สมบัติหลักมูลของผลคูณบ๊อคซ์สำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่และการแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

Fundamental Properties of the Box Product for Matrices over a Commutative Semiring and Johnson-Nylen Transformation

ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

E-mail: pattrawut.ch@kmitl.ac.th

บทคัดย่อ

ผู้วิจัยนิยามผลคูณบ๊อคซ์สำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ ซึ่งครอบคลุมแนวคิดของผลคูณเมทริกซ์แบบปรกติและผลคูณฮาดามาร์ด ผลคูณบ๊อคซ์ดังกล่าวมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม การมีเอกลักษณ์ สมบัติการแจกแจงเหนือการบวก และมีสภาพเข้ากันได้กับการคูณด้วยสเกลาร์และการสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ ผู้วิจัยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ๊อคซ์กับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก ยิ่งกว่านั้นสามารถแปลงผลคูณบ๊อคซ์ให้อยู่ในรูปผลคูณแบบปรกติได้โดยใช้การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

ABSTRACT

We define the box product for matrices over an arbitrary commutative semiring, including the concepts of usual matrix product and Hadamard product. The box product possess the associativity, the identity, the distributivity over the addition, and the compatibility with the scalar multiplication and the transposition of a matrix. We investigate relationship between the box product and a block vector-operator. Moreover, we can transform the box product into the usual product via Johnson-Nylen transformation.

คำสำคัญ: เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ผลคูณบ๊อคซ์ ตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

Keywords: Matrices over a commutative semiring, box product, block vector-operator, Johnson-Nylen transformation

บทนำ

ในการคำนวณทางวิทยาศาสตร์และสารสนเทศ พิจารณาเมทริกซ์ที่เป็นอาเรย์สองมิติซึ่งใช้ในการเก็บข้อมูล การประมวลผลข้อมูลสามารถทำได้โดยใช้การดำเนินการต่าง ๆ สำหรับเมทริกซ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการคูณ เช่น การคูณแบบปรกติ ผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker product) ผลคูณฮาดามาร์ด (Hadamard product) เป็นต้น ศึกษาเพิ่มเติมได้จาก (Styan, 1973; Horn and Johnson, 1991) แนวคิดของการคูณเมทริกซ์แบบปรกติได้ถูกขยายไปเป็นผลคูณบ๊อคซ์ (box product) ในงานวิจัย (Johnson and Nylen, 1991) ดังนี้ ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จริงที่มีขนาด $mp \times nr$ และ $mq \times nr$ ตามลำดับ ซึ่งมีรูปแบบการแบ่งบล็อกแบบเดียวกัน โดย A มีแต่ละเมทริกซ์ย่อยเป็น A_{ij} ขนาด $p \times q$ และ B มีแต่ละเมทริกซ์ย่อย B_{ij} ขนาด $q \times r$ ผลคูณบ๊อคซ์ของ A และ B นิยามเป็นเมทริกซ์ที่มีบล็อกย่อยที่ (i, j) เป็น $A_{ij}B_{ij}$ ในกรณีเฉพาะที่ $m = n = 1$ และเมทริกซ์ A และ B มีเพียงบล็อกเดียว จะได้ว่าผลคูณบ๊อคซ์จะกลายเป็นผลคูณเมทริกซ์แบบปรกติ ส่วนในกรณี $p = q = r = 1$ จะได้ว่าผลคูณบ๊อคซ์ลดรูปเป็นผลคูณฮาดามาร์ด

แนวคิดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนจริงได้ถูกขยายไปสู่เมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากโครงสร้างเชิงพีชคณิตอื่น เช่น กึ่งริง (semiring) หรือกึ่งริงสลับที่ (commutative semiring) มีงานวิจัยมากมายที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์เหนือโครงสร้างดังกล่าว เช่น เมทริกซ์ผกผัน (Reutenauer and Straubing, 1984; Zhao and Wang, 2010) ความเป็นอิสระเชิงเส้น (Cechlárova and Plávka, 1996) ตัวกำหนด (Poplin and Hartwig, 2004) ปริภูมิกึ่งเชิงเส้น (semilinear space) (Cuninghame-Green and Butkovič, 2004; Zhao and Wang, 2011) และผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker product) (Stangam and Chansangiam, 2016) แนวคิดของเมทริกซ์เหนือโครงสร้างดังกล่าวถูกนำมาใช้ในหลายสาขา เช่น สารสนเทศ ระบบวิภัชนัย (fuzzy system) การหาค่าเหมาะที่สุด การวิจัยดำเนินงาน ทฤษฎีเครือข่าย ดูตัวอย่างการประยุกต์ในงานวิจัย (Cechlárova and Plávka, 1996; Di Nola et al., 2007; Brouwer, 2009)

ในบทความวิจัยนี้ ผู้วิจัยให้บทนิยามของผลคูณบ๊อคซ์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ ซึ่งครอบคลุมผลคูณ เมทริกซ์แบบปรกติและผลคูณฮาดามาร์ด รวมทั้งพิจารณาสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของผลคูณบ๊อคซ์ซึ่งเกี่ยวกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตและตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก ผู้วิจัยแสดงให้เห็นว่าผลคูณบ๊อคซ์มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม มีเอกลักษณ์ สมบัติการแจกแจงเหนือการบวกทั้งทางซ้ายและทางขวา และมีสภาพเข้ากันได้กับการคูณด้วยสเกลาร์และการสลับเปลี่ยนของ เมทริกซ์ นอกจากนี้สามารถแปลงผลคูณบ๊อคซ์ให้อยู่ในรูปผลคูณเมทริกซ์แบบปรกติได้โดยใช้การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

ในหัวข้อถัดไปจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ หัวข้อที่สามจะเป็นการนิยามผลคูณบ๊อคซ์และพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ๊อคซ์กับการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์ หัวข้อที่สี่จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ๊อคซ์กับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก และหัวข้อสุดท้ายจะกล่าวถึงการแปลงผลคูณบ๊อคซ์ให้อยู่ในรูปผลคูณแบบปรกติ

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

งานวิจัย (Zimmermann, 1981) และตำรา (Golan, 1999) ได้ให้บทนิยามของกึ่งริงสลับที่ไว้ดังนี้

บทนิยามที่ 1 กึ่งริงสลับที่เป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซต L กับการดำเนินการทวิภาคสองอย่างบน L ซึ่งจะเรียกว่าการบวก $(+)$ และการคูณ $(\bullet)$ ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(L, +)$ เป็นโมนอยด์สลับที่ โดยแทนเอกลักษณ์การบวกด้วย 0
2. $(L, \bullet)$ เป็นโมนอยด์สลับที่ โดยแทนเอกลักษณ์การคูณด้วย 1
3. การคูณสามารถแจกแจงเหนือการบวกทั้งทางซ้ายและทางขวา
4. $0 \bullet r = 0 = r \bullet 0$ สำหรับทุก $r \in L$
5. $0 \neq 1$

ตัวอย่างที่ 1 จากบทนิยามเห็นได้ชัดว่าฟิลด์ใด ๆ เป็นกึ่งริงสลับที่ ตัวอย่างของกึ่งริงสลับที่ซึ่งไม่ใช่ฟิลด์มีดังนี้

1. ช่วงปิด $[0,1]$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ $a+b=\max\{a,b\}$ และ $a\bullet b=\min\{a,b\}$ สำหรับทุก $a,b\in[0,1]$ ซึ่งมีจำนวนจริง 0 เป็นเอกลักษณ์การบวกและ 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ โครงสร้างนี้เรียกว่าพีชคณิตวิภัชนัย (fuzzy algebra) ดูได้จากงานวิจัย (Kim and Roush, 1980)

2. $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\begin{cases}\max\{a,b\} & ;\ a,b\in\mathbb{R}\\ -\infty & ;\ a=-\infty \text{ หรือ } b=-\infty\end{cases}\qquad a\bullet b=\begin{cases}a+b & ;\ a,b\in\mathbb{R}\\ -\infty & ;\ a=-\infty \text{ หรือ } b=-\infty\end{cases}$$

โครงสร้างนี้เรียกว่าพีชคณิตค่าสูงสุด-บวก (max-plus algebra) ดูได้จากงานวิจัย (Baccelli et al., 1992; Butkovič, 2003; Cuninghame-Green and Butkovič, 2004) หรือ

3. $\mathbb{N}\cup\{0\}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\begin{cases}0 & ;\ a=b=0\\ \gcd(a,b) & ;\ \text{กรณีอื่น}\end{cases}$$

$$a\bullet b=\begin{cases}\operatorname{lcm}(a,b) & ;\ a,b\in\mathbb{N}\\ 0 & ;\ \text{กรณีอื่น}\end{cases}$$

4. ให้ $n\in\mathbb{N}$ โดยที่ $n>1$ จะได้ว่า $(\mathbb{Z}_n,+,\bullet,\overline{0},\overline{1})$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ตัวอย่างที่ 2 ให้ L เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{N}$ ซึ่งมีสมบัติปิดภายใต้การหา ห.ร.ม.และ ค.ร.น. โดยมีสมาชิก x และ y ซึ่งมีสมบัติว่า $x|a$ และ $a|y$ สำหรับทุก $a\in L$ จะได้ว่า L เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\operatorname{lcm}(a,b),\qquad a\bullet b=\gcd(a,b),\qquad a,b\in L$$

โดยมี x เป็นเอกลักษณ์การบวก และมี y เป็นเอกลักษณ์การคูณ

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $X\neq\varnothing$ และ $P(X)$ คือ เซตกำลัง (power set) ของเซต X สำหรับแต่ละ $A,B\in P(X)$ นิยาม $A+B=A\cup B$ และ $A\bullet B=A\cap B$ จะได้ว่า $(P(X),+,\bullet,\varnothing,X)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ตัวอย่างที่ 4 พีชคณิต MV (MV-algebra) เป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซต L ที่มีสมาชิกอย่างน้อยสองสมาชิกที่ต่างกันซึ่งจะแทนด้วย 0 และ 1 กับการดำเนินการทวิภาค $\oplus$ และ $\odot$ บน L การดำเนินการเอกภาค $\neg$ บน L ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้สำหรับทุก $x,y,z\in L$

(1) $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$ (2) $x\oplus y=y\oplus x$

(3) $x\oplus 0=x$ (4) $\neg(\neg x)=x$

(5) $x\oplus 1=1$ (6) $\neg 0=1$

(7) $x\odot y=\neg(\neg x\oplus\neg y)$ (8) $\neg(\neg x\oplus y)\oplus y=\neg(\neg y\oplus x)\oplus x$

สำหรับแต่ละ $x,y\in L$ นิยาม $x\vee y=(x\odot\neg y)\oplus y$ และ $x\wedge y=(x\oplus\neg y)\odot y$ จะได้ว่า $(L,\vee,\odot,0,1)$ และ $(L,\wedge,\oplus,0,1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่ สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากงานวิจัย (Chang, 1958)

กำหนดให้ L เป็นกึ่งริงสลับที่ สำหรับแต่ละ $m,n\in\mathbb{N}$ ให้ $M_{m,n}(L)$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ ซึ่งมีสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจาก L ถ้า $A\in M_{m,n}(L)$ เขียนแทนสมาชิกตำแหน่งที่ (i,j) ของ A ด้วย a_{ij} สำหรับแต่ละ $i=1,2,3,\ldots,m$ และ $j=1,2,3,\ldots,n$ ในกรณีนี้เขียนแทนด้วย $A=[a_{ij}]_{m,n}$ หรือ $A=[a_{ij}]$ ในกรณีที่ $m=n$ จะเขียนแทน $M_{n,n}(L)$ ด้วย $M_n(L)$

นิยามการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ที่มาจากกึ่งริงสลับที่ การคูณเมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน และรอยเมทริกซ์ ในทำนองเดียวกับการดำเนินการดังกล่าวสำหรับเมทริกซ์จริง การดำเนินการเชิงพีชคณิตข้างต้นมีสมบัติเช่นเดียวกับเมทริกซ์จริง ยกเว้นสมบัติที่เกี่ยวข้องกับตัวผกผันและการตัดออก ดูได้จากงานวิจัย (Zhao and Wang, 2010; Stangam and Chansangiam, 2016)

บทนิยามที่ 2 สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(L)$ และ $B\in M_{p,q}(L)$ ผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A\otimes B=\left[a_{ij}B\right]=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix}\in M_{mp,nq}(L)$$

บทตั้งที่ 1 (Stangam and Chansangiam, 2016) ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ จะได้ว่าบล็อกที่ (i,j) ของ $A\otimes B$ กำหนดโดย $A_{ij}\otimes B$ เมื่อ A_{ij} แทนบล็อกที่ (i,j) ของ A

บทนิยามที่ 3 สำหรับแต่ละ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ ผลคูณฮาดามาร์ดของ A และ B นิยามโดย $A\circ B=[a_{ij}b_{ij}]\in M_{m,n}(L)$

ผลคูณบ๊อคซ์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่กับการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิต

แนวคิดของผลคูณบ๊อคซ์สำหรับเมทริกซ์จริงสามารถขยายไปสู่เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ ได้ดังนี้

บทนิยามที่ 4 ให้ $A=[A_{ij}]\in M_{mp,nq}(L)$ และ $B=[B_{ij}]\in M_{mq,nr}(L)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีรูปแบบการแบ่งบล็อกเดียวกัน โดยแต่ละเมทริกซ์ย่อย A_{ij} มีขนาด $p\times q$ และ เมทริกซ์ย่อย B_{ij} มีขนาด $q\times r$ นิยามผลคูณบ๊อคซ์ของ A และ B ดังนี้

$$A\lozenge B=[A_{ij}B_{ij}]\in M_{mp,nr}(L)$$

ข้อสังเกต ในกรณีเฉพาะที่ $m=n=1$ และเมทริกซ์ A และ B มีเพียงบล็อกเดียว จะได้ว่า $A\lozenge B=AB$ ส่วนในกรณี $p=q=r=1$ นั่นคือแต่ละบล็อกมีขนาด 1×1 จะได้ $A\lozenge B=A\circ B$

ในกรณีทั่วไปผลคูณบ๊อคซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่ ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงถึงสมบัติเชิงพีชคณิตพื้นฐานของผลคูณบ๊อคซ์ กล่าวคือ ผลคูณบ๊อคซ์มีสมบัติการกระจายทางขวาและทางซ้ายเหนือการบวก การเปลี่ยนกลุ่ม มีเอกลักษณ์ และมีสภาพเข้ากันได้กับการคูณด้วยสเกลาร์และการสลับเปลี่ยน

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ A,B และ C เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ L ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมายและให้ $k\in L$ จะได้ว่า

1. $A\lozenge(B+C)=(A\lozenge B)+(A\lozenge C)$
2. $(B+C)\lozenge A=(B\lozenge A)+(C\lozenge A)$
3. $(kA)\lozenge B=A\lozenge(kB)=k(A\lozenge B)$
4. $A\lozenge(B\lozenge C)=(A\lozenge B)\lozenge C$
5. $(A\lozenge B)^T=B^T\lozenge A^T$
6. $A\lozenge J=A=J\lozenge A$ เมื่อ A และ J เป็นเมทริกซ์ที่มีรูปแบบการแบ่งบล็อกเช่นเดียวกัน โดยมีแต่ละบล็อกเป็นเมทริกซ์จัตุรัส และแต่ละบล็อกของ J เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

บทพิสูจน์ ให้ $A=[A_{ij}], B=[B_{ij}]$ และ $C=[C_{ij}]$ จะได้ว่า $kA=[kA_{ij}], kB=[kB_{ij}]$ และ $B+C=[B_{ij}+C_{ij}]$ ดังนั้น

1. $A\Diamond(B+C)=[A_{ij}(B_{ij}+C_{ij})] =[A_{ij}B_{ij}+A_{ij}C_{ij}] =[A_{ij}B_{ij}]+[A_{ij}C_{ij}] =(A\Diamond B)+(A\Diamond C)$
2. $(B+C)\Diamond A=[(B_{ij}+C_{ij})A_{ij}] =[B_{ij}A_{ij}+C_{ij}A_{ij}] =[B_{ij}A_{ij}]+[C_{ij}A_{ij}] =(B\Diamond A)+(C\Diamond A)$
3. $(kA)\Diamond B=[(kA_{ij})B_{ij}] =[k(A_{ij}B_{ij})] =k[A_{ij}B_{ij}] =k(A\Diamond B)$

   $A\Diamond(kB)=[A_{ij}(kB_{ij})] =[(kA_{ij})B_{ij}] =[k(A_{ij}B_{ij})] =k[A_{ij}B_{ij}] =k(A\Diamond B)$
4. $A\Diamond(B\Diamond C)=[A_{ij}]\Diamond[B_{ij}C_{ij}] =[A_{ij}(B_{ij}C_{ij})] =[(A_{ij}B_{ij})C_{ij}] =[A_{ij}B_{ij}]\Diamond[C_{ij}]$

   $=(A\Diamond B)\Diamond C$
5. $(A\Diamond B)^T=[A_{ij}B_{ij}]_{ij}^T =[(A_{ji}B_{ji})^T]_{ij} =[(B_{ji}^T A_{ji}^T)]_{ij} =[B_{ji}^T]_{ij}\Diamond[A_{ji}^T]_{ij} =B^T\Diamond A^T$
6. เห็นได้ชัด

บทตั้งที่ 2 ให้ $A\in M_{m,n}(L)$ และ $B\in M_{n,m}(L)$ จะได้ว่า $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{1\mathrm{j}}b_{\mathrm{j}1}+\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{2\mathrm{j}}b_{\mathrm{j}2}+\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{3\mathrm{j}}b_{\mathrm{j}3}+\cdots+\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{\mathrm{mj}}b_{\mathrm{jm}}\\
&=\sum_{\mathrm{j}=1}^{n}(a_{1\mathrm{j}}b_{\mathrm{j}1}+a_{2\mathrm{j}}b_{\mathrm{j}2}+a_{3\mathrm{j}}b_{\mathrm{j}3}+\cdots+a_{\mathrm{mj}}b_{\mathrm{jm}})\\
&=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{\mathrm{ij}}b_{\mathrm{ji}}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} b_{\mathrm{ji}}a_{\mathrm{ij}}\right)\\
&=\sum_{\mathrm{j}=1}^{n}(b_{\mathrm{j}1}a_{1\mathrm{j}}+b_{\mathrm{j}2}a_{2\mathrm{j}}+b_{\mathrm{j}3}a_{3\mathrm{j}}+\cdots+b_{\mathrm{jm}}a_{\mathrm{mj}})\\
&=\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} b_{\mathrm{j}1}a_{1\mathrm{j}}+\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} b_{\mathrm{j}2}a_{2\mathrm{j}}+\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} b_{\mathrm{j}3}a_{3\mathrm{j}}+\cdots+\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} b_{\mathrm{jm}}a_{\mathrm{mj}}\\
&=\mathrm{tr}(BA)
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ $A\in M_{mp,nq}(L)$ และ $B\in M_{mq,nr}(L)$ โดย $A\Diamond B$ และ $B\Diamond A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า

$$\mathrm{tr}(A\Diamond B)=\mathrm{tr}(B\Diamond A)$$

บทพิสูจน์ โดยการพิจารณาบล็อกของเมทริกซ์ สมบัติของรอยเมทริกซ์และบทตั้งที่ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A\Diamond B) &= \mathrm{tr}(A_{11}B_{11}+A_{22}B_{22}+\cdots+A_{mn}B_{mn})\\
&=\mathrm{tr}(A_{11}B_{11})+\mathrm{tr}(A_{22}B_{22})+\cdots+\mathrm{tr}(A_{mn}B_{mn})\\
&=\mathrm{tr}(B_{11}A_{11})+\mathrm{tr}(B_{22}A_{22})+\cdots+\mathrm{tr}(B_{mn}A_{mn})\\
&=\mathrm{tr}(B_{11}A_{11}+B_{22}A_{22}+\cdots+B_{mn}A_{mn})\\
&=\mathrm{tr}(B\Diamond A)
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ๊อคซ์ ผลคูณโครเนคเคอร์ และผลคูณฮาดามาร์ด

ทฤษฎีบทที่ 3 ให้ $A,B\in M_{m,n}(L)$, $C\in M_{p,q}(L)$ และ $D\in M_{q,r}(L)$ จะได้

$$(A\otimes C)\Diamond(B\otimes D)=(A\circ B)\otimes(CD)$$

บทพิสูจน์ โดยบทนิยามของผลคูณโครเนคเคอร์ จะได้ว่า $A\otimes C=[a_{ij}C]_{ij}$ และ $B\otimes D=[b_{ij}D]_{ij}$

ดังนั้น $(A\otimes C)\Diamond(B\otimes D)=[a_{ij}C]_{ij}\Diamond[b_{ij}D]_{ij} =[(a_{ij}C)(b_{ij}D)]_{ij}$

$=[(a_{ij}b_{ij})(CD)]_{ij} =(A\circ B)\otimes(CD)$

บทนิยามที่ 5 ให้ $A=[A_{ij}]\in M_{mq,nq}(L)$ โดยแต่ละเมทริกซ์ย่อย A_{ij} มีขนาด $q\times q$ และ $k\in\mathbb{N}$ ผู้วิจัยนิยาม

$$A^{\Diamond 1}=A \text{ และ } A^{\Diamond(k+1)}=A\Diamond A^{\Diamond k}$$

สามารถแสดงได้โดยง่ายว่า $A^{\Diamond r}\Diamond A^{\Diamond s}=A^{\Diamond(r+s)}$ และ $(A^{\Diamond r})^{\Diamond s}=A^{\Diamond(rs)}$ สำหรับทุกจำนวนนับ r และ s โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ๊อคซ์กับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก

บทนิยามที่ 6 สำหรับแต่ละ $A\in M_{m,n}(L)$ นิยาม $vec(A)=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_n\end{bmatrix}\in L^{mn}$ เมื่อ A_k คือ แนวตั้งที่ k ของ A สำหรับแต่ละ $k=1,2,...,n$

บทตั้งที่ 3 (Stangam and Chansangiam, 2016) ให้ $A\in M_{m,n}(L)$, $B\in M_{n,p}(L)$ และ $C\in M_{p,q}(L)$ จะได้ว่า

$$vec(ABC)=(C^T\otimes A)vec(B)$$

บทนิยามที่ 7 สำหรับแต่ละ $i=1,2,3,...,k$ ให้ $A_i\in M_{m,n}(L)$ นิยาม

$$\bigoplus_{i=1}^{k}A_i=\begin{bmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_k\end{bmatrix}$$

ตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์จริงได้ถูกนำเสนอในงานวิจัย (Koning, et al., 1991) ในบทความนี้จะพิจารณาตัวดำเนินการดังกล่าวสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ

บทนิยามที่ 8 ให้ $A\in M_{m,n}(L)$ โดย A อยู่ในรูปแบบบล็อกดังนี้

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{bmatrix}$$

ผู้วิจัยนิยามตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อกดังนี้

$$vecb_c(A)=[vec\,A_{11}\cdots vec\,A_{r1}\;vec\,A_{12}\cdots vec\,A_{r2}\cdots vec\,A_{1s}\cdots vec\,A_{rs}]^T$$

ทฤษฎีบทที่ 4 $vecb_c:M_{m,n}(L)\to L^{mn}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง สำหรับทุก $A,B\in M_{m,n}(L)$ และ $k\in L$ จะได้ว่า $vecb_c(A+B)=vecb_c(A)+vecb_c(B)$ และ $vecb_c(kA)=k\,vecb_c(A)$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดจากบทนิยาม

ทฤษฎีบทที่ 5 ให้ $A=[A_{ij}]\in M_{mp,nq}(\mathrm{L})$ และ $B=[B_{ij}]\in M_{mq,nr}(\mathrm{L})$ โดยแต่ละเมทริกซ์ย่อย A_{ij} มีขนาด $p\times q$ และเมทริกซ์ย่อย B_{ij} มีขนาด $q\times r$ จะได้

$$vecb_c(A\Diamond B)=\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i=1}^{m}B_{ij}^T\otimes I_p\right)vecb_c(A)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn}\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn}\end{bmatrix}$ จะได้

$$A\Diamond B=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11} & A_{12}B_{12} & \cdots & A_{1n}B_{1n}\\ A_{21}B_{21} & A_{22}B_{22} & \cdots & A_{2n}B_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m1}B_{m1} & A_{m2}B_{m2} & \dots & A_{mn}B_{mn}\end{bmatrix}$$

โดยการใช้บทนิยามที่ 7 บทตั้งที่ 3 สมบัติของการคูณแบบบล็อก บทตั้งที่ 1 และบทนิยามที่ 7 ตามลำดับ จะได้

$$vecb_c(A\Diamond B)=\begin{bmatrix}vec(A_{11}B_{11})\\ \vdots\\ vec(A_{m1}B_{m1})\\ vec(A_{12}B_{12})\\ \vdots\\ vec(A_{m2}B_{m2})\\ \vdots\\ vec(A_{1n}B_{1n})\\ \vdots\\ vec(A_{mn}B_{mn})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(B_{11}^T\otimes I_p)vec(A_{11})\\ \vdots\\ (B_{m1}^T\otimes I_p)vec(A_{m1})\\ (B_{12}^T\otimes I_p)vec(A_{12})\\ \vdots\\ (B_{m2}^T\otimes I_p)vec(A_{m2})\\ \vdots\\ (B_{1n}^T\otimes I_p)vec(A_{1n})\\ \vdots\\ (B_{mn}^T\otimes I_p)vec(A_{mn})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}B_{11}^T\otimes I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_{m1}^T\otimes I_p & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{1n}^T\otimes I_p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{mn}^T\otimes I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}vec(A_{11})\\ \vdots\\ vec(A_{m1})\\ \vdots\\ vec(A_{1n})\\ \vdots\\ vec(A_{mn})\end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} B_{11}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{m1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{1n}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{mn}^T \end{bmatrix} \otimes I_p \right) vecb_c(A)$$

$$= \left(\bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{i=1}^{m} B_{ij}^T \otimes I_p \right) vecb_c(A)$$

ทฤษฎีบทที่ 6 ให้ $A=[A_{ij}] \in M_{mp,nq}(L)$, $B=[B_{ij}] \in M_{mq,nr}(L)$ และ $C=[C_{ij}] \in M_{mr,ns}(L)$ โดยแต่ละเมทริกซ์ย่อย A_{ij} มีขนาด $p \times q$ เมทริกซ์ย่อย B_{ij} มีขนาด $q \times r$ และเมทริกซ์ย่อย C_{ij} มีขนาด $r \times s$ จะได้

$$\begin{aligned} vecb_c(A \Diamond B \Diamond C) &= \left(\bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{i=1}^{m} \left(C_{ij}^T \otimes A_{ij} \right) \right) vecb_c(B) \\ &= \left(\bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{i=1}^{m} C_{ij}^T \otimes I_p \right) \left(\bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{i=1}^{m} B_{ij}^T \otimes I_p \right) vecb_c(A) \\ &= \left(\left(\bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{i=1}^{m} C_{ij}^{\ T} B_{ij}^{\ T} \right) \otimes I_p \right) vecb_c(A) \end{aligned}$$

บทพิสูจน์

ให้ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \ldots & B_{mn} \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \ldots & C_{mn} \end{bmatrix}$

จะได้ $A \Diamond B \Diamond C = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}C_{11} & A_{12}B_{12}C_{12} & \cdots & A_{1n}B_{1n}C_{1n} \\ A_{21}B_{21}C_{21} & A_{22}B_{22}C_{22} & \cdots & A_{2n}B_{2n}C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{m1}C_{m1} & A_{m2}B_{m2}C_{m2} & \ldots & A_{mn}B_{mn}C_{mn} \end{bmatrix}$ ดังนั้น

$$vecb_c(A \Diamond B \Diamond C) = \begin{bmatrix} vec(A_{11}B_{11}C_{11}) \\ \vdots \\ vec(A_{m1}B_{m1}C_{m1}) \\ vec(A_{12}B_{12}C_{12}) \\ \vdots \\ vec(A_{m2}B_{m2}C_{m2}) \\ \vdots \\ vec(A_{1n}B_{1n}C_{1n}) \\ \vdots \\ vec(A_{mn}B_{mn}C_{mn}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{11}^T \otimes A_{11})vec(B_{11}) \\ \vdots \\ (C_{m1}^T \otimes A_{m1})vec(B_{m1}) \\ (C_{12}^T \otimes A_{12})vec(B_{12}) \\ \vdots \\ (C_{m2}^T \otimes A_{m2})vec(B_{m2}) \\ \vdots \\ (C_{1n}^T \otimes A_{1n})vec(B_{1n}) \\ \vdots \\ (C_{mn}^T \otimes A_{mn})vec(B_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} C_{11}^T\otimes A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{m1}^T\otimes A_{m1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1n}^T\otimes A_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{mn}^T\otimes A_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} vec(B_{11}) \\ \vdots \\ vec(B_{m1}) \\ \vdots \\ vec(B_{1n}) \\ \vdots \\ vec(B_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$=\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i=1}^{m}\left(C_{ij}^T\otimes A_{ij}\right)\right)vecb_c(B_{ij})$$

$$vecb_c(A\Diamond B\Diamond C)=vecb_c((A\Diamond B)\Diamond C)\ =\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i=1}^{m}C_{ij}^T\otimes I_p\right)vecb_c(A\Diamond B)$$

$$=\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i=1}^{m}C_{ij}^T\otimes I_p\right)\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i=1}^{m}B_{ij}^T\otimes I_p\right)vecb_c(A)$$

$$vecb_c(A\Diamond B\Diamond C)=vecb_c(A\Diamond(B\Diamond C))\ =\left(\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i=1}^{m}\left(B_{ij}C_{ij}\right)^T\right)\otimes I_p\right)vecb_c(A_{ij})$$

$$=\left(\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i=1}^{m}C_{ij}{}^T B_{ij}{}^T\right)\otimes I_p\right)vecb_c(A)$$

การแปลงผลคูณบ๊อคซ์เป็นผลคูณแบบปรกติโดยใช้การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

หัวข้อนี้นำเสนอการแปลงเชิงเส้นที่เกี่ยวกับเมทริกซ์ซึ่งคิดค้นโดย C.R. Johnson และ P. Nylen (Johnson and Nylen, 1991) ผู้วิจัยจะนำการแปลงดังกล่าวไปใช้ในการแปลงผลคูณบ็อคซ์ไปสู่ผลคูณเมทริกซ์แบบปรกติ

บทนิยามที่ 9 นิยามฟังก์ชัน $F: M_{mp,nq}(L)\to M_{mp,mnq}(L)$ โดย $F(A)=\begin{bmatrix} D(A_1) & D(A_2) & \cdots & D(A_n)\end{bmatrix}$ เมื่อ $D(A_i)$ คือเมทริกซ์ในรูปแบบบล็อกทแยงมุมของบล็อกแนวตั้งที่ i ของ A

นิยามฟังก์ชัน $G: M_{mq,nr}(L)\to M_{mnq,nr}(L)$ โดย $G(A)=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$ เมื่อ $A_i\oplus A_j$ คือ ผลบวกตรง (direct sum) ของบล็อกแนวตั้งที่ i และ j ของ A ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $A=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix}\end{bmatrix}$ จะได้ว่า $F(A)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & 7 & 8\end{bmatrix}$ และ

$$G(A)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 8\end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบทที่ 7 ให้ $A\in M_{mp,nq}(L)$ และ $B\in M_{mq,nr}(L)$ จะได้ว่า $A\Diamond B=F(A)G(B)$

บทพิสูจน์ ให้ $A=[A_{ij}]$ และ $B=[B_{ij}]$ โดย A และ B มีแนวตั้งที่ i เป็น A_i และ B_i ตามลำดับ จะได้ว่า $F(A)=\begin{bmatrix} D(A_1) & D(A_2) & \cdots & D(A_n)\end{bmatrix}$ และ $G(B)=B_1\oplus B_2\oplus\cdots\oplus B_n$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
&F(A)G(B)\\
&=\begin{bmatrix} D(A_1) & D(A_2) & \cdots & D(A_n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} D(A_1)B_1 & D(A_2)B_2 & \cdots & D(A_n)B_n \end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{21} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{m1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \\ \vdots \\ B_{m2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} A_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2n} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{1n} \\ B_{2n} \\ \vdots \\ B_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{12}B_{12} & \cdots & A_{1n}B_{1n} \\ A_{21}B_{21} & A_{22}B_{22} & \cdots & A_{2n}B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{m1} & A_{m2}B_{m2} & \cdots & A_{mn}B_{mn} \end{bmatrix}\\
&= A \Diamond B
\end{aligned}
$$

เอกสารอ้างอิง

Baccelli, F., Cohan, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. (1992). Synchronization and Linearity. New York: John Wiley and Sons. pp. 101-104.

Brouwer, R.K. (2009). A method of relational fuzzy clustering based on producing feature vectors using FastMap. Information Sciences 179: 3561-3582.

Butkovič, P. (2003). Max-algebra: the linear algebra of combinatorics. Linear Algebra and its Applications 367: 313-335.

Cechlárova, K. and Plávka, J. (1996). Linear independence in bottleneck algebras. Fuzzy Sets and Systems 77: 337-348.

Chang, C.C. (1958). Algebraic analysis of many valued logics. Transactions of the American Mathematical Society 88: 467-490.

Cuninghame-Green, R.A. and Butkovič, P. (2004). Bases in max-algebra. Linear Algebra and its Applications 389: 107-120.

Di Nola, A., Lettieri, A., Perfilieva, I. and Novak, V. (2007). Algebraic analysis of fuzzy systems. Fuzzy Sets and Systems 158: 1-22.

Golan, J.S. (1999). Semirings and Their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. pp. 1-2.

Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1991). Topics in Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press. pp. 239-381.

Johnson, C.R. and Nylen, P. (1991). Largest singular value submultiplicativity. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 12(1): 1–6.

Kim, K.H. and Roush, F.W. (1980). Generalized fuzzy matrices. Fuzzy Sets and Systems 4: 293-315.

Koning, R.H., Neudecker, H. and Wansbeek, T. (1991). Block Kronecker products and the vecb operator. Linear Algebra and its Applications 149: 165-184.

Poplin, P.L. and Hartwig, R.E. (2004). Determinantal identities over commutative semirings. Linear Algebra and its Applications 387: 99-132.

Reutenauer, C. and Straubing, H. (1984). Inversion of matrices over a commutative semiring. Journal of Algebra 1988: 350-360.

Stangam, R. and Chansangiam, P. (2016). Kronecker product of matrices over commutative semiring. Thai Journal of Mathematics. Special Issue: 21-38.

Styan, G.P.H. (1973). Hadamard products and multivariate statistical analysis. Linear Algebra and its Applications 6: 217-222.

Zhao, S. and Wang, X. (2010). Invertible matrices and semilinear spaces over commutative semiring. Information Sciences 180: 5115-5124.

Zhao, S. and Wang, X. (2011). Bases in semilinear spaces over join-semirings. Fuzzy Sets and Systems 182: 93-100.

Zimmermann, U. (1981). Linear and combinatorial optimization in orders algebraic structures. Annals of Discrete Mathematics 10: 30-40.

❑❑❑❑❑