ว.วิทย. มข. 45(4) 937-947 (2560) KKU Sci. J. 45(4) 937-947 (2017)

การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงปัวซงนัยทั่วไป

The Statistical Hypotheses Testing for Generalized Poisson Distribution

บรรทม สุระพร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

E-mail: bunthom.s@ubu.ac.th

บทคัดย่อ

ในทางทฤษฎีกล่าวว่า มีการทดสอบที่มีกำลังสูงที่สุดเสมอในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ (θ) ของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซงนัยทั่วไป (Generalized Poisson Distribution) สามารถใช้ Neyman – Pearson Lemma หรือหาสถิติทดสอบ (test statistics) สำหรับใช้ทดสอบสมมติฐานอย่างง่าย (Simple hypothesis) และอาจจะขยายหรือประยุกต์ใช้ Lemma นี้เพื่อหาสถิติทดสอบสมมติฐานประสม (Composite hypothesis) อีกทั้งยังสามารถใช้การพิจารณา Monotone Likelihood ratio distribution หรืออาจใช้คุณสมบัติของ density function ที่สามารถจัดให้อยู่ในตระกูลของ exponential class ได้เพื่อหา test function ที่เหมาะสมสำหรับการทดสอบสมมติฐานที่เป็นแบบประสมได้

ABSTRACT

By the theorem there exists a UMP test for testing hypotheses about the parameter θ of the generalized Poisson distribution. Neyman – Pearson lemma can be applied to find a test statistics for both a simple and a composite hypothesis. In addition, monotone likelihood ratio distribution as well as the properties of an exponential family will be taken into account in order to find a suitable test function for composite hypothesis.

คำสำคัญ: การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดเสมอ การแจกแจงปัวซงนัยทั่วไป

Keywords: The Uniformly Most Powerful Test, Generalized Poisson Distribution

1. บทนำ

ในการพิจารณา probability mass function ของตัวแปรเชิงสุ่มใดๆ ให้พารามิเตอร์ $\theta\in\Omega$ ซึ่งเรียกปริภูมิพารามิเตอร์ (The parameter space) และให้ P = {P_θ , $\theta\in\Omega$} ว่าเป็น class ของการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ที่มี θ ต่างๆ กัน

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจงนั้น สามารถที่จะแบ่ง P ออกเป็น 2 ส่วน คือ ให้เป็นเซ็ต H ประกอบด้วยพารามิเตอร์จำนวนหนึ่ง เขียนแทนด้วย $\theta\in\Omega_H$ ซึ่งเรียกสมมติฐานนี้ว่าสมมติฐานเพื่อการทดสอบ (Null hypothesis) และเซ็ต K ประกอบด้วยพารามิเตอร์อีกจำนวนหนึ่งที่แตกต่างจากเซ็ต H โดยสิ้นเชิง เขียนแทนด้วย $\theta\in\Omega_K$ และเรียกสมมติฐานนี้ว่าสมมติฐานทางเลือก (Alternative hypothesis) โดยที่เซ็ต P แบ่งออกเป็นเซ็ต H และ K นั้น H $\cup$ K = Ω และ H $\cap$ K =$\varnothing$ เสมอ

เมื่อแบ่ง P ออกเป็น 2 ส่วนคือ H และ K ตามที่สนใจจะทดสอบสมมติฐานแล้ว จึงเก็บรวบรวมข้อมูล (Observations) และโดยอาศัยข้อมูลจากตัวอย่างที่สุ่มได้ มาพิจารณาว่าข้อมูลจากตัวอย่างสุ่มแสดงให้เห็นหรือไม่ว่าสมมติฐานที่จะพิจารณานั้นพอเป็นไปได้หรือมีความน่าจะเป็นที่เป็นตาม H สูงพอ หากความน่าจะเป็นดังกล่าวสูงพอจึงจะยอมรับ (Accept) H ว่าเป็นจริง หากไม่สูงพอก็จะปฏิเสธ (Reject) H กล่าวคือพารามิเตอร์เป็นไปตามเซ็ต K นั่นเอง ในการทดสอบสมมติฐานนั้น จึงจำเป็นต้องให้ความสำคัญกับตัวแบบทดสอบ เพราะหากใช้ตัวแบบทดสอบที่ไม่เหมาะสมกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ อาจทำให้การตัดสินใจผิดพลาดไปจากที่ควรจะเป็นได้

ในบทความนี้สนใจการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบปัวซงนัยทั่วไป ซึ่งให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจ โดยที่มีค่าเฉลี่ยของการเกิดเหตุการณ์นั้นคงที่ ณ เวลาใดเวลาหนึ่งหรือบริเวณใดบริเวณหนึ่ง แทนค่าเฉลี่ยด้วย λ และอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยกับความแปรปรวน (dispersion) แทนด้วย η ซึ่งฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (Probability mass function) ของ X เป็นดังนี้

$$P_{\lambda,\eta}(x)=\frac{\lambda(\lambda+\eta x)^{x-1}e^{-\lambda-\eta x}}{x!};\ x=0,1,2,3,\ldots$$

โดยที่ $\lambda>0$, $0\leq\eta<1$ และมีค่าคาดหวังของ X คือ $\frac{\lambda}{1-\eta}$ ความแปรปรวนของ X คือ $\frac{\lambda}{(1-\eta)^3}$

พิจารณาในกรณีเฉพาะ ให้ $\eta=\delta\lambda$ และทราบค่า δ ดังนั้น $P_{\lambda,\eta}(x)$ =

$$\frac{\lambda^{x}(1+\delta x)^{x-1}e^{-\lambda(1+\delta x)}}{x!};\ x=0,1,2,3,\ldots$$

สมมติฐานที่สนใจจะทดสอบ มีดังนี้

1. H: $\lambda=\lambda_0$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda=\lambda_1$ โดยที่ $\lambda_1<\lambda_0$
2. H: $\lambda\leq\lambda_0$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda>\lambda_0$
3. H: $\lambda\leq\lambda_1$ หรือ $\lambda\geq\lambda_2$

    ขัดแย้งกับ K:$\lambda_1<\lambda<\lambda_2$
4. H: $\lambda_1\leq\lambda\leq\lambda_2$ ขัดแย้งกับ K:$\lambda<\lambda_1$ หรือ $\lambda>\lambda_2$
5. H: $\lambda=\lambda_0$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda\neq\lambda_0$

2. แบบทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (The Most Powerful Test)

ในการทดสอบสมมติฐานอย่างง่าย H: $\lambda = \lambda_0$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda = \lambda_1$ พิจารณากรณี $\lambda_1 < \lambda_0$ สามารถใช้ Neyman – Pearson lemma ได้ดังนี้

$$P_{\lambda_0}(x) = \lambda_0^x (1+\delta x)^{x-1} e^{-\lambda_0(1+\delta x)} / x!$$

และ

$$P_{\lambda_1}(x) = \lambda_1^x (1+\delta x)^{x-1} e^{-\lambda_1(1+\delta x)} / x!$$

ดังนั้น

$$\frac{P_{\lambda_1}(x)}{P_{\lambda_0}(x)} = \frac{\lambda_1^x (1+\delta x)^{x-1} e^{-\lambda_1(1+\delta x)} / x!}{\lambda_0^x (1+\delta x)^{x-1} e^{-\lambda_0(1+\delta x)} / x!}$$

$$= (\lambda_1 / \lambda_0)^x e^{(1+\delta x)(\lambda_0 - \lambda_1)}$$

และจาก

$$\alpha(b) = P_{\lambda_0}\left\{\frac{P_{\lambda_1}(X)}{P_{\lambda_0}(X)} > b\right\}$$

$$= P_{\lambda_0}\left\{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^X e^{(1+\delta X)(\lambda_0-\lambda_1)} > b\right\}$$

$$= P_{\lambda_0}\left\{X \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) + (1+\delta X)(\lambda_0 - \lambda_1) > \ln(b)\right\}$$

$$= P_{\lambda_0}\left\{X\left[\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) + \delta(\lambda_0 - \lambda_1)\right] > \ln(b) - (\lambda_0 - \lambda_1)\right\}$$

กรณี $\lambda_1 < \lambda_0$ และเพื่อให้ $\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) + \delta(\lambda_0 - \lambda_1) < 0$ จะต้อง $\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) + \ln e^{\delta(\lambda_0 - \lambda_1)} < 0$ โดยที่ $\ln(1) = 0$

ดังนั้น $\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{\delta(\lambda_0-\lambda_1)}\right) < \ln(1)$ ได้ $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{\delta(\lambda_0-\lambda_1)} < 1$ จึงต้องมีเงื่อนไข $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < e^{-\delta(\lambda_0-\lambda_1)}$ และ $\delta < 0.16$

$\alpha(b) = P_{\lambda_0}\{X < c\}$ เมื่อ $c = \frac{\ln(b) - (\lambda_0 - \lambda_1)}{\ln(\lambda_1/\lambda_0) + \delta(\lambda_0 - \lambda_1)}$

ดังนั้นฟังก์ชันวิกฤติ (Critical function) สำหรับการทดสอบขนาด α หรือทดสอบ H:$\lambda = \lambda_0$ ขัดแย้งกับ K:$\lambda = \lambda_1$ กรณี $\lambda_1 < \lambda_0$ อยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x<c \\ \beta & \text{สำหรับ } x=c \\ 0 & \text{สำหรับ } x>c \end{cases}$$

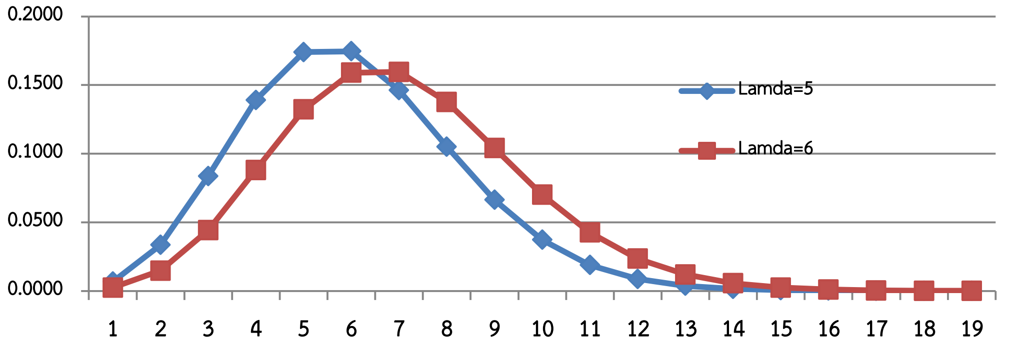
โดยที่ C และ $\beta = \frac{\alpha - \alpha(c)}{\alpha(c-0) - \alpha(c)}$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E_{\lambda_0}\phi(X) = \alpha$

ในกรณีเฉพาะ เมื่อ δ = 0.001 ขนาดของการทดสอบ α= 0.05 เพื่อทำการทดสอบสมมติฐาน H : λ=6 ขัดแย้งกับ K : λ = 5 จากตารางที่ 1 ความน่าจะเป็น $P_\lambda(x)$ เป็นดังนี้

ตารางที่ 1 Generalized Poisson Probability: GP(X,λ); δ = 0.001

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0.0067	0.0335	0.0836	0.1391	0.1741	0.1746	0.1462	0.1052	0.0663	0.0372	0.0189
6	0.0025	0.0148	0.0442	0.0882	0.1323	0.1590	0.1597	0.1377	0.1041	0.0701	0.0425

λ \ x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...	รวม
5	0.0087	0.0037	0.0014	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	......	1.0000
6	0.0235	0.0120	0.0056	0.0025	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	......	1.0000



คำนวณได้จุด C เป็น 2 และ $\beta = \dfrac{0.05 - P_{\lambda_0}(X < c)}{P_{\lambda_0}(X = c)} = \dfrac{0.05 - P_{\lambda_0}(X < 2)}{P_{\lambda_0}(X = 2)} = \dfrac{0.05 - 0.0173}{0.0442} = 0.7398190$

ดังนั้นฟังก์ชันวิกฤติ อยู่ในฟอร์ม $\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x < 2 \\ 0.7398190 & \text{สำหรับ } x = 2 \\ 0 & \text{สำหรับ } x > 2 \end{cases}$

ตารางที่ 2 แสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (β) ณ จุดวิกฤติ C และค่าของ C สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H: λ = 6 ขัดแย้งกับ K: λ = 5 แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ (α)	δ	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = c$ (β)	ค่าวิกฤติ(c)
0.01	0.001	0.5087581	1
	0.035	0.6238891	1
	0.075	0.7931185	1
	0.115	0.0044581	2
	0.150	0.1537929	2
0.05	0.001	0.7398190	2
	0.035	0.0706167	3
	0.075	0.4948072	3
	0.115	0.2232119	4
	0.150	0.2567822	5

หมายเหตุ: ค่าของ δ มีค่าไม่เกิน 0.16 ซึ่งมาจาก $\eta = \delta\lambda$ และ $0 \le \eta < 1$ ดังนั้น $\delta\lambda < 1$ หรือ $\delta < 1/\lambda$ ถ้ากำหนด λ = 6 จึงกำหนดค่าให้ δ มีค่าไม่เกิน 1/6 = 0.16

3. แบบทดสอบที่มีกำลังสูงสุดเสมอ (The Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาตัวทดสอบสำหรับสมมติฐานต่างๆ หากสามารถหาตัวทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อยๆ ในขณะที่ตัวทดสอบยังไม่เปลี่ยนไป ยังสามารถใช้ตัวทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นตัวทดสอบที่จัดได้ว่าดีมาก กล่าวคือตัวทดสอบที่มีฟอร์มเดียว (Uniform) แต่สามารถใช้ทดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกได้เป็น 2 กรณี คือ

3.1 กรณีการทดสอบสมมติฐาน H: $\lambda \le \lambda_0$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda > \lambda_0$

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ของการแจกแจงปัวซงนัยทั่วไป อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &= \frac{\lambda^x (1+\delta x)^{x-1} e^{-\lambda(1+\delta x)}}{x!}; x = 0,1,2,\ldots \\ &= e^{x\ln(\lambda)} e^{-\lambda-\delta\lambda x} (1+\delta x)^{x-1} / x! \\ &= e^{-\lambda} e^{x[\ln(\lambda)-\delta\lambda]} (1+\delta x)^{x-1} / x! \\ &= C(\lambda).e^{Q(\lambda).T(x)}.h(x) \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อเทียบฟอร์มแล้วเห็นได้ว่า $C(\lambda) = e^{-\lambda},\ Q(\lambda) = \ln(\lambda) - \delta\lambda,\ T(x) = x$ และ $h(x) = (1+\delta x)^{x-1} / x!$ ดังนั้นจะได้ว่าฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซงนัยทั่วไป จัดอยู่ในตระกูลของ one parameter exponential ได้และพิจารณา $Q(\lambda) = \ln(\lambda) - \delta\lambda$ เป็น strictly monotone increasing function ตาม λ ดังนั้นโดยทฤษฎีแล้วจะมี UMP test $\phi(x)$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H : $\lambda \le \lambda_0$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda > \lambda_0$ ที่ขนาดการทดสอบ α อยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x > C \\ \beta & \text{สำหรับ } x = C \\ 0 & \text{สำหรับ } x < C \end{cases}$$

โดยที่ C และ β เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E_{\lambda_0}\phi(X) = \alpha$

ในกรณีเฉพาะ เมื่อ $\lambda_0 = 5$, $\delta = 0.001$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ เพื่อทำการทดสอบสมมติฐาน H: $\lambda \le 5$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda > 5$ จากตารางที่ 3 ความน่าจะเป็น $P_\lambda(x)$ จะได้ค่า $C = 9$ สามารถหาค่า $\beta = \dfrac{0.05 - P_{\lambda_0}(X < 9)}{P_{\lambda_0}(X = 9)}$ = 0.4433031 ดังนั้นจึงได้ฟังก์ชันวิกฤติเป็น UMP test อยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x > 9 \\ 0.4433031 & \text{สำหรับ } x = 9 \\ 0 & \text{สำหรับ } x < 9 \end{cases}$$

ตารางที่ 3 แสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (β) ณ จุดวิกฤติ C และค่าของ C สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H: $\lambda \leq 5$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda > 5$ แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ (α)	δ	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = c(\beta)$	ค่าวิกฤติ (c)
	0.001	0.4686495	11
	0.035	0.0992148	14
0.01	0.075	0.8250482	22
	0.115	0.9881303	39
	0.150	0.5244848	85
	0.001	0.4433031	9
	0.035	0.0421856	11
0.05	0.075	0.0521555	16
	0.115	0.2195866	27
	0.150	0.8427055	55

3.2 กรณีการทดสอบสมมติฐาน H: $\lambda \leq \lambda_1$ หรือ $\lambda \geq \lambda_2$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X ที่มีการแจกแจงปัวส์ซงนัยทั่วไปตามข้อ 1) ที่ฟังก์ชันความน่าจะเป็นอยู่ในตระกูลของ one parameter exponential ซึ่ง $Q(\lambda)$ เป็น strictly monotone increasing function ตาม λ โดยทฤษฎีสำหรับการทดสอบสมมติฐาน จะมี Uniformly Most Powerful test $\phi(x)$ ขนาดการทดสอบ α อยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } C_1 < x < C_2 \\ \beta_i & \text{สำหรับ } x = C_i \text{ ; i = 1,2} \\ 0 & \text{สำหรับ } x < C_1 \text{ หรือ } x > C_2 \end{cases}$$

โดยที่ C_i และ β_i เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E_{\lambda_1}\phi(X) = E_{\lambda_2}\phi(X) = \alpha$ จะได้ว่า

$$\sum_{x=c_1+1}^{c_2-1} P_{\lambda_1}(X) + \beta_1 P_{\lambda_1}(c_1) + \beta_2 P_{\lambda_1}(c_2) = \alpha \quad \text{....... (1)}$$

$$\sum_{x=c_1+1}^{c_2-1} P_{\lambda_2}(X) + \beta_1 P_{\lambda_2}(c_1) + \beta_2 P_{\lambda_2}(c_2) = \alpha \quad \text{....... (2)}$$

ในกรณีเฉพาะ เมื่อ δ = 0.115 ขนาดของการทดสอบ α = 0.05 สำหรับใช้ทดสอบสมมติฐาน H: $\lambda \leq 5$ หรือ $\lambda \geq 6$ ขัดแย้งกับ K: $5 < \lambda < 6$ จากตารางที่ 4 ความน่าจะเป็น $P_\lambda(X)$ จะได้ค่า C_1=14 และ C_2= 16 และแทนค่าความน่าจะเป็นจากสมการ (1) และ (2) ด้านบนดังนี้

$$0.0351 + 0.0393\beta_1 + 0.0313\beta_2 = 0.05 \text{ และ}$$

$$0.0355 + 0.0371\beta_1 + 0.0338\beta_2 = 0.05 \text{ หรือ}$$

$$0.0393\beta_1 + 0.03130\beta_2 = 0.01490$$
$$0.0371\beta_1 + 0.03380\beta_2 = 0.01450$$

ดังนั้นจะได้ว่า β_1=0.2978277 β_2=0.1020884

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } 14 < x < 16 \\ 0.2978277 & \text{สำหรับ } x = 14 \\ 0.1020884 & \text{สำหรับ } x = 16 \\ 0 & \text{สำหรับ } x < 14 \text{ หรือ } x > 16 \end{cases}$$

จะได้ฟังก์ชันวิกฤติเป็น UMP test อยู่ในฟอร์ม

ตารางที่ 4 แสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (β_i) ณ จุดวิกฤติ c_1 และค่าของ c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H: $\lambda \leq 5$ หรือ $\lambda \geq 6$ ขัดแย้งกับ K: $5<\lambda<6$ แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ(α)	δ	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = c_1$ (β_1)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = c_2$ (β_2)	ค่าวิกฤติ (c_1)	ค่าวิกฤติ (c_2)
0.01	-	Not exist	Not exist	-	-
0.05	0.001	Not exist	Not exist	-	-
	0.035	Not exist	Not exist	-	-
	0.075	Not exist	Not exist	-	-
	0.115	0.2978277	0.1020884	14	16
	0.150	0.7176667	0.7738889	29	33
0.10	0.001	Not exist	Not exist	-	-
	0.035	Not exist	Not exist	-	-
	0.075	0.04625334	0.4136173	8	10
	0.115	0.02297566	0.7855687	13	16
	0.150	0.75075657	0.2671660	27	36

4. แบบทดสอบที่ไม่เอนเอียงที่มีกำลังสูงสุดเสมอ (The Uniformly Most Powerful Unbiased Test)

ในกรณีเมื่อพยายามหาตัวสถิติเพื่อการทดสอบที่เป็น UMP test ไม่มีในบางสมมติฐาน จึงอาจหาตัวสถิติเพื่อการทดสอบที่มีคุณสมบัติต่ำลง โดยอาจจะหา test ในกลุ่มที่เป็น Unbiased เท่านั้น ซึ่งเรียกตัวทดสอบที่ได้นั้นว่า UMP Unbiased test โดยจะพิจารณาสมมติฐาน 2 ลักษณะที่จะมี UMP Unbiased test คือ

4.1 กรณีการทดสอบสมมติฐาน H: $\lambda_1\leq\lambda\leq\lambda_2$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda<\lambda_1$ หรือ $\lambda>\lambda_2$

โดยทฤษฎีสำหรับการทดสอบสมมติฐานนี้ ซึ่งฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในตระกูลของ one parameter exponential โดยที่ $Q(\lambda)$ เป็น strictly monotone increasing ตาม λ จะมี UMP Unbiased test $\phi(x)$ ที่มีขนาดการทดสอบ α อยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x < c_1 \text{ หรือ } x > c_2 \\ \beta_i & \text{สำหรับ } x = c_i \text{ ; i = 1,2} \\ 0 & \text{สำหรับ } c_1 < x < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_i และ β_i เป็นค่าคงที่ที่คำนวณได้จาก

$$E_{\lambda_1}\phi(X) = E_{\lambda_2}\phi(X) = \alpha$$

จะได้ว่า

$$\sum_{x=0}^{c_1-1} P_{\lambda_1}(x) + \sum_{x=c_2+1}^{\infty} P_{\lambda_1}(x) + \beta_1 P_{\lambda_1}(c_1) + \beta_2 P_{\lambda_1}(c_2) = \alpha \quad \text{.........(3)}$$

$$\sum_{x=0}^{c_1-1} P_{\lambda_2}(x) + \sum_{x=c_2+1}^{\infty} P_{\lambda_2}(x) + \beta_1 P_{\lambda_2}(c_1) + \beta_2 P_{\lambda_2}(c_2) = \alpha \quad \text{.........(4)}$$

จากตารางที่ 5 ความน่าจะเป็น เมื่อ δ = 0.035 ขนาดของการทดสอบ α = 0.05 โดยที่ λ_1 = 5 และ λ_2 = 6 จะได้ค่า c_1 = 2 และ c_2 = 15 และแทนค่าความน่าจะเป็นจากสมการ (3) และ (4) ด้านบน ดังนี้

$$0.00674 + 0.02828 + 0.00236 + 0.00129 + 0.00070 + 0.00037 + 0.00019 + 0.00010 + 0.00005 + 0.00002 + 0.00001 + 0.00001 + 0.06351\beta_1 + 0.03137\beta_2 = 0.05$$

และ

$$0.00248 + 0.01206 + 0.00916 + 0.00583 + 0.00363 + 0.00222 + 0.00134 + 0.00079 + 0.00046 + 0.00027 + 0.00015 + 0.00008 + 0.00005 + 0.00003 + 0.00001 + 0.00001 + 0.03137\beta_1 + 0.01405\beta_2 = 0.05$$

หรือ

$$0.06351\beta_1 + 0.03137\beta_2 = 0.00989$$

$$0.03137\beta_1 + 0.01405\beta_2 = 0.01145$$

ดังนั้นจะได้ว่า β_1= 0.1197368 β_2= 0.5450948 จึงได้ฟังก์ชันวิกฤติเป็น UMP Unbiased test สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H: 5≤λ≤6 ขัดแย้งกับ K: λ<5 หรือ λ>6 อยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x < 2 \text{ หรือ } x > 15 \\ 0.1197368 & \text{สำหรับ } x = 2 \\ 0.5450948 & \text{สำหรับ } x = 15 \\ 0 & \text{สำหรับ } 2 < x < 15 \end{cases}$$

ตารางที่ 5 แสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (β_i) ณ จุดวิกฤติ c_1 และค่าของ c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H: $5 \leq \lambda \leq 6$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda<5$ หรือ $\lambda>6$ แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ(α)	δ	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = c_1$ (β_1)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = c_2$ (β_2)	ค่าวิกฤติ (c_1)	ค่าวิกฤติ (c_2)
0.01	0.001	0.0553616	0.4692838	1	13
	0.035	0.0829276	0.3031256	1	18
	0.075	0.1238609	0.2667835	1	31
	0.115	Not exist	Not exist	-	-
	0.150	Not exist	Not exist	-	-
0.05	0.001	0.0043956	0.4814101	2	11
	0.035	0.1197368	0.5450948	2	15
	0.075	0.3483648	0.1306198	2	24
	0.115	0.7051848	0.9605927	2	54
	0.150	0.0527785	0.4165152	3	122

4.2 กรณีการทดสอบสมมติฐาน H: $\lambda=\lambda_0$ ขัดแย้งกับ K: $\lambda\neq\lambda_0$

ฟังก์ชันวิกฤติเป็น UMP Unbiased test คล้ายกับในกรณีข้อ 4.1 โดยอยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x<c_1 \text{ หรือ } x>c_2 \\ \beta_i & \text{สำหรับ } x = c_i\text{ ; i = 1,2} \\ 0 & \text{สำหรับ } c_1<x<c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_i และ β_i เป็นค่าคงที่ที่คำนวณได้จาก

$$E_{\lambda_0}\phi(X)=\alpha \text{ และ } E_{\lambda_0}[X.\phi(X)]=E_{\lambda_0}[X]\alpha$$

ได้ว่า
$$\sum_{x=0}^{c_1-1} P_{\lambda_0}(X)+\sum_{x=c_2+1}^{\infty} P_{\lambda_0}(X)+\beta_1 P_{\lambda_0}(c_1)+\beta_2 P_{\lambda_0}(c_2) = \alpha \quad ....(5)$$

$$\sum_{x=0}^{c_1-1} x.P_{\lambda_0}(X)+\sum_{x=c_2+1}^{\infty} x.P_{\lambda_0}(X)+c_1\beta_1 P_{\lambda_0}(c_1)+c_2\beta_2 P_{\lambda_0}(c_2) = \frac{\lambda_0}{1-\delta\lambda_0}.\alpha \quad ....(6)$$

ในกรณีเฉพาะ เมื่อ δ = 0.001 ขนาดของการทดสอบ α = 0.05 สำหรับใช้ทดสอบสมมติฐาน H: λ = 5 ขัดแย้งกับ K: $\lambda\neq 5$ จากตารางที่ 6 ความน่าจะเป็น $P_\lambda(X)$ จะได้ค่า c_1 =1 และ c_2 = 10 และแทนค่าความน่าจะเป็นจากสมการ (5) และ (6) ได้ดังนี้

โดยที่ $0.0067+0.0087+0.0037+0.0014+0.0005+0.0002+0.0001+0.0335\beta_1+0.0189\beta_2 = 0.05$

และ $0(0.0067)+11(0.0087)+12(0.0037)+13(0.0014)+14(0.0005)+15(0.0002)+16(0.0001)+$
$0.0335\beta_1++10(0.0189)\beta_2 = 0.05$

หรือได้สมการ

$0.0335\beta_1+0.0189\beta_2 \quad = 0.02864$

$0.0335\beta_1+0.1890\beta_2 \quad = 0.08107$

ดังนั้นจะได้ว่า β_1 = 0.6809567 และ β_2 = 0.3082370 จึงได้ฟังก์ชันวิกฤติเป็น UMP Unbiased test สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H: λ =5 ขัดแย้งกับ K: $\lambda \neq 5$ อยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x < 1 \text{ หรือ } x > 10 \\ 0.6809567 & \text{สำหรับ } x = 1 \\ 0.3082370 & \text{สำหรับ } x = 10 \\ 0 & \text{สำหรับ } 1 < x < 10 \end{cases}$$

ตารางที่ 6 แสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (β_i) ณ จุดวิกฤติ c_1และค่าของ c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H: λ = 5 ขัดแย้งกับ K: $\lambda \neq 5$ แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ(α)	δ	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = c_1$ (β_1)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = c_2$ (β_2)	ค่าวิกฤติ (c_1)	ค่าวิกฤติ (c_2)
0.01	0.001	0.0261461	0.4318302	1	12
	0.035	0.0063686	0.2914260	1	16
	0.075	0.0205854	0.9204149	1	26
	0.115	0.0628422	0.8541270	1	50
	0.150	0.0991619	0.0064576	1	119
0.05	0.001	0.6809567	0.3082370	1	10
	0.035	0.8717096	0.1671858	1	13
	0.075	0.2017410	0.0979951	2	21
	0.115	0.3875462	0.0146187	2	37
	0.150	0.0460190	0.1197926	3	118

5. อภิปราย

ในการทดสอบสมมติฐานของพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม ปัวซงหรือการแจกแจงปัวซงนัยทั่วไป เนื่องจากค่าของตัวแปรสุ่มเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นค่าของความน่าจะเป็น $f(x)$ จะมีเฉพาะบริเวณที่ค่า X เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นในกรณีที่ค่าวิกฤติมีค่าอยู่ระหว่างจำนวนเต็ม 2 ค่า เช่น อยู่ระหว่าง 10 กับ 11 เป็นต้น ในกรณีเฉพาะเมื่อ δ = 0.001 ขนาดของการทดสอบ α = 0.01 สำหรับใช้ทดสอบสมมติฐาน H: λ = 5 ขัดแย้งกับ K: $\lambda \neq 5$ จากตารางที่ 6 ความน่าจะเป็น $P_\lambda(X)$ จะได้ค่า c_1=1 และ c_2=12 โดยที่

$$0.0067+0.0014+0.0005+0.0002+0.0001+0.0335\beta_1+0.0037\beta_2 = 0.01$$

และ $$0(0.0067)+13(0.0014)+14(0.0005)+15(0.0002)+16(0.0001)+0.0335\beta_1+12(0.0037)\beta_2 = 0.01$$

หรือเขียนสมการใหม่ได้เป็น

สมการ $0.0335\beta_1+0.0037\beta_2 \quad = 0.00103$

และ $0.0335\beta_1+0.0481\beta_2 = 0.02005$

ดังนั้นจะได้ว่า β_1= -0.0166162 และ β_2 = 0.4283949 ซึ่งค่าของความน่าจะเป็นมีค่าเป็นลบ ดังนั้นหากสามารถหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนจริงได้ก็จะสามารถหาค่าวิกฤติได้ตามต้องการทุกการทดสอบ

6. เอกสารอ้างอิง

Ambagaspitiya, R.S. and Balakrishnan, N. (1994). On the compound generalized Poisson distribution. ASTIN Bulletin. 24: 255 – 263.

Consul, P.C. (1989). Generalized Poisson Distributions, properties and applied. New York: Marcel Dekker.

Lehmann, E.L. (1986). Testing Statistical Hypotheses., 2nd ed. New York: John Wiley & Sons.

Kendall, M.G. and Stuart, A.S. (1973). The Advanced Theory of Statistics. 3rd ed. London: Charles Griffin.

Olkin, I., Gleser, L.J., and Derman, C. (1980). Probability Models and Applications. New York: Macmillan.

Suraporn, B. (2006).The generalized Poisson distribution: some properties and estimation. Doctoral dissertation, The National institute Development Administration.

❑❑❑❑❑