การสร้างผลเฉลยโทลแมน 5 (n = 2) จากผลเฉลยมิงคอฟสกีสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

Generating the Tolman V (n = 2) solution from the Minkowski one for static spherically symmetric perfect fluid in general relativity

ไตรทศ งามปิติพันธ์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม กรุงเทพมหานคร 10900

E-mail: tritos.ngampitipan@gmail.com

บทคัดย่อ

ทรงกลมของไหลสมบูรณ์เป็นผลเฉลยแม่นตรงชนิดหนึ่งของสมการไอน์สไตน์ ในการหาผลเฉลยทรงกลมของไหลสมบูรณ์จะต้องกำหนดสมมาตรทรงกลมให้กับสสารเพื่อลดความซับซ้อนของสมการไอน์สไตน์ และต้องกำหนดสมการสถานะซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความหนาแน่นของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ดังนั้น ผลเฉลยทรงกลมของไหลสมบูรณ์จึงถูกค้นพบเป็นจำนวนมากโดยการกำหนดสมการสถานะใหม่ ๆ เมื่อได้มีการค้นพบผลเฉลยทรงกลมของไหลสมบูรณ์เหล่านี้มากขึ้น การหาสมการสถานะสำหรับการแก้สมการไอน์สไตน์เพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่จะทำได้ยากมากขึ้น ในบทความนี้ จะใช้คุณสมบัติของสมการริคคาติ เพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่ที่เป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์จากผลเฉลยแม่นตรงเดิมที่มีอยู่แล้วซึ่งเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์เช่นกันโดยไม่ต้องแก้สมการไอน์สไตน์โดยตรง ผลลัพธ์ได้แสดงว่า ถ้าเริ่มต้นด้วยผลเฉลยมิงคอฟสกี ผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่จะเป็นผลเฉลยโทลแมน 5 (n = 2) ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มีความหมายทางฟิสิกส์ กล่าวคือ ค่าความดันและความหนาแน่นของทรงกลมของไหลสมบูรณ์เป็นค่าบวกเสมอ โดยที่ความดันมีค่าลดลงจากค่าที่ศูนย์กลางจนเป็นศูนย์ที่ผิวของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ และความหนาแน่นมีค่าลดลงจากค่าที่ศูนย์กลางจนเป็นค่า ๆ หนึ่งซึ่งยังคงเป็นค่าบวกที่ผิวของทรงกลมของไหลสมบูรณ์

ABSTRACT

A static perfect fluid sphere is one of the exact solutions to the Einstein's equation. To solve for perfect fluid solutions, a spherical symmetry has to be added to matters in order to reduce the complexity of the Einstein's equation and an equation of state, which is one relating the pressure to the density of a perfect fluid sphere, has to be chosen. Selecting new equations of state, a number of perfect fluid solutions have been discovered. When several perfect fluid solutions have been found, it is more difficult to obtain new exact solutions by directly solving the Einstein's equation than before. In this paper, we make use of the property of the Riccati equation to generate new exact static perfect fluid solutions from known ones without directly solving the Einstein's equation. The result shows that if we start with the Minkowski solution, the new exact solution is the Tolman V (n = 2) which has physical meaning. This means that a pressure and density of a perfect fluid sphere are always positive. Furthermore, the pressure decreases from a central value to zero at the boundary of the perfect fluid sphere and the density also decreases from a central value to a positive value at the boundary of the perfect fluid sphere.

คำสำคัญ: ทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ผลเฉลยแม่นตรง สมการริคคาติ สมการไอน์สไตน์

Keywords: Exact solution, Static perfect fluid sphere, General relativity, Riccati equation, Einstein's equation

1. บทนำ

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์เป็นทฤษฎีที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งของกาลอวกาศและสสาร ในทฤษฎีนี้ ความโน้มถ่วงไม่ได้ส่งอิทธิพลต่อสสารในรูปแบบของแรง แต่ส่งอิทธิพลต่อสสารในรูปแบบของความโค้งของกาลอวกาศ ในทางคณิตศาสตร์ สมการที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งของกาลอวกาศและสสารคือสมการไอน์สไตน์ โดยทั่วไป สมการไอน์สไตน์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นซึ่งมีความซับซ้อนสูงจนกระทั่งไม่สามารถแก้หาผลเฉลยแม่นตรงได้ อย่างไรก็ตาม หากกำหนดสมมาตรทรงกลมให้กับกาลอวกาศและสสาร และกำหนดเงื่อนไขว่า สสารเป็นทรงกลมสถิตและเป็นของไหลสมบูรณ์ จะสามารถลดความซับซ้อนของสมการไอน์สไตน์ได้ นอกจากนี้ ยังต้องกำหนดสมการสถานะซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความหนาแน่นของทรงกลมของไหลสมบูรณ์จึงสามารถแก้หาผลเฉลยแม่นตรงได้ ผลเฉลยแม่นตรงผลเฉลยแรกของสมการไอน์สไตน์คือผลเฉลยของชวาร์สชิลด์ (Schwarzschild, 1916) หลังจากนั้น ได้มีการค้นพบผลเฉลยแม่นตรงอื่น ๆ อีกเป็นจำนวนมากโดยการเลือกสมการสถานะใหม่ ๆ ผลเฉลยแม่นตรงเหล่านี้มีประโยชน์มากเพราะสามารถใช้เป็นแบบจำลองอธิบายดวงดาวเชิงสัมพัทธภาพได้ (Schwarzschild, 1916; Tolman, 1939; Adler, 1974; Bronnikov, 1979; Sharif, 2000; Lake, 2003; Herrera et al., 2008; Lake, 2009; Kauser et al., 2013) เมื่อมีการค้นพบผลเฉลยแม่นตรงเหล่านี้มากขึ้น การแก้สมการไอน์สไตน์เพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่จะทำได้ยากมากขึ้น อย่างไรก็ตาม ได้มีการค้นพบเทคนิคในการหาผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่โดยไม่ต้องแก้สมการไอน์สไตน์โดยตรง (Martin, 2004; Boonserm, 2005) เทคนิคเหล่านี้สามารถสร้างผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่ได้จากผลเฉลยแม่นตรงเดิมที่มีอยู่แล้ว นอกจากนี้ ยังมีเทคนิคในการแปลงสมการไอน์สไตน์ให้อยู่ในรูปแบบของสมการริคคาติเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่ด้วย อภิสิทธิ์ (2559) ได้หาผลเฉลยทรงกลมของไหลสมบูรณ์ตัวใหม่ในระบบพิกัดไอโซทรอปิกโดยใช้สมการริคคาติ

ในบทความนี้ จะใช้คุณสมบัติของสมการริคคาติเพื่อหาผลเฉลยทรงกลมของไหลสมบูรณ์ตัวใหม่จากผลเฉลยมิงคอฟสกีโดยไม่ต้องแก้สมการไอน์สไตน์โดยตรง หน่วยที่ใช้ในบทความนี้คือหน่วยธรรมชาติซึ่งค่าคงที่โน้มถ่วงสากลของนิวตัน ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ $m^3/kg\ s^2$) และอัตราเร็วแสง ($c = 3 \times 10^8$ m/s) มีค่าเป็น 1 ($G = c = 1$)

2. ทรงกลมของไหลสมบูรณ์

ในหัวข้อนี้ จะพิจารณาโครงสร้างภายในของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ คำว่า "ทรงกลมของไหลสมบูรณ์" หมายถึงของไหลที่ไม่มีความหนืด ไม่มีการนำความร้อน มีความดันเท่ากันในทุกทิศทาง และมีสมมาตรทรงกลม จากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป สสารทำให้กาลอวกาศเกิดความโค้งขึ้น ในทางคณิตศาสตร์ ความโค้งของกาลอวกาศใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูปของระยะทางสั้น ๆ ระหว่างจุดสองจุดบนกาลอวกาศนั้น ๆ สำหรับกาลอวกาศสถิต 4 มิติที่มีสมมาตรทรงกลม ระยะทางสั้น ๆ ระหว่างจุดสองจุด (ซึ่งเรียกว่า เมทริก) ในระบบพิกัดทรงกลม (t, r, θ, ϕ) เขียนได้เป็น

$$ds^2 = -e^{2A(r)}dt^2 + e^{2B(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.1}$$

โดยที่ $A(r)$ และ $B(r)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของตำแหน่ง r เท่านั้น แต่ไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา t เนื่องจากเป็นกาลอวกาศสถิต และไม่เป็นฟังก์ชันของมุม θ และ ϕ เนื่องจากกาลอวกาศมีสมมาตรทรงกลม ความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งของกาลอวกาศและสสารแสดงได้ด้วยสมการไอน์สไตน์

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

โดยที่ $G_{\mu\nu}$ คือเทนเซอร์ไอน์สไตน์และ $T_{\mu\nu}$ คือเทนเซอร์พลังงานโมเมนตัม เทนเซอร์ไอน์สไตน์จากระยะทางสั้น ๆ ในสมการ (2.1) มีค่าดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{1}{r^2}e^{2A(r)}\frac{d}{dr}\left[r\left(1-e^{-2B(r)}\right)\right]\\
G_{11} &= -\frac{1}{r^2}e^{2B(r)}\left(1-e^{-2B(r)}\right)+\frac{2A'(r)}{r}\\
G_{22} &= r^2e^{-2B(r)}\left[A''(r)+\left\{A'(r)\right\}^2+\frac{A'(r)}{r}-B'(r)\left\{A'(r)+\frac{1}{r}\right\}\right]\\
G_{33} &= G_{22}\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{2.3}$$

โดยที่ $A'(r)$ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน A ที่ r ในบทความนี้ เราพิจารณาสสารที่อยู่ในกาลอวกาศข้างต้นเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ดังนั้น เทนเซอร์พลังงานโมเมนตัมมีค่าดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \rho(r)e^{2A(r)}\\
T_{11} &= p(r)e^{2B(r)}\\
T_{22} &= r^2p(r)\\
T_{33} &= T_{22}\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{2.4}$$

โดยที่ $\rho(r)$ และ $p(r)$ คือความหนาแน่นและความดันภายในทรงกลมของไหลสมบูรณ์ตามลำดับ แทนค่าสมการ (2.3) และสมการ (2.4) ลงในสมการไอน์สไตน์ (2.2) จะได้

$$8\pi\rho(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1-e^{-2B(r)}\right)\right] \tag{2.5a}$$

$$8\pi p(r) = -\frac{1}{r^2}\left(1-e^{-2B(r)}\right)+\frac{2A'(r)}{r}e^{-2B(r)} \tag{2.5b}$$

$$8\pi p(r) = e^{-2B(r)}\left[A''(r)+\left\{A'(r)\right\}^2+\frac{A'(r)}{r}-B'(r)\left\{A'(r)+\frac{1}{r}\right\}\right] \tag{2.5c}$$

ความเท่ากันของสมการ (2.5b) และสมการ (2.5c) จะได้

$$\frac{de^{-2B(r)}}{dr}+\frac{2\left[r^2A''(r)+r^2\left\{A'(r)\right\}^2-rA'(r)-1\right]}{r\left[rA'(r)+1\right]}e^{-2B(r)}=-\frac{2}{r\left[rA'(r)+1\right]} \tag{2.6}$$

ให้ $u(r) = e^{-2B(r)}$ ดังนั้นสมการข้างต้นจะสามารถเขียนในรูป

$$u'(r)+\frac{2\left[r^2A''(r)+r^2\left\{A'(r)\right\}^2-rA'(r)-1\right]}{r\left[rA'(r)+1\right]}u(r)=-\frac{2}{r\left[rA'(r)+1\right]} \tag{2.7}$$

สมการ (2.7) คือสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งไม่เอกพันธุ์ นอกจากนี้ สมการ (2.7) ยังเป็นเงื่อนไขของการเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ เพราะมาจากความเท่ากันของสมการ (2.5b) และสมการ (2.5c) ความเท่ากันของ 2 สมการดังกล่าวเป็นจริงเฉพาะทรงกลมของไหลสมบูรณ์เท่านั้น เนื่องจากทรงกลมของไหลสมบูรณ์มีความดันเท่ากันในทุกทิศทาง

3. สมการริคคาติ

หัวข้อนี้เป็นการทบทวนงานวิจัยเกี่ยวกับ เทคนิคการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้คุณสมบัติของสมการริคคาติ (อภิสิทธิ์, 2559; Kauser and Islam, 2016) ในหัวข้อที่ผ่านมา เรามีสมการเชิงอนุพันธ์ 3 สมการ คือ สมการที่ (2.5a) ถึง (2.5c) สำหรับตัวแปรไม่ทราบค่า 4 ตัว $\rho(r)$, $p(r)$, $A(r)$ และ $u(r)$ แต่การแก้สมการเพื่อหาตัวแปรทั้งสี่ตัวนั้นจะต้องมี 4 สมการ ดังนั้น ในบทความนี้จะใช้ผลเฉลยเริ่มต้น $A(r)$ และ $u(r)$ ที่ทราบค่าอยู่แล้วและใช้คุณสมบัติของสมการริคคาติซึ่งได้มาจากสมการ (2.7) เพื่อหา $A(r)$ และ $u(r)$ ตัวใหม่ จากนั้น แทนค่าในสมการ (2.5) เพื่อหา $\rho(r)$ และ $p(r)$ ในการหาสมการริคคาติ จัดรูปสมการ (2.7) ใหม่จะได้

$$A''(r)=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2u(r)}-\frac{u'(r)}{2ru(r)}+\left[\frac{1}{r}-\frac{u'(r)}{2u(r)}\right]A'(r)-\left[A'(r)\right]^2 \tag{3.1}$$

สมการ (3.1) เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ริคคาติซึ่งมีรูปทั่วไปคือ

$$f'(r)=P(r)+Q(r)f(r)+R(r)f^2(r) \tag{3.2}$$

โดยที่

$$f(r) = A'(r),\ P(r) = \frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2u(r)}-\frac{u'(r)}{2ru(r)},\ Q(r) = \frac{1}{r}-\frac{u'(r)}{2u(r)} \quad \text{และ } R(r) = -1 \tag{3.3}$$

ให้ $u(r) = u_0(r)$ และ $f(r) = f_0(r)$ คือผลเฉลยของสมการ (3.2) ดังนั้น

$$f_0'(r)=P_0(r)+Q_0(r)f_0(r)+R_0(r)f_0^2(r) \tag{3.4}$$

โดยที่

$$P_0(r) = \frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2u_0(r)}-\frac{u_0'(r)}{2ru_0(r)},\ Q_0(r) = \frac{1}{r}-\frac{u_0'(r)}{2u_0(r)} \quad \text{และ } R_0(r) = -1 \tag{3.5}$$

ดังนั้น $f(r) = f_0(r)$ คือผลเฉลยหนึ่งของสมการ

$$f'(r)=P_0(r)+Q_0(r)f(r)-f^2(r) \tag{3.6}$$

ผลเฉลยอีกตัวหนึ่งของสมการ (3.6) คือ

$$f(r) = f_0(r) + F(r) \tag{3.7}$$

โดยที่ $F(r)$ เป็นฟังก์ชันที่จะต้องหา แทนสมการ (3.7) ลงในสมการ (3.6) และใช้สมการ (3.4) จะได้

$$F'(r)=[Q_0(r)-2f_0(r)]F(r)-F^2(r) \tag{3.8}$$

สมการ (3.8) คือสมการแบร์นูลลี ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ โดยเปลี่ยนตัวแปรดังนี้ (พรชัย, 2550)

$$F(r)=\frac{1}{z(r)} \tag{3.9}$$

แทน $F(r)$ ในรูปของ $z(r)$ ลงในสมการ (3.8) จะได้

$$z'(r)+\left[Q_0(r)-2f_0(r)\right]z(r)=1 \tag{3.10}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ที่สามารถหาผลเฉลยได้ โดยใช้ตัวประกอบการอินทิเกรต (พรชัย, 2550)

นอกจากนี้ สมการริคคาติ (3.6) สามารถแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่งได้ โดยแทนค่า $P_0(r)$ และ $Q_0(r)$ จากสมการ (3.5) ลงในสมการ (3.6) และจัดรูปใหม่จะได้

$$u_0'(r)+\frac{2\left[r^2f'(r)+r^2f^2(r)-rf(r)-1\right]}{r\left[rf(r)+1\right]}u_0(r)=-\frac{2}{r\left[rf(r)+1\right]} \tag{3.11}$$

ดังนั้น $u(r) = u_0(r)$ คือผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$u'(r)+\frac{2\left[r^2 f'(r)+r^2 f^2(r)-rf(r)-1\right]}{r\left[rf(r)+1\right]}u(r)=-\frac{2}{r\left[rf(r)+1\right]} \tag{3.12}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.12) คือ

$$u(r) = u_0(r) + g(r) \tag{3.13}$$

โดยที่ $g(r)$ คือฟังก์ชันเติมเต็ม แทนสมการ (3.13) ลงในสมการ (3.12) จะได้

$$u_0'(r)+\frac{2\left[r^2 f'(r)+r^2 f^2(r)-rf(r)-1\right]}{r\left[rf(r)+1\right]}u_0(r)+g'(r)+\frac{2\left[r^2 f'(r)+r^2 f^2(r)-rf(r)-1\right]}{r\left[rf(r)+1\right]}g(r)$$
$$=-\frac{2}{r\left[rf(r)+1\right]} \tag{3.14}$$

ใช้สมการ (3.11) เพื่อกำจัด $u_0(r)$ จะได้

$$g'(r)+\frac{2\left[r^2 f'(r)+r^2 f^2(r)-rf(r)-1\right]}{r\left[rf(r)+1\right]}g(r)=0 \tag{3.15}$$

นั่นคือ ถ้า $\{u_0(r), f_0(r)\}$ คือทรงกลมของไหลสมบูรณ์ แล้ว $\{u_0(r) + g(r), f_0(r) + 1/z(r)\}$ คือทรงกลมของไหลสมบูรณ์ด้วย เพราะต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ (2.7) ซึ่งเป็นเงื่อนไขของการเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์

4. การสร้างผลเฉลยตัวใหม่จากผลเฉลยมิงคอฟสกี

ในหัวข้อนี้ เราจะนำเทคนิคในหัวข้อที่แล้วมาประยุกต์ใช้กับ คำตอบทรงกลมของไหลสมบูรณ์บนกาลอวกาศแบบมิงคอฟสกี ซึ่งเป็นเป้าหมายของบทความนี้ กาลอวกาศแบบมิงคอฟสกีคือกาลอวกาศ 4 มิติแบบแบนราบ ซึ่งเป็นกาลอวกาศที่ปราศจากความโน้มถ่วงทุกบริเวณ เมทริกของกาลอวกาศแบบมิงคอฟสกีมีค่าดังนี้

$$ds^2=-dt^2+dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{4.1}$$

นำสมการ (4.1) เทียบสัมประสิทธิ์กับสมการ (2.1) จะได้

$$e^{2A_0(r)}=1 \text{ และ } e^{2B_0(r)}=1 \tag{4.2}$$

ดังนั้น

$$u_0(r)=e^{-2B_0(r)}=1 \tag{4.3}$$

จากพจน์แรกของสมการ (4.2) หาอนุพันธ์เทียบ r จะได้

$$2A_0'(r)e^{2A_0(r)}=0 \tag{4.4}$$

ดังนั้น

$$f_0(r)=A_0'(r)=0 \tag{4.5}$$

แทนสมการ (4.3) ลงในพจน์ที่สองของสมการ (3.5) จะได้

$$Q_0(r)=\frac{1}{r}-\frac{u_0'(r)}{2u_0(r)}=\frac{1}{r} \tag{4.6}$$

แทนสมการ (4.5) และ (4.6) ลงในสมการ (3.10) จะได้

$$z'(r)+\frac{1}{r}z(r)=1 \tag{4.7}$$

นำ r คูณตลอดสมการ (4.7) เพื่อทำให้เป็นสมการแม่นตรง จะได้

$$rz'(r)+z(r)=r \tag{4.8}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dr}\left[rz(r)\right]=r \tag{4.9}$$

อินทิเกรตเทียบ r ทั้งสองข้างของสมการ (4.9) จะได้

$$rz(r)=\frac{r^2}{2}+c \tag{4.10}$$

หารด้วย r ตลอดสมการ (4.10) จะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$z(r)=\frac{r}{2}+\frac{c}{r}=\frac{r^2+2c}{2r} \tag{4.11}$$

โดยที่ c คือค่าคงที่ของการอินทิเกรต แทนสมการ (4.5) และ (4.11) ลงในสมการ (3.7) (และใช้สมการ 3.9) จะได้

$$f(r)=f_0(r)+\frac{1}{z(r)}=\frac{2r}{r^2+2c} \tag{4.12}$$

ในกรณีพิเศษ c = 0 จะได้

$$f(r)=\frac{2}{r} \tag{4.13}$$

แทนค่าฟังก์ชัน $f(r)$ นี้ลงในสมการ (3.15) จะได้

$$g'(r)-\frac{2}{3r}g(r)=0 \tag{4.14}$$

จัดรูปและอินทิเกรตเทียบ r ทั้งสองข้างของสมการ (4.14) จะได้

$$\int\frac{g'(r)}{g(r)}dr=\int\frac{2}{3r}dr \tag{4.15}$$

นั่นคือ

$$\ln\left|g(r)\right|=\frac{2}{3}\ln(r)+c_1 \tag{4.16}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (4.16) คือ

$$g(r)=ar^{2/3} \tag{4.17}$$

โดยที่ c_1 คือค่าคงที่ของการอินทิเกรตและ a = $\pm e^{2c_1}$ คือค่าคงตัวใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์

แทนสมการ (4.13) ลงในพจน์แรกของสมการ (3.3) และอินทิเกรตเทียบ r จะได้

$$A(r)=\int f(r)dr=\int\frac{2}{r}dr=2\ln(r)+c_2 \tag{4.18}$$

คูณตลอดสมการ (4.18) ด้วย 2 จากนั้นหาค่าฟังชันเอกซ์โปเนนเชียลของทั้งสองข้าง จะได้

$$e^{2A(r)}=b^2r^4 \tag{4.19}$$

โดยที่ b^2 = e^{2c_2} คือค่าคงตัวใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ แทนสมการ (4.3) และ (4.17) ลงในสมการ (3.13) จะได้

$$e^{2B(r)}=\frac{1}{u(r)}=\frac{1}{u_0(r)+g(r)}=\frac{1}{1+ar^{2/3}} \tag{4.20}$$

แทนสมการ (4.19) และ (4.20) ลงในสมการ (2.1) จะได้

$$ds^2 = -b^2r^4dt^2 + \left(1+ar^{2/3}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \quad (4.21)$$

ผลเฉลยในสมการ (4.21) เรียกว่า ผลเฉลยโทลแมน 5 (n = 2) อย่างไรก็ตาม ผลเฉลยนี้ไม่ใช่ผลเฉลยที่ถูกค้นพบใหม่ แต่เป็นผลเฉลยที่เคยถูกค้นพบมาแล้วโดย ริชาร์ด โทลแมน ในปี ค.ศ. 1939 โดยโทลแมนได้ทำการแก้สมการไอน์สไตน์โดยตรง (Tolman, 1939)

5. การหาความหมายทางฟิสิกส์ของผลเฉลยโทลแมน 5 (n = 2)

โทลแมนได้วิเคราะห์ผลเฉลยโทลแมน 5 ในเชิงฟิสิกส์ไว้ ในกรณีที่ n = 1/2 (Tolman, 1939) ในหัวข้อนี้ จะตรวจสอบว่าผลเฉลยโทลแมน 5 (n = 2) ในสมการ (4.21) มีความหมายทางฟิสิกส์หรือไม่ โดยการแทน $A(r)$ จากสมการ (4.18) และ $e^{2B(r)}$ จากสมการ (4.20) ลงในสมการ (2.5a) และสมการ (2.5b) จะได้

$$\rho(r) = -\frac{5a}{24\pi r^{4/3}} \quad (5.1a)$$

$$p(r) = \frac{5a}{8\pi r^{4/3}} + \frac{1}{2\pi r^2} \quad (5.1b)$$

เนื่องจากความหนาแน่นต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้น $a < 0$ เราเลือก $a = -\alpha^2$ โดยที่ α คือค่าคงตัวใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น ความหนาแน่นและความดันจึงเป็น

$$\rho(r) = \frac{5\alpha^2}{24\pi r^{4/3}} \quad (5.2a)$$

$$p(r) = \frac{1}{2\pi r^2} - \frac{5\alpha^2}{8\pi r^{4/3}} \quad (5.2b)$$

จะเห็นได้ว่าความหนาแน่นศูนย์กลางและความดันศูนย์กลางมีค่าเป็นอนันต์ อย่างไรก็ตาม ในทางฟิสิกส์ ระบบที่มีความดันศูนย์กลางเป็นอนันต์จะไม่สามารถเกิดขึ้นได้จริง เนื่องจาก ทรงกลมของไหลสมบูรณ์อาจเกิดการยุบตัวหรือระเบิดได้ ซึ่งไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขทรงกลมสถิตย์ (Schwarzschild, 1916; Buchdahl, 1959)

เราสามารถหารัศมี R ของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ได้จากเงื่อนไข $p(R)$ = 0 ดังนั้น

$$R = \frac{8\sqrt{5}}{25|\alpha|^3} \quad (5.3)$$

ความหนาแน่นที่ผิวทรงกลมของไหลสมบูรณ์มีค่า

$$\rho_b = \rho(R) = \frac{125\alpha^6}{384\pi} \quad (5.4)$$

จะเห็นได้ว่า ค่าความดันและความหนาแน่นเป็นไปตามเงื่อนไขทางฟิสิกส์ กล่าวคือ ความดันมีค่าลดลงจากค่าอนันต์ที่ศูนย์กลางจนเป็นศูนย์ที่ผิวของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ และความหนาแน่นมีค่าลดลงจากค่าอนันต์ที่ศูนย์กลางจนเป็นค่า ๆ หนึ่งซึ่งยังคงเป็นบวกที่ผิวของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ นอกจากนี้ เรายังสามารถหามวลของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ที่มีรัศมี $r \leq R$ ใด ๆ ได้จากความหนาแน่นในสมการ (5.2a)

$$m(r) = \int 4\pi r^2 \rho(r)dr = \int \frac{5\alpha^2}{6} r^{2/3}dr = \frac{\alpha^2}{2} r^{5/3} + c_3 \quad (5.5)$$

โดยที่ c_3 คือค่าคงที่ของการอินทิเกรต ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ มวลเริ่มต้นเป็นศูนย์ นั่นคือ $m(0)$ = 0 จะได้ c_3 = 0 ดังนั้น

$$m(r) = \frac{\alpha^2}{2} r^{5/3} \tag{5.6}$$

เนื่องจากทรงกลมของไหลสมบูรณ์มีรัศมี R ดังนั้น มวลทั้งหมดของทรงกลมของไหลสมบูรณ์คือ

$$M = m(R) = \frac{16\sqrt{5}}{125|\alpha|^3} \tag{5.7}$$

อัตราส่วนของมวลต่อรัศมีมีค่า

$$\frac{M}{R} = \frac{2}{5} \tag{5.8}$$

ซึ่งน้อยกว่า 4/9 ดังนั้น อัตราส่วนนี้เป็นไปตามลิมิตบุชดาห์ล (Buchdahl, 1959) ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ทำให้ดาวฤกษ์คงรูปอยู่ได้ โดยไม่ยุบตัวไปเป็นหลุมดำ

บริเวณภายนอกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์เป็นสุญญากาศ เมทริกของกาลอวกาศ ณ บริเวณดังกล่าว เรียกว่า เมทริกแบบชวาร์สชิลด์ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{5.9}$$

ดังนั้น ที่ผิวของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ผลเฉลยภายในสสารต้องเท่ากับผลเฉลยภายนอก นั่นคือ จากสมการ (4.21)

$$1 + aR^{2/3} = 1 - \frac{2M}{R} \text{ และ } b^2R^4 = 1 - \frac{2M}{R} \tag{5.10}$$

แทนค่า $a = -\alpha^2$ แทนค่า R จากสมการ (5.3) และแทนค่า M/R จากสมการ (5.8) พบว่าสมการแรกของสมการ (5.10) เป็นจริงเสมอสำหรับ α ใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ สำหรับสมการที่สองของ (5.10) จะได้

$$b^2 = \frac{3125\alpha^{12}}{4096} \tag{5.11}$$

ดังนั้น ผลเฉลยโทลแมน 5 (n = 2) ที่มีความต่อเนื่องกับผลเฉลยภายนอกของชวาร์สชิลด์ที่ผิวของทรงกลมของไหลสมบูรณ์จึงมีรูปแบบดังนี้

$$ds^2 = -\frac{3125\alpha^{12}}{4096} r^4 dt^2 + \left(1 - \alpha^2 r^{2/3}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{5.12}$$

โดยที่ $r \leq R$

6. สรุป

ในบทความนี้ ได้ใช้คุณสมบัติของสมการริคคาติเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่ที่เป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์จากผลเฉลยแม่นตรงเดิมที่มีอยู่แล้วซึ่งเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์เช่นกันโดยไม่ต้องแก้สมการไอน์สไตน์โดยตรง ผลลัพธ์ได้แสดงว่า ถ้าเริ่มต้นด้วยผลเฉลยมิงคอฟสกี ผลเฉลยแม่นตรงตัวใหม่จะเป็นผลเฉลยโทลแมน 5 (n = 2) ซึ่งมีความหมายทางฟิสิกส์ กล่าวคือ ค่าความดันและความหนาแน่นเป็นค่าบวกเสมอ โดยที่ความดันมีค่าลดลงจากค่าที่ศูนย์กลางจนเป็นศูนย์ที่ผิวของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ และความหนาแน่นมีค่าลดลงจากค่าที่ศูนย์กลางจนเป็นค่า ๆ หนึ่งซึ่งยังคงเป็นบวกที่ผิวของทรงกลมของไหลสมบูรณ์

เอกสารอ้างอิง

พรชัย สาตรวาหา. (2550). สมการเชิงอนุพันธ์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์. หน้า (1-17) – (1-21).

อภิสิทธิ์ กินรีวงศ์. (2559). ทฤษฎีก่อกำเนิดผลเฉลยและสมการโทลแมน-ออพเพนไฮม์เมอร์-โวลคอฟฟ์สำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปิก. วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. กรุงเทพมหานคร: 65 หน้า

Adler, R. J. (1974). A fluid sphere in general relativity. J. Math. Phys. 15(6): 727-729.

Boonserm, P., Visser, M. and Weinfurtner, S. (2005). Generating perfect fluid spheres in general relativity. Phys. Rev. D 71(12): 124037.

Bronnikov, K. A. (1979). Static fluid cylinders and plane layers in general relativity. J. Phys. A: Math. Gen. 12(2): 201-207.

Buchdahl, H. A. (1959). General relativistic fluid spheres. Phys. Rev. 116(4): 1027-1034.

Herrera, L., Ospino, J. and Prisco, A. D. (2008). All static spherically symmetric anisotropic solutions of Einstein's equations. Phys. Rev. D 77(2): 027502.

Kauser, M. A., Islam, Q. and Miah, M. I. (2013). On the equilibrium of static fluid spheres in general relativity. Romanian Journal of Physics 58(3-4): 260-270.

Kauser, M. A. and Islam, Q. (2016). Generation of static perfect fluid spheres in general relativity. Physics Journal 2(2): 61-66.

Lake, K. (2003). All static spherically symmetric perfect fluid solutions of Einstein's equations. Phys. Rev. D 67(10): 104015.

Lake, K. (2009). Generating static spherically symmetric anisotropic solutions of Einstein's equations from isotropic Newtonian solutions. Phys. Rev. D 80(6): 064039.

Martin, D. and Visser, M. (2004). Algorithmic construction of static perfect fluid spheres. Phys. Rev. D 69(10): 104028.

Schwarzschild, K. (1916). On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl: 189-196.

Schwarzschild, K. (1916). On the gravitational field of a sphere of incompressible liquid, according to Einstein's theory. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl: 424-435.

Sharif, M. (2000). Cylindrically symmetric, static, perfect-fluid solutions of Einstein's field equations. J. of the Kor. Physical Soc. 37(5): 624-625.

Tolman, R. C. (1939). Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. Phys. Rev. 55(4): 364-373.

❑❑❑❑❑