะได้

$$MSE(\bar{y}^*_P) - \bar{Y}^2 + \lambda[MSE(\bar{y}^*_P) + 2\bar{Y}B(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}^2] > 0$$

ในกรณีนี้เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า λ คือ $\dfrac{\bar{Y}^2 - MSE(\bar{y}^*_P)}{MSE(\bar{y}^*_P)+2\bar{Y}B(\bar{y}^*_P)+\bar{Y}^2} < \lambda < 1$ จัดรูป $\dfrac{\bar{Y}^2 - MSE(\bar{y}^*_P)}{MSE(\bar{y}^*_P)+2\bar{Y}B(\bar{y}^*_P)+\bar{Y}^2}$ โดยแทน $B(\bar{y}^*_P)$ ด้วย $\dfrac{1-f}{n}\bar{Y}gC_X^2(g+K)$ และ $MSE(\bar{y}^*_P)$ ด้วย $\dfrac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2 + gC_X^2(g+2K)]$ จะได้

$$\frac{\bar{Y}^2 - MSE(\bar{y}^*_P)}{MSE(\bar{y}^*_P)+2\bar{Y}B(\bar{y}^*_P)+\bar{Y}^2} = \frac{\bar{Y}^2 - \left[\frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2+gC_X^2(g+2K)]\right]}{\frac{1-f}{n}\bar{Y}^2[C_Y^2+gC_X^2(g+2K)]+2\bar{Y}\left[\frac{1-f}{n}\bar{Y}gC_X^2(g+K)\right]+\bar{Y}^2}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{Ng}[C_Y^2+gC_X^2(g+2K)]}{\frac{1}{Ng}[C_Y^2+gC_X^2(g+2K)]+2\left[\frac{1}{Ng}gC_X^2(g+K)\right]+1}$$

$$= \frac{Ng - C_Y^2 - g^2C_X^2 - 2gC_X^2K}{C_Y^2+g^2C_X^2+2gC_X^2K+2g^2C_X^2+2gC_X^2K+Ng}$$

$$= \frac{g[N-C_X^2(g-2K)]-C_Y^2}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}$$

ดังนั้น ในกรณีที่ $\lambda < 1$ เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า λ คือ

$$\frac{g[N-C_X^2(g-2K)]-C_Y^2}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2} < \lambda < 1 \tag{36}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $\lambda > 1$ จากอสมการที่ 35 หารด้วย $\lambda - 1$ จะได้

$$MSE(\bar{y}^*_P) - \bar{Y}^2 + \lambda[MSE(\bar{y}^*_P) + 2\bar{Y}B(\bar{y}^*_P) + \bar{Y}^2] < 0$$

ในกรณีนี้เงื่อนไขที่เหมาะสมของค่า λ คือ $1<\lambda<\dfrac{\bar{Y}^2-MSE(\bar{y}_P^*)}{MSE(\bar{y}_P^*)+2\bar{Y}B(\bar{y}_P^*)+\bar{Y}^2}$ ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1 จัดรูป $\dfrac{\bar{Y}^2-MSE(\bar{y}_P^*)}{MSE(\bar{y}_P^*)+2\bar{Y}B(\bar{y}_P^*)+\bar{Y}^2}$ จะได้

$$1<\lambda<\frac{g[N-C_X^2(g-2K)]-C_Y^2}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2} \tag{37}$$

ดังนั้น $MSE(\bar{y}_{P.new}^*)$ มีค่าน้อยกว่า $MSE(\bar{y}_P^*)$ หรือกล่าวได้ว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{P.new}^*$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_P^*$ ก็ต่อเมื่อค่าคงตัว λ สอดคล้องกับอสมการที่ 36 หรือ 37

4. หาเงื่อนไขที่ทำให้ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณของ Sharma and Tailor (2010) Choudhury and Singh (2012a) Choudhury and Singh (2012b) และ Adebola and Adegoke (2015)

เนื่องจากตัวประมาณของ Sharma and Tailor (2010) $\hat{\hat{Y}}_{bk1}$ Choudhury and Singh (2012a) $\bar{y}_{PR}^*$ Choudhury and Singh (2012b) $\bar{y}_{RdP}$ และ Adebola and Adegoke (2015) $\bar{y}_{pd}^*$ มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดเท่ากันดังแสดงในสมการที่ 16, 20, 24 และ 28 ตามลำดับ คือ $\dfrac{1-f}{n}\bar{Y}^2C_Y^2(1-\rho^2)=\bar{Y}^2\left(\dfrac{C_Y^2-C_X^2K^2}{Ng}\right)$ จึงนำมาเปรียบเทียบกับ $MSE(\bar{y}_{P.new}^{*(opt)})\cong\bar{Y}^2\left(1-\dfrac{N+C_X^2(g+K)}{N}\lambda_0\right)$ ในสมการที่ 34 ได้ดังนี้

$$\bar{Y}^2\left(1-\frac{N+C_X^2(g+K)}{N}\lambda_0\right)-\bar{Y}^2\left(\frac{C_Y^2-C_X^2K^2}{Ng}\right)=\bar{Y}^2\left(1-\frac{N+C_X^2(g+K)}{N}\lambda_0-\frac{C_Y^2-C_X^2K^2}{Ng}\right)$$

ซึ่งตัวประมาณ $\bar{y}_{P.new}^{*(opt)}$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{\hat{Y}}_{bk1}$, $\bar{y}_{PR}^*$, $\bar{y}_{RdP}$ และ $\bar{y}_{pd}^*$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{Y}^2\left(1-\dfrac{N+C_X^2(g+K)}{N}\lambda_0-\dfrac{C_Y^2-C_X^2K^2}{Ng}\right)<0$ จะได้

$$\lambda_0>\frac{Ng+C_X^2K^2-C_Y^2}{g[N+C_X^2(g+K)]} \tag{38}$$

5. ตัวอย่างการคำนวณเชิงตัวเลข

ผลการศึกษาในส่วนนี้เพื่อทดสอบว่า ผลลัพธ์เชิงตัวเลขมีความสอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงทฤษฎีหรือไม่ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้นำเสนอตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขสนับสนุนผลการศึกษาเชิงทฤษฎี โดยทำการศึกษาจากข้อมูลประชากร 2 ชุด ดังนี้

ข้อมูลประชากรชุดที่ 1 เป็นข้อมูลจาก Singh (1969) เมื่อจำนวนลูกจ้างหญิงเป็นตัวแปรที่สนใจ Y และจำนวนหญิงที่มีการศึกษาเป็นตัวแปรช่วย X โดยขนาดของประชากรเท่ากับ 61 และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ลักษณะของประชากรและค่าพารามิเตอร์ของประชากรเป็นดังนี้ $N=60,\ n=10,\ \bar{Y}=7.46,\ \bar{X}=179,\ C_Y=0.7104,\ C_X=0.2516$ และ $\rho=-0.207$ คำนวณค่า $g=0.196078$, $K=-0.58447$ และ $B(\bar{y}_P^*)\cong-0.00301$

ข้อมูลประชากรชุดที่ 2 เป็นข้อมูลจาก Subramani and Ajith S (2017) ลักษณะของประชากรและค่าพารามิเตอร์ของประชากรเป็นดังนี้ $N=100,\ n=10,\ \bar{Y}=1.0568,\ \bar{X}=0.7717,\ C_Y=0.8787,\ C_X=1.1368$ และ $\rho=0.0919$ คำนวณค่า $g=0.111111,\ K=0.071035$ และ $B(\bar{y}_P^*)\cong 0.002488$

ข้อมูลประชากรชุดที่ 3 เป็นข้อมูลจาก Kadilar and Cingi (2003) ซึ่งข้อมูลดังกล่าวเป็นข้อมูลผลผลิตของแอปเปิ้ล โดยปริมาณผลผลิตของแอปเปิ้ล (1 หน่วย = 100 ตัน) เป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และจำนวนต้นแอปเปิ้ล (1 หน่วย = 100 ต้น) เป็นตัว

แปรช่วย X ใน 106 หมู่บ้าน (ที่มา: Instutute of statistics, Republic of Turkey) โดยใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 ซึ่งลักษณะของประชากรและค่าพารามิเตอร์ของประชากรเป็นดังนี้ N=106, n=20, $\bar{Y}$=15.37, $\bar{X}$=243.76, C_Y=4.18, C_X=2.20 และ ρ=0.82 คำนวณค่า $g = 0.232558$, $K = 1.558$ และ $B(\bar{y}_P^*) \cong 1.2566$

ข้อมูลประชากรชุดที่ 4 เป็นข้อมูลจาก Steel and Torrie (1960) เมื่อค่าล็อกของเวลาในการเผาไหม้ของใบไม้ เป็นตัวแปรที่สนใจ Y และร้อยละของคลอรีนเป็นตัวแปรช่วย X โดยขนาดของประชากรเท่ากับ 30 และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 6 ลักษณะของประชากรและค่าพารามิเตอร์ของประชากรเป็นดังนี้ N=30, n=6, $\bar{Y}$=0.686, $\bar{X}$=0.8077, C_Y=0.7001, C_X=0.7469 และ ρ=−0.4996 คำนวณค่า $g = 0.25$, $K = -0.26124$ และ $B(\bar{y}_P^*) \cong -0.0028$

ตารางที่ 1 ค่า $\lambda\,(\lambda_0)$, ค่า $\dfrac{g[N-C_X^2(g-2K)]-C_Y^2}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}$, ค่า $\dfrac{Ng+C_X^2K^2-C_Y^2}{g[N+C_X^2(g+K)]}$ และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_P^*$, $\bar{y}_{P.new}^*$, $\hat{\bar{Y}}_{bk1}$, $\bar{y}_{PR}^*$, $\bar{y}_{RdP}$ และ $\bar{y}_{pd}^*$

ประชากร	λ หรือ λ_0	$\dfrac{g[N-C_X^2(g-2K)]-C_Y^2}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}$	$\dfrac{Ng+C_X^2K^2-C_Y^2}{g[N+C_X^2(g+K)]}$	*MSE*		
				$\bar{y}_P^*$	$\hat{\bar{Y}}_{bk1}$, $\bar{y}_{PR}^*$, $\bar{y}_{RdP}$ และ $\bar{y}_{pd}^*$	$\bar{y}_{P.new}^*$
ชุดที่ 1	0.9608	0.9193	0.9600	2.2920	2.2475	2.2030
ชุดที่ 2	0.9303	0.8640	0.9290	0.0813	0.0770	0.0754
ชุดที่ 3	0.5341	0.2088	0.7098	203.5612	54.8538	99.7345
ชุดที่ 4	0.9535	0.8737	0.9548	0.0247	0.0231	0.0237

จากตารางที่ 1 พบว่า ข้อมูลประชากรทั้ง 4 ชุด มีค่า $MSE(\bar{y}_{P.new}^*)$ น้อยกว่า $MSE(\bar{y}_P^*)$ และเมื่อพิจารณาค่า λ ที่คำนวณได้ พบว่า $\dfrac{g[N-C_X^2(g-2K)]-C_Y^2}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2} < \lambda < 1$ แสดงว่า ค่า λ ที่คำนวณได้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังอสมการที่ 36 ดังนั้นตัวประมาณ $\bar{y}_{P.new}^*$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_P^*$ นอกจากนี้พบว่า ข้อมูลประชากรชุดที่ 1 และชุดที่ 2 มีค่า $MSE(\bar{y}_{P.new}^*)$ น้อยกว่า $MSE(\hat{\bar{Y}}_{bk1})$, $MSE(\bar{y}_{PR}^*)$, $MSE(\bar{y}_{RdP})$ และ $MSE(\bar{y}_{pd}^*)$ และเมื่อพิจารณาค่า λ_0 ที่คำนวณได้พบว่า $\lambda_0 > \dfrac{Ng+C_X^2K^2-C_Y^2}{g[N+C_X^2(g+K)]}$ แสดงว่า ค่า λ_0 ที่คำนวณได้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังอสมการที่ 38 ดังนั้นตัวประมาณ $\bar{y}_{P.new}^*$ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{bk1}$, $\bar{y}_{PR}^*$, $\bar{y}_{RdP}$ และ $\bar{y}_{pd}^*$ แต่ข้อมูลประชากรชุดที่ 3 และชุดที่ 4 มีค่า $MSE(\bar{y}_{P.new}^*)$ มากกว่า $MSE(\hat{\bar{Y}}_{bk1})$, $MSE(\bar{y}_{PR}^*)$, $MSE(\bar{y}_{RdP})$ และ $MSE(\bar{y}_{pd}^*)$ และเมื่อพิจารณาค่า λ_0 ที่คำนวณได้ พบว่า $\lambda_0 < \dfrac{Ng+C_X^2K^2-C_Y^2}{g[N+C_X^2(g+K)]}$ ซึ่งค่า λ_0 ที่คำนวณได้ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังอสมการที่ 38 ดังนั้นตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{bk1}$, $\bar{y}_{PR}^*$, $\bar{y}_{RdP}$ และ $\bar{y}_{pd}^*$ จึงมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{P.new}^*$

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เสนอตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่ของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ซึ่งปรับจากตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันของ Bandyopadhyay (1980) โดยนำค่าคงตัวมาคูณ พร้อมทั้งหาความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณที่ปรับปรุงใหม่ อีกทั้งเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณที่ปรับปรุงใหม่กับตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980) Sharma and Tailor (2010) Choudhury and Singh (2012a) Choudhury and Singh

(2012b) และ Adebola and Adegoke (2015) ในเชิงทฤษฎี ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณที่ปรับปรุงใหม่มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่าตัวประมาณของ Bandyopadhyay (1980) อย่างมีเงื่อนไขตามอสมการที่ 36 หรือ 37 และตัวประมาณที่ปรับปรุงใหม่มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่าตัวประมาณของ Sharma and Tailor (2010) Choudhury and Singh (2012a) Choudhury and Singh (2012b) และ Adebola and Adegoke (2015) อย่างมีเงื่อนไขตามอสมการที่ 38 นอกจากนี้การคำนวณเชิงตัวเลขจากประชากรทั้งสี่ชุด พบว่า ผลการคำนวณเชิงตัวเลขสอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงทฤษฎี ซึ่งจะเห็นได้ว่า การปรับตัวประมาณโดยนำค่าคงตัวมาคูณจะทำให้ตัวประมาณที่ปรับปรุงใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณเดิมอย่างมีเงื่อนไข ดังเช่นผลการศึกษาของ Prasad (1989) หรือผลการศึกษาของ นิวัตร และคณะ (2552) ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทนำ

ข้อเสนอแนะ

การประมาณค่าเฉลี่ยประชากรโดยใช้ตัวประมาณแบบผลคูณคู่กันที่ปรับปรุงใหม่สำหรับการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายในงานวิจัยนี้ เหมาะสำหรับกรณีที่ทราบค่าเฉลี่ยประชากรของตัวแปรช่วย สำหรับค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องที่ปรากฏในค่า λ (หรือ λ_0) และค่า $\frac{g[N-C_X^2(g-2K)]-C_Y^2}{g[N+C_X^2(3g+4K)]+C_Y^2}$ ในอสมการที่ 36 และ 37 และค่า $\frac{Ng+C_X^2K^2-C_Y^2}{g[N+C_X^2(g+K)]}$ ในอสมการที่ 38 ในทางปฏิบัติอาจไม่ทราบค่าเหล่านี้ ก็อาจประมาณได้จากข้อมูลตัวอย่าง

เอกสารอ้างอิง

นิวัตร สุวรรณะ, พัชรี วงษ์เกษม และคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร. (2552). ตัวประมาณค่าอัตราส่วนแบบแยกของค่าเฉลี่ยประชากรในการชักตัวอย่างอย่างง่ายแบบแบ่งเป็นชั้นภูมิ. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 37(4): 495-505.

Adebola, F.B. and Adegoke, N.A. (2015). A class of regression estimator with cum-dual product estimator as intercept. Global Journal of Science Frontier Research 5(3): 49-56.

Bandyopadhyay, S. (1980). Improved ratio and product estimators. Sankhya series C. 42: 45-49.

Choudhury, S. and Singh, B.K. (2012a). An efficient class of dual to product-cum-dual to ratio estimator of finite population mean in sample surveys. Global Journal of Science Frontier Research 12(3): 25-33.

Choudhury, S. and Singh, B.K. (2012b). An efficient class of ratio-cum-dual to product estimator of finite population mean in sample surveys. Global Journal of Science Frontier Research 12(12): 1-11.

Cochran, W.G. (1940). The estimation of the yields of the cereal experiments by sampling for the Ratio of grain to total produce. The Journal of Agricultural Science 59: 1225-1226.

Kadilar, C. and Cingi, H. (2003). A study on the chain ratio-type estimator. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 32: 105-108.

Murthy, M.N. (1964). Product method of estimation. Sankhya series A. 26: 69-74.

Prasad, B. (1989). Some improved ratio type estimators of population mean and ratio in finite population sample surveys. Communications in Statistics: Theory and Methods 18: 379-392.

Sharma, B. and Tailor, R. (2010). A new ratio-cum-dual to ratio estimator of finite population mean in simple random sampling. Global Journal of Science Frontier Research 10(1): 27-31.

Singh, M.P. (1969). Comparison of some ratio-cum-product estimators. Sankhya series B. 31: 375-378.

Srivenkataramana, T. (1980). A dual to ratio estimator in sample surveys. Biometrika 67: 199-204.

Steel, R.G.D. and Torrie, J.H. (1960). Principles and Procedures of Statistics. New York: McGraw-Hill Book Company. pp. 282.

Subramani, J. and Ajith, S. M. (2017). Almost unbiased ratio cum product estimators for finite population mean with known ranges and it's functions. International Journal of Statistics and Systems 12(4): 645-663.

❑❑❑❑❑