ว.วิทย. มข. 45(3) 650-662 (2560) KKU Sci. J. 45(3) 650-662 (2017)

แคลคูลัสเชิงเศษส่วน

Fractional Calculus

รตี โบจรัส

ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

E-mail: ratee.b@ubu.ac.th

บทคัดย่อ

แคลคูลัสเชิงเศษส่วนเป็นการศึกษาแคลคูลัสแบบดั้งเดิมทั่วไปที่มีอันดับการดำเนินการของการหาปริพันธ์และอนุพันธ์เป็นเศษส่วน โดยมีที่มาจากคำถามของ L'Hospital ถึง Leibniz ซึ่งถามในปี ค.ศ.1695 เกี่ยวกับความหมายของอนุพันธ์อันดับครึ่ง คำถามนี้จึงเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาเรื่องแคลคูลัสเชิงเศษส่วนตั้งแต่นั้นมา และยังทำให้นักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงหลายคน เช่น Euler, Liouville, Laplace และ Riemann สนใจศึกษาเรื่องนี้มากขึ้น

ในบทความนี้จะกล่าวถึงที่มาของการศึกษาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนอย่างสังเขป การนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายรวมถึงการนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนรูปแบบใหม่และความน่าสนใจของเรื่องนี้ที่นำไปประยุกต์ในสาขาวิชาอื่นๆ เช่น วิชาที่เกี่ยวกับของไหล ความหนืดและการสร้างแบบจำลองของตัวควบคุมระบบภูมิคุ้มกันเซลล์มะเร็ง

ABSTRACT

Fractional calculus is the study of traditional calculus with operations of integration and differentiation of fractional order. The origin of this study came from the question from L'Hospital to Leibniz in 1695 about the meaning of the half-order derivative of functions. This question becomes the first study of fractional calculus and consequently attracted the interest of many well-known mathematicians such as Euler, Liouville, Laplace and Riemann.

This paper presents the brief history of fractional derivatives, the widely used definitions, the new definition and the applications in other fields, for examples, rheology, viscoelasticity and the immune effectors of cancer cells model.

คำสำคัญ: แคลคูลัสเชิงเศษส่วน อนุพันธ์เชิงเศษส่วน ปริพันธ์เชิงเศษส่วน
Keywords: Fractional calculus, Fractional derivative, Fractional integration

บทนำ

จากการศึกษางานวิจัยเรื่อง “A new definition of fractional derivative” โดย Khalil et al., (2014) ทำให้ผู้เขียนมีความสนใจศึกษาเรื่อง แคลคูลัสเชิงเศษส่วน เนื่องจากในงานวิจัยนี้ได้กล่าวถึง การหาอนุพันธ์อันดับเศษส่วนโดยนิยามรูปแบบใหม่ การหาปริพันธ์เชิงเศษส่วนและการประยุกต์ใช้เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับเศษส่วนซึ่งพบได้ทั่วไปในปัญหาทางฟิสิกส์ นอกจากนี้ยังได้อธิบายความหมายเชิงเรขาคณิตและความหมายเชิงฟิสิกส์อีกด้วย

เนื่องจากแคลคูลัสเชิงเศษส่วนเป็นการศึกษาแคลคูลัสแบบดั้งเดิมทั่วไปที่มีอันดับการดำเนินการของการหาปริพันธ์และอนุพันธ์เป็นเศษส่วน ดังนั้นทฤษฎีบทของแคลคูลัสเชิงเศษส่วนจึงควรครอบคลุมทฤษฎีบทของแคลคูลัสแบบดั้งเดิมทั่วไปที่เรารู้จักกันดี นับจากปี ค.ศ. 1695 ที่มีผู้เริ่มศึกษาเรื่องนี้จนถึงช่วงศตวรรษที่ 19 มีทฤษฎีบทของแคลคูลัสเชิงเศษส่วนเพิ่มมากขึ้นอย่างรวดเร็ว ทำให้มีวิชาที่เกี่ยวข้องเกิดขึ้นมากมาย เช่น เรขาคณิตเชิงเศษส่วน (fractional geometry) สมการเชิงอนุพันธ์อันดับเศษส่วน (fractional differential equations : FDE) และพลศาสตร์เชิงเศษส่วน (fractional dynamics) จึงกล่าวได้ว่าวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์สมัยใหม่อาศัยเครื่องมือและเทคนิคของแคลคูลัสเชิงเศษส่วนมากขึ้น เพราะการสร้างแบบจำลองด้วยอนุพันธ์อันดับเศษส่วนมีความแม่นยำกว่าสร้างแบบจำลองด้วยอนุพันธ์อันดับจำนวนเต็มแบบดั้งเดิม (Lazarevic, 2014)

บทความนี้ผู้เขียนจะอธิบายที่มาของการศึกษาแคลคูลัสเชิงเศษส่วนอย่างสังเขป การนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่นิยมนำมาใช้ การนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนรูปแบบใหม่ ความหมายของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนทางเรขาคณิตและทางฟิสิกส์ รวมถึงตัวอย่างของแคลคูลัสเชิงเศษส่วนที่นำไปใช้ในสาขาต่างๆ เพื่อให้ผู้อ่านได้รู้จักแคลคูลัสเชิงเศษส่วนมากขึ้น

ที่มาของการศึกษาแคลคูลัสเชิงเศษส่วน (The origin of fractional calculus)

แคลคูลัสเชิงเศษส่วนเป็นการศึกษาภาคขยายของแคลคูลัสแบบดั้งเดิมที่มีจุดเริ่มต้นมาจากคำถามของ L’Hospital ถึง Leibniz ในปี ค.ศ.1695 เกี่ยวกับความหมายของอนุพันธ์อันดับจำนวนเต็มว่าสามารถนำมาใช้ได้กับอนุพันธ์อันดับเศษส่วนได้หรือไม่ โดย Leibniz ได้ตอบคำถามในขณะนั้นว่ามีความเป็นไปได้ หากเราสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้จริง หลังจากนั้นมีนักคณิตศาสตร์หลายคนสนใจศึกษาเรื่องนี้มากขึ้น เช่น Euler, Lagrange, Laplace, Fourier และ Lacroix

ในปี ค.ศ. 1819 Lacroix ได้แสดงให้เห็นว่า $\dfrac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}$ โดยเริ่มจากสูตรการหาอนุพันธ์อันดับที่ n ของ $y = x^m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้

$$D_x^n y = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^m\right) = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \quad \text{โดยที่ } m \ge n \qquad (1)$$

เขาใช้ฟังก์ชันแกมมา $\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{z-1}dx$ โดยที่ $z>0$ แทนในสมการ (1) และกำหนดสูตรอนุพันธ์อันดับเศษส่วนของฟังก์ชันกำลัง ดังสมการ (2)

$$D_x^n x^m=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n} \tag{2}$$

จาก (2) สามารถขยายแนวคิดไปยังจำนวนตรรกยะ α และ β ใดๆ ได้ ดังสมการ (3)

$$D_x^{\alpha} x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha} \tag{3}$$

จากสมการ (3) ทำให้ Lacroix สามารถคำนวณค่า $\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}}=D_x^{1/2}x=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{1/2}=2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$

จากสมการ (3) เมื่อกำหนด $y=x^0=1$ จะได้ $\frac{d^{1/2}1}{dx^{1/2}}=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{-1/2}\neq 0$ นั่นแสดงว่าอนุพันธ์อันดับเศษส่วนของฟังก์ชันค่าคงตัวไม่จำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ จะเห็นว่าสูตรของ Lacroix ใช้ได้กับฟังก์ชันวิเคราะห์ที่อยู่ในรูปอนุกรมกำลังที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ในแต่ละพจน์

การประยุกต์ของอนุพันธ์อันดับเศษส่วนที่เห็นได้ชัดคือ ผลงานของ Abel ที่ต้องการหาคำตอบของสมการเชิงปริพันธ์ (integral equation) ในปัญหา tautochrone* ซึ่งอยู่ในรูป

$$K=\int_0^x (x-t)^{-1/2}f(t)\,dt \quad \text{โดยที่ } K \text{ เป็นค่าคงตัว} \tag{4}$$

เขาเขียนรูปทางขวามือของสมการ (4) ใหม่โดยใช้อนุพันธ์อันดับ $\frac{1}{2}$ ได้

$$\frac{d^{1/2}K}{dx^{1/2}}=\sqrt{\pi}f(x) \tag{5}$$

คำตอบของ Abel ทำให้ Liouville สนใจเป็นอย่างมากจนทำให้เขาศึกษาเรื่องแคลคูลัสเชิงเศษส่วนเป็นคนแรก (Lazarevic, 2014)

Liouville เริ่มศึกษาอนุพันธ์อันดับ n (เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม) ของฟังก์ชันชี้กำลัง ดังสมการ

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{ax}\right)=a^n e^{ax} \tag{6}$$

และขยายความสมการ (6) สำหรับอนุพันธ์อันดับ α ที่ไม่เป็นจำนวนเต็มได้

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left(e^{ax}\right)=a^{\alpha} e^{ax} \tag{7}$$

---

* ปัญหา tautochrone คือ ปัญหาการพิจารณาเส้นโค้งที่เมื่อปล่อยวัตถุลงมาตามเส้นโค้ง ณ จุดใดๆ ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลกแล้ว วัตถุจะตกลงมาภายในเวลาเดียวกัน โดยไม่ขึ้นกับจุดที่เริ่มปล่อย

เนื่องจาก Liouville ตั้งสมมติฐานว่า ฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรม

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \text{ โดยที่ } \operatorname{Re} a_n > 0 \tag{8}$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับ α ใดๆ ของ $f(x)$ คือ

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n {a_n}^\alpha e^{a_n x} \tag{9}$$

เรียกสมการ (9) ว่า สูตรที่หนึ่งของลียูวิลล์ (Liouville’s first formula)

แต่การนิยามอนุพันธ์อันดับเศษส่วนในรูปแบบสมการ (9) ยังไม่สามารถขยายความไปสู่กรณีทั่วไปได้ ดังนั้น Liouville จึงศึกษานิยามรูปแบบที่สองจากปริพันธ์จำกัดเขตที่มีรูปแบบคล้ายกับฟังก์ชันแกมมา ดังสมการ (10)

$$I=\int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du \text{ โดยที่ } \beta>0, x>0 \tag{10}$$

โดยใช้เทคนิคการแทนค่าตัวแปร $xu=t$ และหาอนุพันธ์อันดับ α ใดๆ ในสมการ (10) ได้

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} e^{-t} \cdot \frac{1}{x} dt \\ &= x^{-\beta} \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt \\ &= x^{-\beta}\, \Gamma(\beta) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x^{-\beta} = \frac{I}{\Gamma(\beta)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(x^{-\beta}\right) &= \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta+\alpha-1} e^{-xu} du \\ &= \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)}\, \Gamma(\beta+\alpha)\, x^{-\beta-\alpha} \text{ โดยที่ } \beta>0 \end{aligned} \tag{11}$$

เรียกสมการ (11) ว่า สูตรที่สองของลียูวิลล์ (the second Liouville’s formula)

อย่างไรก็ตาม การนิยามโดยสมการ (9) จะใช้ได้กับฟังก์ชันในรูปแบบ (8) และการนิยามโดยสมการ (11) จะใช้ได้กับฟังก์ชันในรูปแบบ $x^{-\beta}$ ที่ $\beta>0$ เท่านั้น

ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงนิยามอนุพันธ์อันดับเศษส่วนที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวาง

บทนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วน (The definitions of fractional derivatives)

เนื่องจากมีผู้กำหนดบทนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนเป็นจำนวนมาก แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงบทนิยามที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย 3 รูปแบบดังนี้

(i) บทนิยามของ Grunward-Letnikov

$$ {}_{a}^{GL}D_t^{\alpha}\ f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{n=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]}\left(-1\right)^n\binom{\alpha}{n}f\left(t-nh\right) \qquad (12)$$

เมื่อ $a=t-nh$

(ii) บทนิยามของ Riemann-Liouville

$$ {}_{a}^{RL}D_t^{\alpha}\ f(t)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t\frac{f\left(\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{\alpha-n+1}}d\tau \qquad (13)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม α เป็นจำนวนจริง และ $n-1\le\alpha<n$

(iii) บทนิยามของ M.Caputo

$$ {}_{a}^{C}D_t^{\alpha}\ f(t)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_a^t\frac{f^{(n)}\left(\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{\alpha-n+1}}d\tau \qquad (14)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม α เป็นจำนวนจริง และ $n-1\le\alpha<n$

การกำหนดบทนิยามในรูปแบบสมการ (12) และ (13) ทำให้อนุพันธ์อันดับเศษส่วนของค่าคงตัวไม่เป็นศูนย์และบทนิยามในรูปแบบสมการ (13) กับ (14) ไม่สอดคล้องกับกฎอนุพันธ์ของผลคูณ กฎอนุพันธ์ของผลหารและกฎลูกโซ่ตามแบบแคลคูลัสดั้งเดิม นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดของการนิยามในรูปแบบสมการ (14) คือ ฟังก์ชัน f ต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับ n ได้

Khalil และคณะ (2014) จึงกำหนดบทนิยามอนุพันธ์อันดับเศษส่วนในรูปแบบใหม่ที่เรียกว่า conformable fractional derivative ดังนี้

กำหนดฟังก์ชัน $f:\left[0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ อนุพันธ์อันดับ α ของ f คือ

$$T_{\alpha}(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \quad \text{ถ้าลิมิตมีค่า} \qquad (15)$$

เมื่อ $t>0$ และ $\alpha\in(0,1)$

เขาได้พิสูจน์ว่า T_{α} สอดคล้องกับ

(i) สมบัติเชิงเส้น นั่นคือ $T_{\alpha}(af+bg)=aT_{\alpha}(f)+bT_{\alpha}(g)$ สำหรับทุก $a,b\in\mathbb{R}$

(ii) อนุพันธ์อันดับเศษส่วนของค่าคงที่เป็นศูนย์ นั่นคือ $T_{\alpha}(k)=0$ สำหรับทุกค่าคงที่ $k\in\mathbb{R}$

(iii) กฎอนุพันธ์ของผลคูณ นั่นคือ $T_{\alpha}(fg)=fT_{\alpha}(g)+gT_{\alpha}(f)$

(iv) กฎอนุพันธ์ของผลหาร นั่นคือ $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gT_{\alpha}(f)-fT_{\alpha}(g)}{g^2}$ เมื่อ $g(t)\neq 0$

(v) $T_{\alpha}(t^p)=pt^{p-\alpha}$ สำหรับทุกค่า $p\in\mathbb{R}$

(vi) $T_{\alpha}(f)(t)=t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

แต่ Manuel และคณะ (2015) ไม่เห็นด้วยกับการกำหนดบทนิยามอนุพันธ์อันดับเศษส่วนในรูปแบบสมการ (15) เพราะเขาได้ตรวจสอบสมบัติของตัวดำเนินการ T_α พบว่า

(i) $T_0(f)(t) \neq f(t)$

เขากล่าวว่าอนุพันธ์อันดับศูนย์ของฟังก์ชันควรให้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันเดิม แต่ผู้เขียนเห็นว่าการนิยาม $T_\alpha(f)(t)$ ของ Khalil และคณะ (2014) ไม่ได้ครอบคลุมถึงกรณีที่ $\alpha = 0$ แต่เขาได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่แสดงว่า $T_\alpha\left(I_\alpha^a\right)(f)(t) = f(t)$ สำหรับ $t \geq 0$ เมื่อ $I_\alpha^a(f)(t) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}\,dx$ $, \alpha \in (0,1)$ ซึ่งคล้ายกับการใช้ทฤษฎีบทหลักมูลที่หนึ่งของแคลคูลัสดั้งเดิมที่เขียนในรูปสัญลักษณ์ของ Leibniz

(ii) $T_\alpha\left(T_\beta(f)(t)\right) \neq T_{\alpha+\beta}(f)(t)$ สำหรับทุกๆ $\alpha, \beta \in (0,1)$ ที่ซึ่ง $\alpha + \beta \in (0,1)$

เขาแสดงว่า conformable fractional derivative ไม่สอดคล้องกับกฎเลขชี้กำลัง (index law) ซึ่งผู้เขียนเห็นด้วยกับข้อขัดแย้งนี้ เพราะจากการยกตัวอย่าง $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
T_\alpha\left(T_\beta(t^p)\right) &= T_\alpha\left(pt^{p-\beta}\right) \\
&= pT_\alpha(t^{p-\beta}) \qquad \text{(สมบัติเชิงเส้นของ } T_\alpha\text{)} \\
&= p(p-\beta)t^{p-\beta-\alpha}
\end{aligned}
$$

แต่ $$T_{\alpha+\beta}(t^p) = pt^{p-\alpha-\beta}$$

ดังนั้น $$T_\alpha\left(T_\beta(f)(t)\right) \neq T_{\alpha+\beta}(f)(t)$$

(iii) เขากล่าวว่า T_α ไม่สอดคล้องกับกฎการหาอนุพันธ์ผลคูณของ Leibniz ที่ว่า

$$D^\alpha(fg) = f(D^\alpha g) + g(D^\alpha f)$$

แต่ผู้เขียนไม่เห็นด้วยกับข้อขัดแย้งนี้เพราะ Khalil และคณะ (2014) ได้แสดงการพิสูจน์

$$T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$$

ผู้เขียนเห็นว่าการนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนในรูป conformable fractional derivative มีความคล้ายกับการนิยามอนุพันธ์ที่เราใช้กันทั่วไป คือ $\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ ถ้าลิมิตมีค่า ทั้งยังมีทฤษฎีบทและกฎการหาอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับแคลคูลัสแบบดั้งเดิม เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้นกว่าการนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนในรูปแบบเดิม

อย่างไรก็ตาม ตัวดำเนินการ T_α ไม่สอดคล้องกับกฎเลขชี้กำลังดังที่กล่าวไว้แล้ว ดังนั้น Khalil และคณะ (2014) จึงกำหนดบทนิยามเพื่อขยายความกรณี $\alpha \in (n, n+1]$ แทนการใช้กฎเลขชี้กำลังดังกล่าว ดังนี้

ให้ $\alpha \in (n, n+1]$ และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับ n ที่จุด t ได้ เมื่อ $t > 0$ แล้ว conformable fractional derivative อันดับ α ของฟังก์ชัน f นิยามด้วย

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t+\varepsilon t^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}) - f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t)}{\varepsilon} \qquad (16)$$

เมื่อ $\lceil\alpha\rceil$ เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มีค่ามากกว่า α

จากบทนิยาม $T_{\alpha}(f)(t)$ ในสมการที่ (16) สามารถเขียนในรูปอย่างง่ายได้เป็น

$$T_{\alpha}(f)(t)=t^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}f^{\lceil\alpha\rceil}(t)$$

โดยที่ $\alpha\in(n,n+1]$ และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับ $n+1$ ที่จุด $t>0$ ได้

ความหมายทางเรขาคณิตและทางฟิสิกส์ของอนุพันธ์เชิงเศษส่วน (Geometric and physical interpretation of fractional derivatives)

เป็นที่ทราบดีว่า อนุพันธ์และปริพันธ์อันดับจำนวนนับมีความหมายชัดเจนในทางเรขาคณิตและในทางฟิสิกส์ แต่ในกรณีของอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงเศษส่วนยังไม่มีการอธิบายความหมายได้ชัดเจน ถึงแม้ว่าในปัจจุบันจะมีการนำไปประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆ มากขึ้น การอธิบายความหมายทางเรขาคณิตและทางฟิสิกส์สามารถใช้นิยามของอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงเศษส่วนได้หลากหลายรูปแบบดังสมการที่ (12)-(14) แต่ในบทความนี้จะกล่าวถึงความหมายทางเรขาคณิตและความหมายทางฟิสิกส์ของปริพันธ์เชิงเศษส่วนเฉพาะในรูปแบบของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนโดยรีมันน์ ลียูวิลล์ (Riemann-Liouville)

(i) ความหมายทางเรขาคณิตของปริพันธ์เชิงเศษส่วน

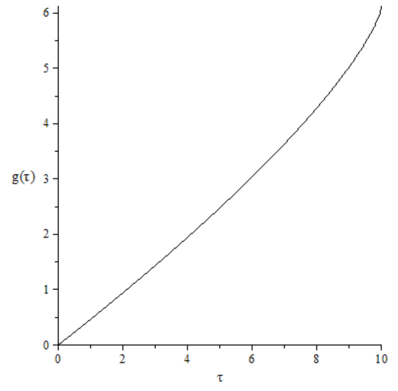
จากการกำหนดนิยามทางซ้ายของปริพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α ในรูปแบบของ Riemann-Liouville

$${}_0I_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau \tag{17}$$

ซึ่งสามารถเขียนสมการ (17) ในรูป ${}_0I_t^{\alpha}f(t)=\int_0^t f(\tau)\,dg_t(\tau)$ (18)

เมื่อ $g_t(\tau)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{t^{\alpha}-(t-\tau)^{\alpha}\right\}$ (19)

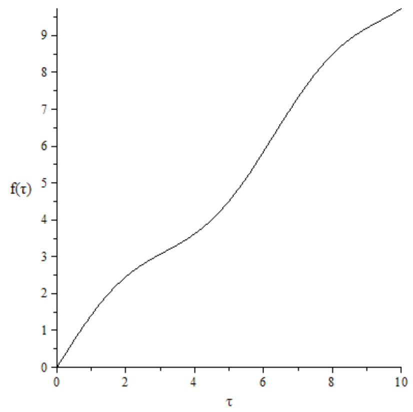
ถ้ากำหนดแกน $\tau,\,g,\,f$ และวาดกราฟของฟังก์ชัน $g_t(\tau)$ บนระนาบ $(\tau,\,g)$ เมื่อ $0\le\tau\le t$ จะได้กราฟดังรูปที่ 1



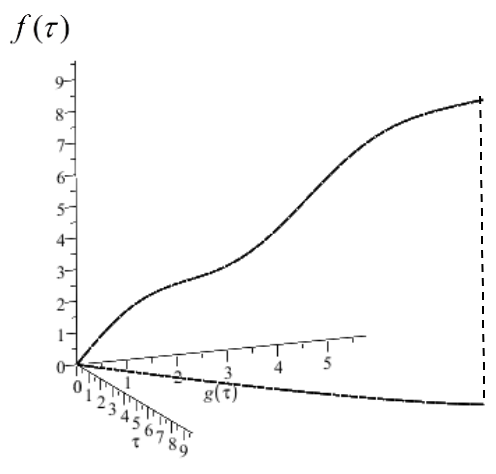
รูปที่ 1 กราฟของฟังก์ชัน $g_t(\tau)$ เมื่อกำหนด $\alpha = 0.75, t = 10$

บนเส้นกราฟ g จะสร้าง “กำแพง” ด้วยความสูงที่ต่างกันของ $f(\tau)$ ดังรูปที่ 2

ดังนั้นบริเวณด้านบนของ “กำแพง” ตามแนวเส้นโค้ง g นี้คือ เส้นโค้งใน 3 มิติที่มีพิกัดเป็น $\left(\tau, g_t(\tau), f(\tau)\right)$ เมื่อ $0 \le \tau \le t$ ดังรูปที่ 3

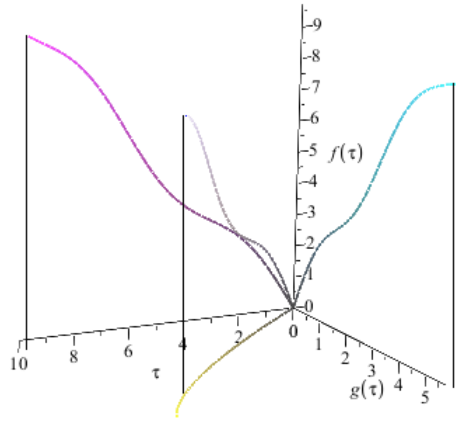


รูปที่ 2 กราฟของฟังก์ชัน $f(\tau)$ เมื่อกำหนด $f(\tau) = \tau + 0.5\sin(\tau)$



รูปที่ 3 กราฟของ $\left(\tau, g_t(\tau), f(\tau)\right)$ ตามแนวเส้นโค้ง g

เมื่อพิจารณาภาพฉายของ “กำแพง” ไปบนระนาบ $(\tau,\ f)$ พบว่า ภาพฉายที่ได้ คือ พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $f(\tau)$ เนื่องจากสอดคล้องกับค่าของ ${}_0I_t^1 f(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ และพื้นที่ภาพฉายของ “กำแพง” ไปบนระนาบ $(g,\ f)$ สอดคล้องกับค่าของ ${}_0I_t^\alpha f(t)=\int_0^t f(\tau)\,dg_t(\tau)$ ซึ่งเป็นค่าเดียวกันกับปริพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α ในสมการที่ (17) ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 แสดงภาพฉายของ “กำแพง” ไปบนระนาบ $(\tau,\ f)$ และ $(g,\ f)$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าความหมายทางเรขาคณิตของปริพันธ์เชิงเศษส่วน คือ ภาพฉายของ “กำแพง” ไปยังระนาบ $(\tau,\ f)$ และ $(g,\ f)$

สำหรับความหมายทางเรขาคณิตของนิยามทางซ้ายของปริพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α ในรูปแบบของ Riemann-Liouville ซึ่งอยู่ในรูป

$$ {}_tI_0^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b f(\tau)(\tau-t)^{\alpha-1}\,d\tau \qquad (20)$$

มีความหมายคล้ายกับนิยามทางขวาของปริพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α ในรูปแบบของ Riemann-Liouville

(ii) ความหมายทางฟิสิกส์ของอนุพันธ์เชิงเศษส่วน

ให้ปริพันธ์เชิงเศษส่วน $S_O(t)$ ของฟังก์ชัน $v(\tau)$ เป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v(\tau)$ ในเวลา τ ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยนิยามทางซ้ายของปริพันธ์เชิงเศษส่วนในรูปแบบของ Riemann-Liouville

$$S_O(t)=\int_0^t v(\tau)\,dg_t(\tau)={}_0I_t^\alpha v(t) \qquad (21)$$

เมื่อกำหนด $g_t(\tau)$ เช่นเดียวกับ (19)

โดยใช้สมบัติของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนและปริพันธ์เชิงเศษส่วน (Podlubny, 2002) และจากสมการ (21) จึงได้

$$v(t) = {}_0D_t^{\alpha}\ S_o(t) \tag{22}$$

เมื่อ ${}_0D_t^{\alpha}$ คือ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนในรูปแบบของ Riemann-Liouville

$$ {}_0D_t^{\alpha}\ f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \quad \text{โดยที่ } 0 < \alpha < 1 \tag{23}$$

แสดงว่า อนุพันธ์เชิงเศษส่วนของระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่จริง $S_O(t)$ มีค่าเท่ากับความเร็ว $v(\tau)$ ของวัตถุนั้น*

ในทางกลับกันเราสามารถหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t ใดๆ จากสมการที่ (21) ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของการเคลื่อนที่จากมุมมองของผู้สังเกตการณ์ O ($v_o(t) = S_o{}'(t)$) และความเร็ว $v(t)$ คือ

$$v_o(t) = \frac{d}{dt}\ {}_0I_t^{\alpha}\ v(t) = {}_0D_t^{1-\alpha} v(t) \tag{24}$$

แสดงว่าอนุพันธ์อันดับ $1-\alpha$ ของ $v(t)$ มีค่าเท่ากับ $v_o(t)$ ในกรณีที่ $\alpha = 1$ (ไม่มีการทำให้ช่วงเวลาผิดรูป) จะได้ $v_o(t) = v(t)$

การประยุกต์ของแคลคูลัสเชิงเศษส่วน (Applications of fractional calculus)

การนำแคลคูลัสเชิงเศษส่วนมาประยุกต์ใช้กับงานด้านอื่นๆ ได้เริ่มต้นเมื่อหลายร้อยปีก่อน ควบคู่กับการศึกษาทางทฤษฎี เช่น Leibniz (1695) Liouville (1834) Riemann (1892) และ Oliver Heaviside นำไปใช้ในทางวิศวกรรมในปี 1890 ทำให้ในระยะเวลากว่า 20 ปีที่ผ่านมา แคลคูลัสเชิงเศษส่วนเข้ามามีบทบาทในด้านวิศวกรรม ฟิสิกส์และทางการแพทย์มากขึ้น เนื่องจากการสร้างแบบจำลองด้วยแคลคูลัสเชิงเศษส่วนมีความแม่นยำกว่าการสร้างแบบจำลองด้วยแคลคูลัสแบบดั้งเดิม (J.F.G’omez-Aguilar et al., 2014)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการประยุกต์ใช้แคลคูลัสเชิงเศษส่วน ดังนี้

(i) ปัญหาเทาโทโครน (tautochrone problem)

กล่าวได้ว่า Abel (1802-1829) เป็นบุคคลแรกที่นำแคลคูลัสเชิงเศษส่วนมาประยุกต์ในปัญหาเทาโทโครน (Kisela, 2008). ที่มีรูปแบบเป็นสมการเชิงปริพันธ์

$$\int_{\eta=0}^{\eta=y} \frac{s'(\eta)\, d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = \sqrt{2g}T \tag{25}$$

เมื่อ $s(\eta)$ เป็นความยาวเส้นโค้ง

g เป็นความเร่งจากแรงโน้มถ่วงของโลก

T คือ เวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาตามแนวเส้นโค้ง (มีค่าคงที่)

และสามารถเขียนสมการ (25) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับเศษส่วน

* ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาของแต่ละบุคคล (individual time τ) และเวลาของเอกภพ (the cosmic time T) ณ เวลา t ใดๆ สามารถแทนด้วยฟังก์ชัน $T = g_t(\tau)$ ดังสมการ (19) ซึ่งเท่ากับความเร็ว $v(\tau)$ ของวัตถุนั้นๆ

$$D^{\frac{1}{2}}s(y)=\frac{\sqrt{2g}T}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{26}$$

เมื่อ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

โดยใช้สูตรปริพันธ์อันดับครึ่งของ Caputo กับสมการที่ (26) ได้ผลเฉลยคือ

$$s(y)=\frac{2\sqrt{2g}\,T}{\pi}y^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

(ii) การศึกษาสมบัติของวัสดุที่มีความยืดหยุ่น (viscoelasticity)

การศึกษาสมบัติความยืดหยุ่น (Thomas Kisela, 2008) โดยทั่วไปจะใช้แบบจำลองพื้นฐาน 2 รูปแบบ คือ ใช้กฎของฮุค (Hooke's law) สำหรับของแข็งในอุดมคติ (the ideal solid) และใช้กฎของนิวตัน (Newton's law) สำหรับของไหลในอุดมคติ (the ideal fluid) ดังสมการที่ (28) และ (29)

$$\sigma(t)=E\varepsilon(t) \tag{28}$$

$$\sigma(t)=\eta\frac{d}{dt}\varepsilon(t) \tag{29}$$

เมื่อ σ คือ ความเค้น (stress)

ε คือ ความเครียด (strain)

E คือ ค่าคงที่มอดูลัสสภาพยืดหยุ่น

η คือ ค่าคงที่ความหนืด

แต่วัสดุที่แท้จริงในธรรมชาติมักจะมีสมบัติระหว่างความเป็นของแข็งในอุดมคติกับของไหลในอุดมคติ ด้วยเหตุนี้จึงมีผู้คิดแบบจำลองที่ผสมผสานระหว่างกฎของฮุค กฎของนิวตันและอนุพันธ์เชิงเศษส่วน เพื่อให้ได้แบบจำลองที่เหมาะสมที่สุด (Thomas Kisela, 2008) เช่น แบบจำลองของ Blair (Blair's model) ที่อยู่ในรูป

$$\sigma(t)=E\tau^{\alpha}D_0^{\alpha}\varepsilon(t) \tag{30}$$

เมื่อ $\tau=\frac{\eta}{E},\quad \alpha\in(0,1)$

ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (28) เมื่อ $\alpha=0$ และสอดคล้องกับสมการ (29) เมื่อ $\alpha=1$

โดยใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (30) ได้ผลเฉลยที่เรียกว่า มอดูลัสการคลายตัว (the relaxation modulus $G(t)$) คือ

$$G(t)=\frac{E\tau^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \tag{31}$$

(iii) แบบจำลองของตัวควบคุมระบบภูมิคุ้มกันเซลล์มะเร็ง

ตัวอย่างการนำแคลคูลัสเชิงเศษส่วนไปใช้ในการแพทย์ เช่น งานวิจัยของ E. Ahmed และคณะ (2012) ที่ศึกษาแบบจำลองของตัวควบคุมระบบภูมิคุ้มกันเซลล์มะเร็งซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับเศษส่วน ดังระบบสมการที่ (32)

$$\begin{aligned} D^{\alpha}T &= aT - r_1TE_1 - r_2TE_2 \\ D^{\alpha}E_1 &= -d_1E_1 + \frac{T^2E_1}{T^2+k_1} \qquad \text{โดยที่ } 0<\alpha\le 1 \\ D^{\alpha}E_2 &= -d_2E_2 + \frac{T^2E_2}{T^2+k_2} \end{aligned} \qquad (32)$$

เมื่อ $T \equiv T(t)$ เป็นเซลล์เนื้องอก (tumor cells)

$E_1 \equiv E_1(t), E_2 \equiv E_2(t)$ เป็นตัวควบคุมระบบภูมิคุ้มกัน (immune effectors)

$a, r_1, r_2, d_1, d_2, k_1, k_2$ เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวก

ระบบสมการที่ (32) มีจุดสมดุล (the equilibrium points) ที่

$$E_0 = (0,0,0);\ E_1 = \left(\sqrt{\frac{d_1k_1}{1-d_1}}, \frac{a}{r_1}, 0\right);\ E_3 = \left(\sqrt{\frac{d_2k_2}{1-d_2}}, 0, \frac{a}{r_2}\right)$$

ผลสรุปของงานวิจัยนี้พบว่า ต้องใช้การจำลองเชิงตัวเลขและปรับค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในการศึกษาสภาวะคงตัวของผลเฉลย และพบว่าการสร้างแบบจำลองในระบบที่มีความซับซ้อน โดยใช้อนุพันธ์อันดับเศษส่วนมีความเหมาะสมกว่าการใช้อนุพันธ์อันดับจำนวนเต็ม

สรุป

บทความนี้ได้นำเสนอที่มาของการศึกษาแคลคูลัสเชิงเศษส่วน การนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนในรูปแบบต่างๆ ความหมายเชิงเรขาคณิตและเชิงฟิสิกส์ การประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆ ทำให้ทราบว่าแคลคูลัสเชิงเศษส่วนเป็นสาขาที่น่าสนใจสาขาหนึ่งและยังเป็นรากฐานในการศึกษางานวิจัยอื่นที่เกี่ยวข้อง เช่น เรขาคณิตเชิงเศษส่วน สมการเชิงอนุพันธ์อันดับเศษส่วน เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics 279: 57-66.

Ahmed, E., Hashis, A. H. and Hihan, F. A. (2012). On fractional order cancer model. Journal of fractional calculus and applications 3(2): 1-6.

Gomez-Aguilar´, J. F., Razo-Hernandez´ R. and Granados-Lieberman, D. (2014). A Physical interpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response. Revista Mexicana de Fisica 60: 32-38.

Khalil, R., Horani, M. Al., Yousef, A. and Sababheh, M. (2014). A New definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics 264: 65-70.

Kisela, T. (2008). Fractional Differential Equations and Their Applications.Diploma Thesis. Brno University of Technology. Italy. 71 pages.

Lazarevic, M. (2014). Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling. WSEAS Press. pp. 3-16.

Manuel, D., Ortiguera, J. A. and Tenreiro, M. (2015). What is a fractional derivative? Journal of Computational Physics 293: 4-13.

Podlubny, I. (2002). Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. Fractional Calculus and Applied Analysis 5(4): 367-386.

Wang, X. (2012). Fractional Geometric Calculus: Toward A Unified Mathematical Language for Physics and Engineering, แหล่งข้อมูล http://www.rxiv.org/pdf/1206.0005v1.pdf ค้นเมื่อวันที่ 1 กันยายน 2558

❑❑❑❑❑