



การเปรียบเทียบวิธีผลต่างจำกัดและวิธีสมาชิกจำกัดสำหรับ
แบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในสองมิติ

Comparison of Finite Element and Finite Difference Methods
for Two-dimensional Magnetotelluric Modelling

ชนกฤษ ถิ่นถาวร¹ และ วีระชัย สาระคร^{1*}

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น 40002

*Corresponding Author, E-mail: wsarakorn@kku.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพและความแม่นยำของวิธีผลต่างจำกัดและวิธีสมาชิกจำกัดสำหรับแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในสองมิติ วิธีผลต่างจำกัด 5 จุดและวิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมได้ถูกนำมาใช้และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ของวิธีเหล่านี้ได้ถูกพัฒนาขึ้น ในการแสดงการเปรียบเทียบของวิธีเหล่านี้ แบบจำลองกึ่งปริภูมิและ COMMEMI2D-1 ได้ถูกนำมาใช้เป็นตัวอย่าง ประสิทธิภาพในแง่ของเวลาที่ใช้ในการคำนวณและความแม่นยำในแง่ของความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขของวิธีเหล่านี้ได้ถูกนำเสนอและศึกษา ผลการทดลองที่หาได้บ่งบอกว่า วิธีผลต่างจำกัดใช้เวลาในการทำงานให้สำเร็จน้อยที่สุด ในขณะที่วิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยมใช้เวลานานที่สุด อย่างไรก็ตาม ผลเฉลยโดยประมาณและความคลาดเคลื่อนที่หาได้จากทั้งสามวิธีมีค่าใกล้เคียงกันเมื่อแบบจำลองที่นำมาใช้ไม่ได้มีความซับซ้อนมาก

ABSTRACT

In this research, we compare the efficiency and accuracy of the finite difference and finite element methods for two-dimensional magnetotelluric modelling. The five-points finite difference method and finite element with triangular and quadrilateral meshes are derived and their computer codes are developed. To present the comparison of these methods, the half-space and COMMEMI2D-1 model are used as the examples. The efficiency in term of CPU time and accuracy in term of numerical errors of three methods are presented and investigated. The obtained results indicate that the finite difference method takes the shortest CPU times to

complete the task whereas the finite element method with quadrilateral mesh takes the longest CPU times. However, the approximated solutions and their errors obtained by three methods are closed when the tested models are not too complicated.

คำสำคัญ: แบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในสองมิติ ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด

Keywords: 2-D Magnetotelluric modelling, Finite difference method, Finite element method

บทนำ

วิธีแมกนีโตเทลลูริก (Magnetotelluric method) เป็นวิธีสำรวจทางธรณีฟิสิกส์วิธีหนึ่งที่อาศัยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีอยู่ตามธรรมชาติช่วยในการสำรวจโครงสร้างสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลก วิธีการสำรวจนี้สามารถประยุกต์ใช้ในการสำรวจหาแร่ เหล็ก แร่ น้ำมัน พลังงานใต้พื้นพิภพ เป็นต้น แบบจำลองแมกนีโตเทลลูริก (Magnetotelluric modelling) เป็นแบบจำลองที่อธิบายปรากฏการณ์ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในชั้นบรรยากาศและเคลื่อนที่ตกกระทบมายังพื้นโลกและทะลุลงไปในพื้นที่โลก ซึ่งปรากฏการณ์นี้อธิบายได้ด้วยสมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equations) ที่ลดรูปด้วยข้อสมมุติฐานบางประการ ผลเฉลยของสมการที่ลดรูปดังกล่าวนี้สามารถนำไปหาค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏและค่าเฟสซึ่งใช้ศึกษาและหาความสัมพันธ์กับค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าของโลกในอุดมคติได้ ในการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าว วิธีเชิงตัวเลข เช่น วิธีผลต่างจำกัด วิธีสมาชิกจำกัด ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการประมาณค่าผลเฉลยอย่างกว้างขวางตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน

วิธีผลต่างจำกัดเป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในการประมาณค่าผลเฉลยของแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริก (Prabhakar and Ashok, 2006) วิธีนี้จะใช้เวลาในการคำนวณรวดเร็วและแม่นยำเมื่อแบบจำลองมีความซับซ้อนไม่มาก แต่ถ้าหากแบบจำลองมีความซับซ้อนมากๆ ความแม่นยำของผลเฉลยที่ได้จะลดลงเพราะการแบ่งโดเมนออกเป็นโดเมนย่อยของวิธีนี้จะกำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular mesh) ทำให้ลักษณะแบบจำลองที่ซับซ้อนไม่สามารถคงรูปได้อย่างมีประสิทธิภาพได้

วิธีสมาชิกจำกัดเป็นวิธีเชิงตัวเลขอีกวิธีหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในการประมาณค่าผลเฉลยของแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริก (Wannamaker et al., 1986; Key and Weiss, 2006; Franke et al., 2007; Lee et al., 2009) วิธีนี้จะใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าวิธีผลต่างจำกัดแต่จะให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำเมื่อแบบจำลองมีลักษณะอย่างง่ายและมีความซับซ้อนมากๆ เพราะการแบ่งโดเมนเพื่อประมาณค่าผลเฉลยของแบบจำลองมีความหลากหลายและยืดหยุ่นมากกว่า ประเภทของการแบ่งโดเมนมีหลายวิธีและรูปแบบมีความหลากหลาย เช่นการแบ่งโดเมนแบบที่มีระเบียบ (structured mesh) และไร้ระเบียบ (unstructured mesh) ลักษณะของโดเมนย่อยสามารถมีรูปร่างเป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ (Key and Weiss, 2006; Franke et al., 2007) หรือสี่เหลี่ยมใดๆ (Lee et al., 2009) ได้ด้วยเหตุนี้จึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจที่เราจะทำการศึกษาเชิงเปรียบเทียบประสิทธิภาพและความแม่นยำของวิธีเชิงตัวเลขทั้งสองวิธีกับแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในสองมิติ

ในงานวิจัยนี้ เราจะใช้วิธีผลต่างจำกัดและวิธีสมาชิกจำกัดประมาณค่าผลเฉลยของแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในสองมิติในสมการที่ (9) และ (10) โดยวิธีผลต่างจำกัดจะใช้ลักษณะการแบ่งโดเมนออกเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก ในขณะที่วิธีสมาชิกจำกัดจะแบ่งโดเมนออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก วิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีนี้จะถูกพัฒนาภายใต้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB จากนั้นจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพและความแม่นยำของทั้งสามวิธีนี้กับแบบจำลองอย่างง่ายและแบบจำลองทดสอบที่ได้นำเสนอในงานวิจัยก่อนหน้านี้ ในตอนท้าย จะเป็นการอภิปรายและสรุปผลการทดลองเชิงเปรียบเทียบที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีนี้

วิธีการดำเนินการวิจัย

แบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกเป็นแบบจำลองที่อธิบายปรากฏการณ์ของการเหนี่ยวนำของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic wave) ที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติในชั้นบรรยากาศและพื้นผิวโลกสำหรับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีลักษณะเป็นคลื่นในระนาบและมีการแพร่กระจายแบบฮาร์มอนิกขึ้นอยู่กับการ $e^{-i\omega t}$ เมื่อ t คือเวลา i คือจำนวนเชิงซ้อน และ ω คือความถี่เชิงมุมโดยที่ $\omega = 2\pi/T$ เมื่อ T เป็นคาบของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า สมการในรูปแบบทั่วไปของแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกเป็นดังต่อไปนี้

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} \quad (2)$$

เมื่อ $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ คือเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้า (V/m) และสนามแม่เหล็ก (A/m) ตามลำดับ σ คือความนำไฟฟ้า (S/m) ซึ่งเป็นส่วนกลับของสภาพต้านทานไฟฟ้า ρ (ohm-m) และ μ คือสภาพการซึมผ่านได้ของแม่เหล็ก ($\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{Vs}{Am}\right)$) พิจารณาแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในสองมิติ ถ้ากำหนดให้ความนำไฟฟ้ามีความเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน x และแกน z ซึ่งคือ $\sigma = \sigma(x, z)$ ดังนั้นสมการที่ (1) และ (2) สามารถเขียนใหม่ได้เป็นดังนี้

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma E_y \quad (3)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega\mu H_z \quad (5)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \sigma E_z \quad (7)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu H_y \quad (8)$$

สมการที่ (3) - (5) จะเป็นกลุ่มของสมการที่เรียกว่า สมการขั้วไฟฟ้า (E-polarization) ในขณะที่สมการที่ (6) - (8) จะเป็นกลุ่มสมการที่เรียกว่า สมการขั้วแม่เหล็ก (H-polarization) เนื่องจากสมการที่ (3)-(8) ตัวแปร $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ ยังไม่เป็นอิสระจากกันสมการเหล่านี้สามารถแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองที่ตัวแปรดังกล่าวอิสระจากกันได้ดังนี้

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \beta \phi \quad (9)$$

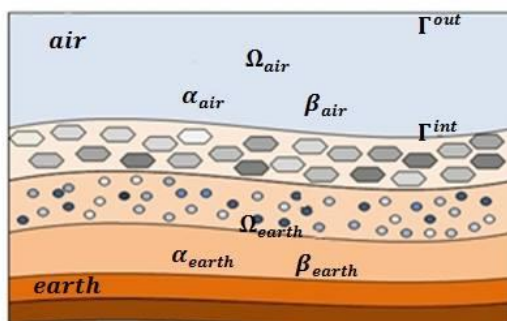
เมื่อสัญลักษณ์ α, β และ G คือสัญลักษณ์ที่แสดงถึงตัวแปรและค่าคงตัวต่างๆ ตามกลุ่มของสมการดังนี้

$$\begin{array}{ll} \text{ขั้วไฟฟ้า} & \phi = E_y, \quad \alpha = 1, \quad \beta = i\omega\mu\sigma \\ \text{ขั้วแม่เหล็ก} & \phi = H_y, \quad \alpha = 1/\sigma, \quad \beta = i\omega\mu \end{array}$$

พิจารณาปัญหาค่าขอบของสมการที่ (9) จะสมมุติให้โดเมนของการศึกษาแทนด้วย $\Omega \subset R^2$ โดยที่ $\Omega = \Omega_{air} \cup \Omega_{earth}$ เมื่อ Ω_{air} คือ ส่วนของชั้นบรรยากาศ Ω_{earth} คือ ส่วนที่เป็นพื้นโลกและขอบของการศึกษาคือ $\Gamma = \Gamma^{int} \cup \Gamma^{out}$ เมื่อ Γ^{int} คือ รอยต่อระหว่างชั้นบรรยากาศกับพื้นโลกและ Γ^{out} คือขอบด้านนอกตัวอย่างโดเมนของการศึกษาแสดงดังรูปที่ 1 เงื่อนไขค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในสมการที่ (9) กำหนดให้ปัญหาค่าขอบแบบเดริเชต (Dirichlet boundary condition) ดังนี้

$$\phi = \phi_0(x, z) \quad \text{บน } \Gamma^{out} \quad (10)$$

เมื่อ $\phi_0(x, z)$ เป็นค่าขอบที่ได้จากการหาผลเฉลยของแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในหนึ่งมิติ



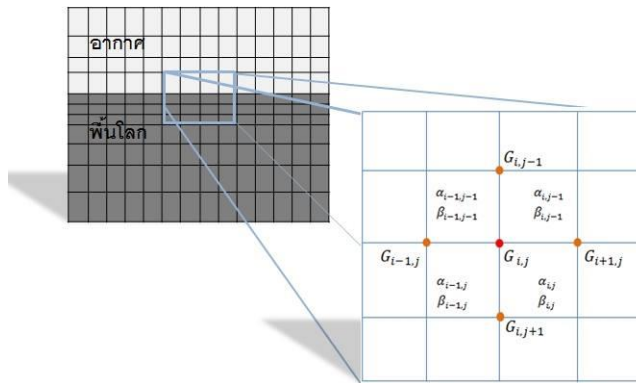
รูปที่ 1 องค์ประกอบของโดเมน $\Omega = \Omega_{air} \cup \Omega_{earth}$ และขอบ $\Gamma = \Gamma^{int} \cup \Gamma^{out}$ ในสองมิติ

เมื่อค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กสำหรับแต่ละขั้วหาได้แล้ว ค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏ (apparent resistivity) และค่าเฟส (phase) ในบริเวณที่สนใจสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} \text{ขั้วไฟฟ้า} & \rho_{xy}^a = \frac{E_x}{H_y}, \quad \psi_{xy}^a = \tan^{-1} \frac{E_x}{H_y} \\ \text{ขั้วแม่เหล็ก} & \rho_{yx}^a = \frac{E_y}{H_x}, \quad \psi_{yx}^a = \tan^{-1} \frac{E_y}{H_x} \end{array}$$

วิธีผลต่างจำกัด

วิธีผลต่างจำกัดเป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่นิยมใช้ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการประยุกต์ใช้วิธีผลต่างจำกัดกับแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในสมการที่ (9) จะสมมุติว่าโดเมนที่ศึกษาจะถูกแบ่งออกเป็นโดเมนย่อยรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 การแบ่งโดเมนออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมของวิธีผลต่างจำกัด

จากนั้นพิจารณาจุดต่อภายใน (i, j) ใดๆ พจน์ที่เป็นอนุพันธ์ย่อยในสมการที่ (9) จะประมาณค่าได้ด้วยสมการผลต่างจำกัดสมการที่ (9) จะถูกแปลงให้เป็นสมการผลต่างเชิงเส้นดังนี้

$$C_1^{ij} G_{i,j-1} + C_2^{ij} G_{i-1,j} + C_3^{ij} G_{i,j} + C_4^{ij} G_{i+1,j} + C_5^{ij} G_{i,j+1} = s \quad (11)$$

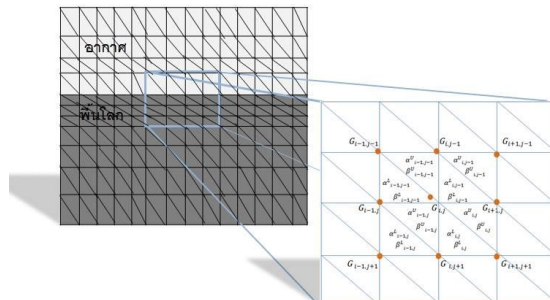
เมื่อ $C_1^{ij}, C_2^{ij}, C_3^{ij}, C_4^{ij}$ และ C_5^{ij} คือค่าสัมประสิทธิ์ที่แสดงถึงความเชื่อมโยงกันระหว่างจุด (i, j) กับจุดด้านบน $(i, j - 1)$ จุดด้านซ้าย $(i - 1, j)$ จุดกลาง (i, j) จุดด้านขวา $(i + 1, j)$ และจุดล่าง $(i, j + 1)$ ตามลำดับ และ s เป็นเงื่อนไขค่าขอบ เมื่อใช้กระบวนการนี้สำหรับทุกจุดต่อภายใน จะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$C\phi = s \quad (12)$$

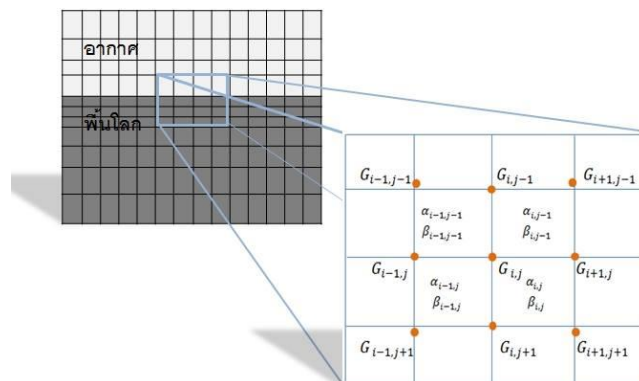
เมื่อ C คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มี 5 แถวตั้ง (แต่ละแถวมีสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์ 5 ค่า) สมมาตรและมีสัมประสิทธิ์ในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนเชิงซ้อน ϕ คือเวกเตอร์ที่ไม่ทราบค่าและ s คือเวกเตอร์ทางด้านขวามือที่มีสัมประสิทธิ์สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบในสมการที่ (10)

วิธีสมาชิกจำกัด

วิธีสมาชิกจำกัดเป็นวิธีเชิงตัวเลขอีกวิธีหนึ่งที่นิยมนำมาใช้ในการประมาณค่าผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์หลักการของวิธีนี้จะคล้ายคลึงกับวิธีผลต่างจำกัดสำหรับการประยุกต์ใช้วิธีสมาชิกจำกัดกับแบบจำลองแม่น้ำไนโตเทลลูริกในสมการที่ (9) จะสมมุติว่าโดเมนที่ศึกษาจะถูกแบ่งออกเป็นโดเมนย่อย ถ้าแบ่งโดเมนออกเป็นรูปสามเหลี่ยมจะได้ดังรูปที่ 3 แต่ถ้าแบ่งโดเมนออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจะได้ดังรูปที่ 4



รูปที่ 3 การแบ่งโดเมนออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากของวิธีสมาชิกจำกัด



รูปที่ 4 การแบ่งโดเมนออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากของวิธีสมาชิกจำกัด

พิจารณาจุดต่อ (i, j) สร้างระบบสมการของโดเมนย่อย 4 รูปที่ล้อมรอบจุดนี้ถ้าโดเมนย่อยเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแต่ถ้าโดเมนย่อยเป็นรูปสามเหลี่ยมจะใช้โดเมนย่อย 6 รูป สร้างสมการผลต่างด้วยการแต่งเติมระบบสมการทั้ง 4 หรือ 6 สมการ จะได้เป็นดังนี้

$$K_1^{ij} G_{i-1,j-1} + K_2^{ij} G_{i,j-1} + K_3^{ij} G_{i+1,j-1} + K_4^{ij} G_{i-1,j} + K_5^{ij} G_{i,j} + K_6^{ij} G_{i+1,j} + K_7^{ij} G_{i-1,j+1} + K_8^{ij} G_{i,j+1} + K_9^{ij} G_{i+1,j+1} = s \quad (13)$$

เมื่อ $K_1^{ij}, K_2^{ij}, K_3^{ij}, K_4^{ij}, K_5^{ij}, K_6^{ij}, K_7^{ij}, K_8^{ij}$ และ K_9^{ij} คือค่าสัมประสิทธิ์ที่แสดงถึงความเชื่อมโยงกันระหว่างจุด (i, j) กับจุดบนซ้าย $(i-1, j-1)$ จุดบนกลาง $(i, j-1)$ จุดบนขวา $(i+1, j-1)$ จุดกลางซ้าย $(i-1, j)$ จุดกลาง (i, j) จุดกลางขวา $(i+1, j)$ จุดล่างซ้าย $(i-1, j+1)$ จุดล่างกลาง $(i, j+1)$ และจุดล่างขวา $(i+1, j+1)$ ตามลำดับ กรณีที่ใช้โดเมนย่อยเป็นรูปสามเหลี่ยม สามารถแสดงได้ว่า K_3^{ij} และ K_7^{ij} มีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อใช้กระบวนการนี้สำหรับทุกจุดต่อภายใน จะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$K\phi = s \quad (14)$$

เมื่อ K คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่สมมาตร กรณีที่โดเมนเป็นรูปสามเหลี่ยมเมทริกซ์ K จะเป็นเมทริกซ์ที่มี 7 แนวตั้งแต่ถ้าใช้โดเมนเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก K จะเป็นเมทริกซ์แบบ 9 แนวตั้ง ϕ คือ เวกเตอร์ที่ไม่ทราบค่าและ s คือเวกเตอร์ทางด้านขวามือที่สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบในสมการที่ (10)

สำหรับการแก้ระบบสมการที่ได้จากการประยุกต์ใช้วิธีผลต่างจำกัดและวิธีสมาชิกจำกัดกับแบบจำลองแมกนีโตเทลลูริกในสมการที่ (12) และ (14) ในงานวิจัยนี้ จะใช้วิธีการแยกตัวประกอบ LU (กับการหาสมาชิกหลักด้วยการสลับแถว (LU factorization using partial pivoting with row interchange)) ที่เป็นฟังก์ชันภายในที่มีอยู่ในโปรแกรม MATLAB

ผลการวิจัย

สำหรับการแสดงผลการวิจัย จะแสดงการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีผลต่างจำกัดและวิธีสมาชิกจำกัดต่อการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการแมกนีโตเทลลูริกในสองมิติ สำหรับแบบจำลองที่จะนำมาทดสอบและเปรียบเทียบประกอบด้วยแบบจำลองกึ่งปริภูมิ (half-space) และแบบจำลอง COMMEMI2D-1 (Zhdanov

et al., 1997) สำหรับแต่ละแบบจำลองเราจะศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพในแง่ของความเร็วในการคำนวณและความแม่นยำของวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธี สำหรับแต่ละแบบจำลอง การศึกษาจะควบคุมขนาดของแบบจำลองและจำนวนจุดต่อทั้งหมดสำหรับแต่ละวิธีให้เท่ากัน เนื่องจากจำนวนจุดต่อมีบทบาทสำคัญต่อปัจจัยดังกล่าว โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสำหรับวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีพัฒนามาโปรแกรม MATLAB (ใบอนุญาต#1099028) และทำการทดลองบนคอมพิวเตอร์ตั้งโต๊ะที่มีสมรรถนะของซีพียูเท่ากับ 3.4 GHz หน่วยความจำเท่ากับ 8.0 GB ภายใต้ระบบปฏิบัติการวินโดวส์ 7

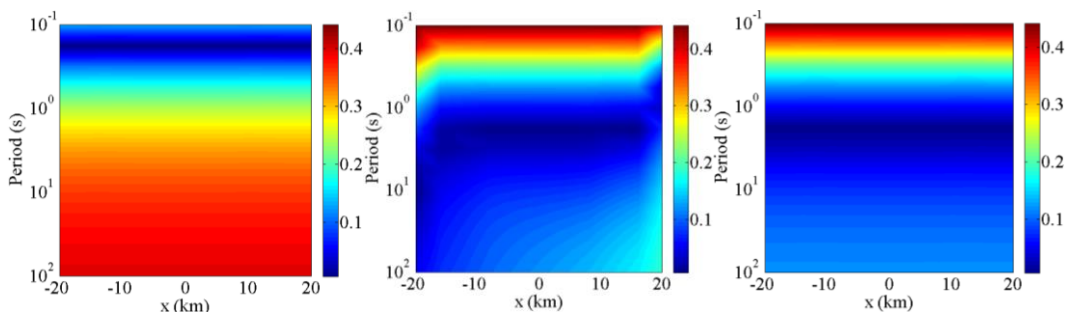
แบบจำลองกึ่งปริภูมิ 100 โอห์ม-เมตร

สำหรับแบบจำลองนี้ จะสมมุติให้แบบจำลองมีขนาดความกว้างและความลึกเท่ากับ 500 กิโลเมตร ในที่นี้จะสมมุติให้ชั้นบรรยากาศสูง 200 กิโลเมตรเนื้อโลกมีสภาพความต้านทานเท่ากับ 100 โอห์ม-เมตร รายละเอียดของการแบ่งโดเมนสำหรับวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีแสดงดังตารางที่ 1

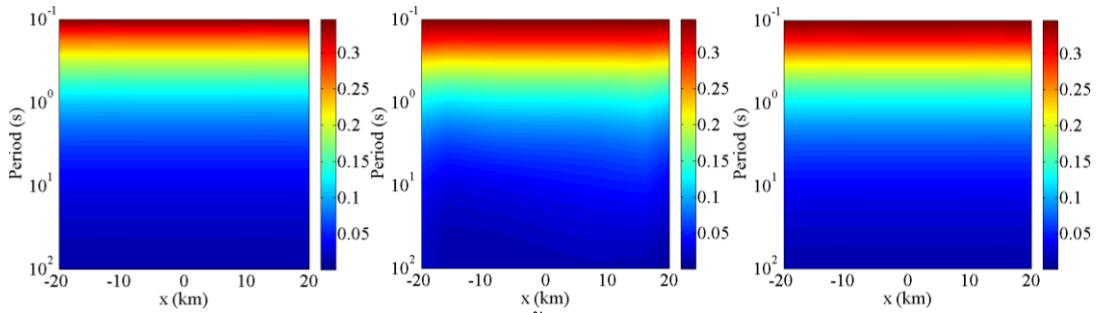
ตารางที่ 1 ตารางแสดงการเปรียบเทียบข้อมูลของการแบ่งโดเมนของแบบจำลองกึ่งปริภูมิออกเป็นโดเมนย่อย และเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยสำหรับวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธี

วิธีเชิงตัวเลข	จำนวนจุดต่อ	จำนวนโดเมนย่อย	เวลาที่ใช้คำนวณ (วินาที)
วิธีผลต่างจำกัด	8772	8576	12.24
วิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	8772	17152	146.07
วิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	8772	8576	203.47

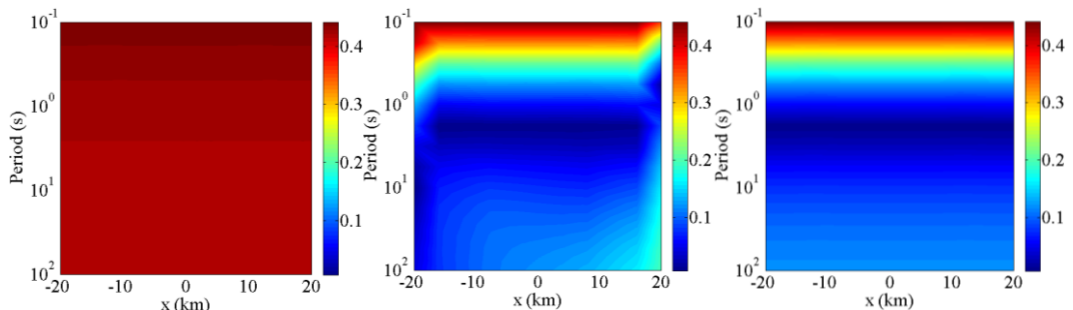
ค่าความคลาดเคลื่อน (%) ของค่าสภาพต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏและค่าเฟสในแต่ละตำแหน่งบนพื้นผิวโลกเทียบกับค่าของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของวิธีผลต่างจำกัดวิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมแสดงดังรูปที่ 5-8 ตำแหน่งบนพื้นผิวโลกที่พิจารณาจะอยู่ในช่วง -20 กิโลเมตรถึง 20 กิโลเมตรและค่าที่ใช้พิจารณาจะอยู่ในช่วง 0.1-100 วินาที ระดับของสีที่เปลี่ยนจากสีน้ำเงินเป็นสีแดงแสดงถึงระดับความคลาดเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นจากน้อยไปหามาก



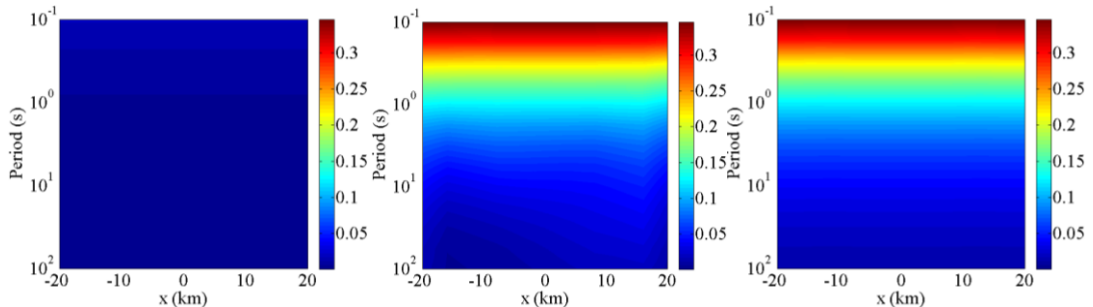
รูปที่ 5 ค่าความคลาดเคลื่อน (%) ของค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏของขั้วไฟฟ้า (ρ_{xy}^a) ณ ตำแหน่งต่างๆ เทียบกับค่าของคลื่นของแม่เหล็กไฟฟ้าของวิธีผลต่างจำกัด (ซ้าย) วิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยม (กลาง) และวิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยม (ขวา)



รูปที่ 6 ค่าความคลาดเคลื่อน (%) ของค่าเฟสของชั่วไฟฟ้า (ψ_{xy}^a) ณ ตำแหน่งต่างๆ เทียบกับคาบของคลื่นของแม่เหล็กไฟฟ้าของวิธีผลต่างจำกัด (ซ้าย) วิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยม (กลาง) และวิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยม (ขวา)



รูปที่ 7 ค่าความคลาดเคลื่อน (%) ของค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏของชั่วแม่เหล็ก (ρ_{yx}^a) ณ ตำแหน่งต่างๆ เทียบกับคาบของคลื่นของแม่เหล็กไฟฟ้าของวิธีผลต่างจำกัด (ซ้าย) วิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยม (กลาง) และวิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยม (ขวา)

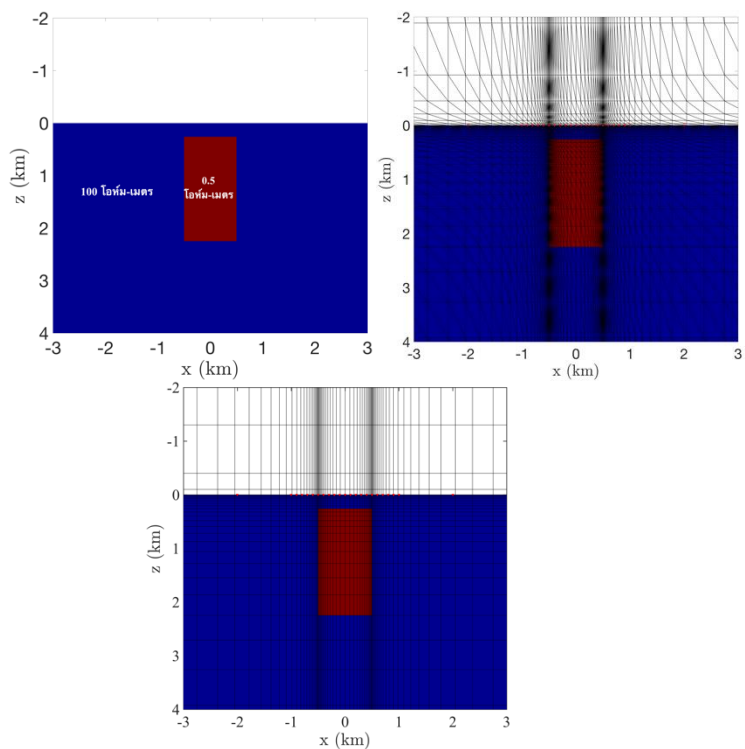


รูปที่ 8 ค่าความคลาดเคลื่อน (%) ของค่าเฟสของชั่วแม่เหล็ก (ψ_{yx}^a) ณ ตำแหน่งต่างๆ เทียบกับคาบของคลื่นของแม่เหล็กไฟฟ้าของวิธีผลต่างจำกัด (ซ้าย) วิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยม (กลาง) และวิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยม (ขวา)

แบบจำลอง COMMEMI2D-1

แบบจำลอง COMMEMI2D-1 แสดงดังรูปที่ 9 ซึ่งนำเสนอโดย Zhdanov et al. (1997) แบบจำลองนี้สมมุติว่าโลกมีชั้นเดียวและสภาพความต้านทานไฟฟ้าเท่ากับ 100 โอห์ม-เมตรบริเวณตรงกลางมีโครงสร้างผิดปกติรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 1 กิโลเมตร x 2 กิโลเมตรฝังอยู่ลึกจากพื้นผิวโลกลงไป 250 เมตรและโครงสร้างนี้มีสภาพความต้านทานไฟฟ้าเท่ากับ 0.5 โอห์ม-เมตร ในการทดลองนี้จะสมมุติว่าโดเมนของการศึกษามีขนาดความกว้าง

และความลึกเท่ากับ 500 กิโลเมตรชั้นบรรยากาศสูง 200 กิโลเมตรการแบ่งโดเมนออกเป็นโดเมนย่อยสำหรับวิธีผลต่างจำกัด วิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมและวิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยม แสดงดังรูปที่ 9 (รูปกลางและขวา) จำนวนจุดต่อและจำนวนสมาชิกที่ได้แสดงดังตารางที่ 2

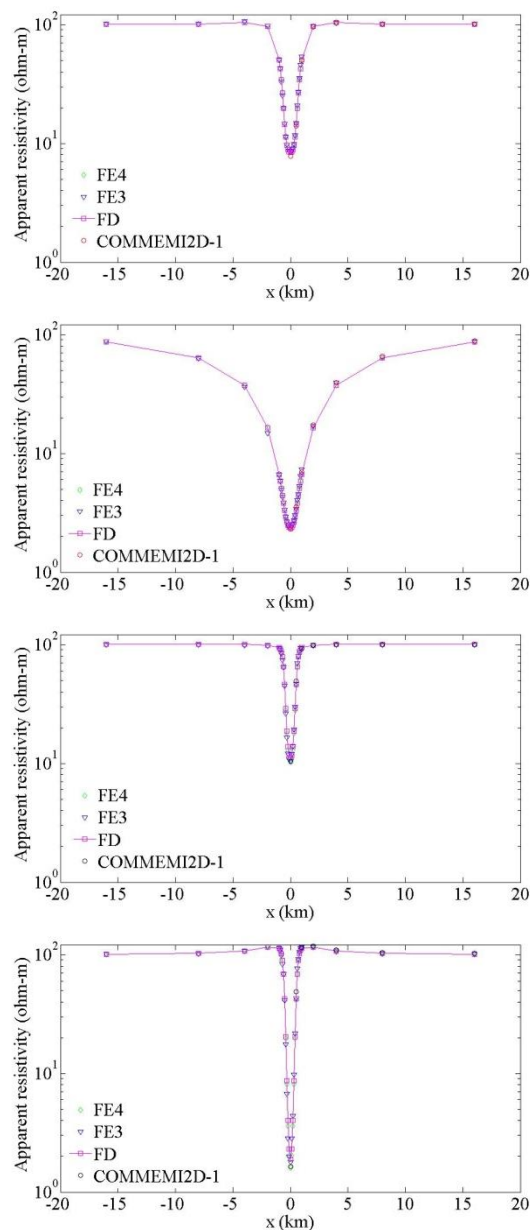


รูปที่ 9 แบบจำลอง COMMEMI2D-1 (ซ้าย) การแบ่งโดเมนออกเป็นรูปสามเหลี่ยม (กลาง) การแบ่งโดเมนออกเป็นรูปสี่เหลี่ยม (ขวา) จุดสามเหลี่ยมสีแดงคือตำแหน่งของสถานีวัดบนพื้นผิวโลก

ตารางที่ 2 ตารางแสดงการเปรียบเทียบข้อมูลของการแบ่งโดเมนของแบบจำลอง COMMEMI2D-1 ออกเป็นโดเมนย่อยและเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยสำหรับวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธี

วิธีเชิงตัวเลข	จำนวนจุดต่อ	จำนวนโดเมนย่อย	เวลาที่ใช้คำนวณ (วินาที)
วิธีผลต่างจำกัด	8364	8174	11.47
วิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	8364	16348	131.87
วิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	8364	8174	198.76

ค่าสภาพต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏ (หน่วยโอห์ม-เมตร) ที่คำนวณได้จากวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธี ในแต่ละตำแหน่งบนพื้นผิวโลกในช่วง -20 กิโลเมตร 20 กิโลเมตร ที่คาบ $T = 0.1, 10$ วินาทีแสดงดังรูปที่ 10



รูปที่ 10 ค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะของขั้วไฟฟ้า (บนซ้าย) และขั้วแม่เหล็ก (ล่างซ้าย) ที่ $T = 0.1$ วินาที และค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะของขั้วไฟฟ้า (บนขวา) และขั้วแม่เหล็ก (ล่างขวา) ที่ $T = 10$ วินาที

วิจารณ์ผลการวิจัย

กรณีแบบจำลองกึ่งปริภูมิ 100 โอห์ม-เมตร

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่าถ้ากำหนดให้จำนวนจุดที่จะหาผลเฉลยหรือจำนวนสมการของระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีมีค่าเท่ากันคือ 8772 จุด จำนวนโดเมนย่อยที่เกิดขึ้นของวิธีผลต่างจำกัดและวิธี

สมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยมมีค่าเท่ากับ 8576 รูป ในขณะที่จำนวนโดเมนย่อยที่เกิดขึ้นของวิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 17152 รูปซึ่งมีค่าเป็นสองเท่า พิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณดังตารางที่ 1 วิธีผลต่างจำกัดใช้เวลาในการคำนวณเท่ากับ 12.24 วินาทีซึ่งน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมที่ใช้เวลาเท่ากับ 146.07 วินาทีและ 203 วินาทีตามลำดับ ทั้งนี้เพราะจำนวนสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์ (จำนวนแนวตั้งของสัมประสิทธิ์ที่ไม่เท่ากับศูนย์) ในเมทริกซ์ทั้งสามเมทริกซ์มีจำนวนน้อยไปหามาก ตามลำดับ ทำให้เวลาที่ใช้ในการแก้ระบบสมการเพิ่มขึ้นจากน้อยไปหามาก

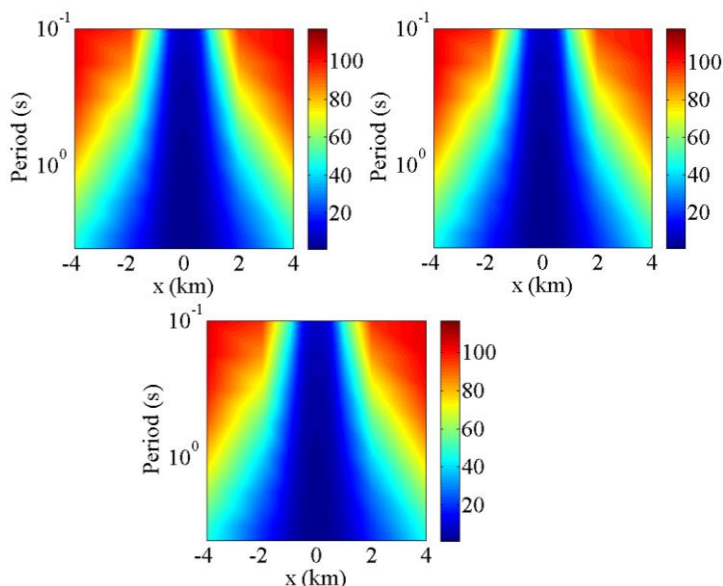
พิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนของค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏของข้าวโพดในรูปที่ 6 จะเห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จากวิธีทั้งสามวิธีเพิ่มขึ้นจากน้อยไปหามากเมื่อคาบของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงจากสั้นไปหายาว สำหรับข้าวโพดแสดงดังรูปที่ 8 แนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงของค่าความคลาดเคลื่อนของค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏที่คำนวณได้จากวิธีสมาชิกจำกัดทั้งสองวิธีมีลักษณะเหมือนกรณีแรก แต่สำหรับวิธีผลต่างจำกัด ค่าความคลาดเคลื่อนจะเปลี่ยนแปลงน้อยมากและอยู่ในระดับสูง ต่อไปพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนของค่าเฟสของทั้งสองข้าวโพดในรูปที่ 7 และ 9 จะเห็นว่าแนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงของค่าความคลาดเคลื่อนจะคล้ายคลึงกับแนวโน้มของค่าความคลาดเคลื่อนของค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏแต่ระดับค่าความคลาดเคลื่อนจะต่ำกว่า นอกจากนี้ค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จากวิธีผลต่างจำกัดจะมีค่าน้อยและไม่ค่อยเปลี่ยนแปลงตามคาบของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

กรณีแบบจำลอง COMMEMI2D-1

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่าถ้ากำหนดให้จำนวนจุดที่จะหาผลเฉลยหรือจำนวนสมการของระบบสมการเชิงเส้นที่หาได้จากวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีมีค่าเท่ากับ 8364 จุด จำนวนโดเมนย่อยที่เกิดขึ้นของวิธีผลต่างจำกัดและวิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยมจะมีค่าเท่ากับ 8174 รูป ในขณะที่จำนวนโดเมนย่อยที่เกิดขึ้นของวิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 16348 รูปซึ่งมีค่าเป็นสองเท่า พิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณ วิธีผลต่างจำกัดใช้เวลาในการคำนวณเท่ากับ 11.47 วินาทีซึ่งน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมที่ใช้เวลาเท่ากับ 131.87 วินาทีและ 198.76 วินาทีตามลำดับ เหตุผลที่วิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีใช้เวลาในการคำนวณแตกต่างกันสามารถอธิบายได้ด้วยเหตุผลเดียวกันในแบบจำลองกึ่งปริภูมิ ยิ่งไปกว่านั้นวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีใช้เวลาในการคำนวณลดลงเพราะขนาดของระบบสมการเชิงเส้นทั้งหมดมีขนาดลดลง

พิจารณาค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏที่คำนวณได้จากวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีดังรูปที่ 10 จากกราฟ จะเห็นว่าค่าสภาพความต้านทานจำเพาะที่คำนวณได้จากทั้งสามวิธีสำหรับแต่ละช่วงการคำนวณและคาบสอดคล้องกับค่าสภาพความต้านทานจำเพาะที่ได้จาก Zhdanov et al. (1997) นอกจากนี้จะเห็นว่าวิธีทั้งสามวิธีให้ผลการคำนวณที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันมาก ค่าสภาพความต้านทานจำเพาะปรากฏที่คำนวณได้ ณ บริเวณที่ไกลออกไปจากโครงสร้างฝังปกติจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นและมีค่าใกล้เคียงกับค่าสภาพความต้านทานของเนื้อโลกจริงเมื่อคาบเริ่มสั้นลง ในขณะที่ค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏ ณ บริเวณที่อยู่ใกล้โครงสร้างดังกล่าวมีแนวโน้มลดลงเป็นบริเวณกว้าง แปรผันตามคาบและใกล้เคียงกับสภาพความต้านทานไฟฟ้าจริงของโครงสร้างดังกล่าว

นอกจากนี้ ในการศึกษาข้างต้นยังได้เลือกค่าสภาพต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏของข้อไฟฟ้าในแต่ละตำแหน่งบนพื้นผิวโลกเทียบในช่วง -4 กิโลเมตร 4 กิโลเมตร เทียบกับคาบของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในช่วงคาบ $T = 0.1 - 10$ วินาทีที่คำนวณโดยวิธีทั้งสามวิธีมานำเสนอผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 11 ระดับของสีที่เปลี่ยนจากสีน้ำเงินเป็นสีแดงแสดงถึงค่าสภาพต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏที่เพิ่มขึ้นจากน้อยไปหามาก



รูปที่ 11 ค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏของข้อไฟฟ้า (ρ_{xy}^a) ณ ตำแหน่งต่างๆ เทียบกับคาบของคลื่นของแม่เหล็กไฟฟ้าของวิธีผลต่างจำกัด (ซ้าย) วิธีสมาชิกจำกัดรูปสามเหลี่ยม (กลาง) และวิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยม (ขวา)

จากกราฟจะเห็นว่าวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีให้ผลการคำนวณที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันมาก ค่าสภาพความต้านทานจำเพาะที่คำนวณได้ ณ บริเวณที่ไกลออกไปจากโครงสร้างผิดปกติจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นและมีค่าใกล้เคียงกับค่าสภาพความต้านทานของเนื้อโลกจริงเมื่อคาบเริ่มสั้นลง ในขณะที่ค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏ ณ บริเวณที่อยู่ใกล้ โครงสร้างดังกล่าวมีแนวโน้มลดลงเป็นบริเวณกว้าง ซึ่งผลเฉลยที่ได้แปรผันตามคาบและสัมพันธ์กับสภาพความต้านทานไฟฟ้าจริงของโครงสร้างดังกล่าว

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ได้ทำการศึกษาเชิงเปรียบเทียบประสิทธิภาพและความแม่นยำของวิธีผลต่างจำกัดและวิธีสมาชิกจำกัดต่อการหาผลเฉลยของแบบจำลองแมกนีเทลลูริกในสองมิติ ในแง่ประสิทธิภาพของวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธี จากผลการทดลองในแบบจำลองกึ่งปริภูมิ จะเห็นว่าวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีมีประสิทธิภาพแตกต่างกัน วิธีผลต่างจำกัดจะมีประสิทธิภาพมากที่สุดเพราะใช้เวลาในการคำนวณหาผลเฉลยน้อยที่สุด ส่วนวิธีสมาชิกจำกัดรูปสี่เหลี่ยมจะมีประสิทธิภาพน้อยที่สุดเนื่องจากใช้เวลามากที่สุด ผลการทดลองในแบบจำลอง COMMEMI2D-1 ก็ให้ผลลัพธ์ทำนองเดียวกัน ในแง่ความแม่นยำของการหาผลเฉลยสำหรับแบบจำลองกึ่งปริภูมิ จะเห็นว่าความคลาดเคลื่อนที่

คำนวณได้จากทั้งสามวิธีมีค่าใกล้เคียงกันในแต่ละตำแหน่งและคาบของแม่เหล็กไฟฟ้าที่พิจารณา ค่าความคลาดเคลื่อนเหล่านี้จะแปรผกผันกับคาบ ยกเว้นวิธีผลต่างจำกัดที่ค่าความคลาดเคลื่อนของค่าสภาพความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะปรากฏค่อนข้างสูงและไม่เปลี่ยนแปลงมากในช่วงแม่เหล็ก อย่างไรก็ตาม ค่าความคลาดเคลื่อนของค่าเฟสในช่วงไฟฟ้าที่คำนวณได้จากวิธีผลต่างจำกัดมีค่าค่อนข้างต่ำและไม่ค่อยเปลี่ยนแปลงตามคาบ จากการทดลองข้างต้นจะเห็นว่าเมื่อแบบจำลองไม่ได้มีความซับซ้อนมาก วิธีผลต่างจำกัดจะมีประสิทธิภาพมากที่สุด ให้ขณะผลเฉลยโดยประมาณและความแม่นยำของทั้งสามวิธีไม่ค่อยแตกต่างกัน อย่างไรก็ตาม ถ้าแบบจำลองที่ใช้มีลักษณะซับซ้อนมากขึ้น เช่น มีลักษณะภูมิประเทศและพื้นทะเลไม่ราบเรียบ เป็นต้น ประสิทธิภาพและความแม่นยำของทั้งสามวิธีอาจเปลี่ยนแปลงได้

เอกสารอ้างอิง

- Franke, A., Börner, R.-U. and Spitzer, K. (2007). Adaptive unstructured grid finite element simulation of two-dimensional magnetotelluric fields for arbitrary surface and seafloor topography. *Geophysical Journal International* 171(1): 71–86.
- Key, K. and Weiss, C. (2006). Adaptive finite-element modelling using unstructured grids: The 2d magnetotelluric example. *Geophysics* 71(6): G291–G299.
- Lee, S., Kim, H., Song, Y. and Lee, C.-K. (2009). MT2DInvMatlab-A program in MATLAB and FORTRAN for two-dimensional magnetotelluric inversion. *Computers and Geosciences* 35(8): 1722–1734.
- Prabhakar Rao, K. and Ashok Babu, G. (2006). EMOD2D-A program in C++ for finite difference modelling of magnetotelluric TM mode responses over 2D earth. *Computers and Geosciences* 32(9): 1499–1511.
- Wannamaker, P. E., Stodt, J. A. and Rijo, L. (1986). Two-dimensional topographic responses in magnetotellurics modeled using finite elements. *Geophysics* 51(11): 2131–2144.
- Zhdanov, M. S., Varentsov, I. M., Weaver, J. T., Golubev, N. G. and Krylov, V. A. (1997). Methods for modelling electromagnetic fields results from COMMEMI - the international project on the comparison of modelling methods for electromagnetic induction. *Journal of Applied Geophysics* 37(3-4): 133–271.

