ว.วิทย. มข. 45(1) 200-213 (2560) KKU Sci. J. 45(1) 200-213 (2017)

การจำลองสถานการณ์ด้วยวิธีมอนติคาร์โลในการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนกับใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน

Monte Carlo Simulation for Comparing The Parameters Inverse Gaussian Distributions Estimated by Bayesian Estimation Using Gamma And Weibull Prior Distribution

กิตติศักดิ์ จังพานิช [1*] และ สุชาดา กรเพชรปาณี [1]

[1]วิทยาลัยวิทยาการวิจัยและวิทยาการปัญญา มหาวิทยาลัยบูรพา อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี 20131

[*]Corresponding Author, E-mail: kittisakaj1986@gmail.com

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบ ความเอนเอียงสัมบูรณ์ (|Bias|) กับค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ («,) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนกับใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน ด้วยการจำลองสถานการณ์โดยวิธีมอนติคาร์โล โดยที่ « = 1, 5, 10, 50, 100, = 1, 5, 10, 50, 100 และ n = 50, 100, 200, 400, 1000 ทำซ้ำจำนวน 10,000 รอบ ผลการวิจัย แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50 และ 1,000 พารามิเตอร์รูปร่าง («) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 100, 200, 400 และ 1,000 พารามิเตอร์บอกมาตราส่วน ( ) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน

ABSTRACT

This aim of this study was to compare the absolute bias (|Bias|) and the Mean Square Error (MSE) of the parameters («,) in Inverse Gaussian distributions estimated by Bayesian using Gamma and Weibull prior distributions. The simulation was computed by Monte Carlo where the shape parameter («) was equal to 1, 5, 10, 50, 100 the scale parameter (   ) was equal to 1, 5, 10, 50, 100 and the sample size (n) was equal to 50, 100, 200, 400, 1000 repeated for 10,000 times. The result showed that in the case of the sample sizes was 50 and 1000, shape parameter («) in Inverse Gaussian distributions using Weibull prior distribution was more efficient than using Gamma prior distribution. For the scale parameter in Inverse Gaussian distributions, using Weibull prior distribution was more efficient than using Gamma prior distribution in the case of these sample sizes; 100, 200, 400 and 1000.

คำสำคัญ: แจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน การจำลองสถานการณ์ด้วยวิธีมอนติคาร์โล

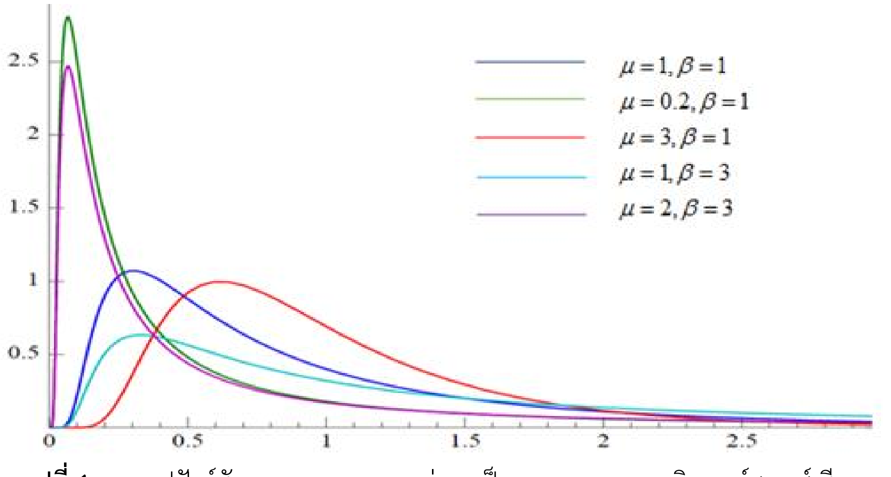
Keywords: Inverse Gaussian distributions, Weibull prior distribution, Gamma prior distribution Monte Carlo simulation.

บทนำ

การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนเป็นการแจกแจงหนึ่งที่มีลักษณะเบ้ขวา โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ

$$f_{IG}(x:«,\ ) = \sqrt{\frac{}{2®}}\,x^{-\frac{3}{2}}\exp\{-\frac{(x-«)^2}{2«^2 x}\},\ x>0$$

โดยมี « เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง (Shape Parameter) และ เป็นพารามิเตอร์บอกมาตราส่วน (Scale Parameter) สามารถเขียนกราฟฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น แสดงดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 กราฟฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน

การพัฒนาเปรียบเทียบสมบัติทางสถิติของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนกับการแจกแจงแบบปรกติ ภายใต้การศึกษาของ Chhikara and Folks (1979) มีนักสถิติเป็นจำนวนมากให้ความสนใจกับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ทั้งนักสถิติแบบดั้งเดิม (Classical Statistics) และนักสถิติแบบเบส์ (Bayesian Statistics)

(Marshall, 2007) นักสถิติแบบดั้งเดิมศึกษาการหาตัวประมาณค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนด้วยวิธีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (Moment Generating Function) ปรากฏว่า ค่าโมเมนต์ที่ 1 คือ « โมเมนต์ที่ 2 คือ $\frac{\text{«}^{3}}{\;}$ โมเมนต์ที่ 3 คือ $\frac{3\text{«}^{5}}{2}$ และโมเมนต์ที่ 4 คือ $\frac{15\text{«}^{7}}{3}+\frac{3\text{«}^{6}}{2}$ ซึ่งตัวประมาณค่าดังกล่าวที่ได้จากวิธีโมเมนต์ ค่าที่ได้จากโมเมนต์ที่ 1 ถึง โมเมนต์ที่ 4 คือ ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ และความโด่ง ตามลำดับ (Ahmed, 2007) และ ในปีเดียวกัน มีการศึกษาหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood) ปรากฏว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\text{«}} = \bar{x}$ และตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\;} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{\bar{x}}\right)}$ (Cheng and Amin, 1981)

นอกจากนักสถิติแบบดั้งเดิมแล้ว มีนักสถิติแบบเบส์ที่สนใจการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เริ่มจาก Banerjee and Bhattacharyya (1979) ได้ศึกษาการหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจกแกมม่า (Gamma Distribution) เป็นการแจกแจงก่อน (Prior Distribution) เปรียบเทียบกับตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยมีการแจกแจงปรกติเป็นการแจกแจงก่อน ปรากฏว่า ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน มีค่าความน่าจะเป็นในการลู่เข้าสูงกว่าการแจกแจงปรกติเป็นการแจกแจงก่อน นอกจากนี้ Mahmoud (1991) ได้ศึกษาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงเจฟเฟรย์ (Jeffreys Distribution) เป็นการแจกแจงก่อน เปรียบเทียบกับไม่มีการแจกแจงก่อน โดยใช้กับข้อมูลระยะเวลาที่เครื่องปรับอากาศเสีย ปรากฏว่า ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ได้ โดยใช้การแจกแจงเจฟเฟรย์ (Jeffreys Distribution) เป็นการแจกแจงก่อน ให้ค่าความแปรปรวนต่ำกว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่มีการแจกแจงก่อน

ต่อมาปี ค.ศ. 2010 Pandey and Rao (2010) ได้ประมาณค่าพารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ ภายใต้ฟังก์ชันความสูญเสียของลินเนกซ์ (Linex Loss Function) และ Prakash (2011) ประมาณค่าพารามิเตอร์ของความแปรปรวนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ ภายใต้เกณฑ์ฟังก์ชันความสูญเสียของลินเนกซ์ ปรากฏว่า ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ความแปรปรวนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้ฟังก์ชันความสูญเสียของลินเนกซ์ มีค่าความแปรปรวนต่ำกว่าเมื่อใช้ฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสอง กล่าวคือ ตัวประมาณค่าที่ใช้ฟังก์ชันความสูญเสียของลินเนกซ์มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณค่าที่ใช้ฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสอง และ Sparks, Sutton, Toscas, & Ormerod (2011) ใช้การจำลองสถานการณ์แบบมอนติคาร์โล ด้วยวิธีโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo: MCMC) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจงแจกอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน โดยใช้เกณฑ์ค่าความแปรปรวนต่ำสุด ปรากฏว่า ค่าพารามิเตอร์ของการแจงแจกอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยการใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่าความแปรปรวนต่ำกว่าการใช้การแจกแจงเอกรูป (Uniform Distribution) เป็นการแจกแจงก่อน

การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงที่มีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ซึ่งใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันความน่าเชื่อถือ การประมาณช่วงเวลาของข้อมูล การประยุกต์ในด้านการเงิน ด้านคลินิกและด้านวิศวกรรม (Helu et al., 2009) ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูล คือ $f_{WB}(x:«,\ )=«\ x^{«-1}\exp\{-\ x^{«}\},\quad x>0$ โดยมีค่าเฉลี่ยคือ $«\,\Gamma\,(\frac{1}{\ }+1)$ และความแปรปรวนคือ $«^{2}\left[\Gamma(\frac{2}{\ }+1)-\Gamma(\frac{1}{\ }+1)^{2}\right]$ เพื่อให้ได้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อย ต้องทราบลักษณะของข้อมูลเบื้องต้น แล้วนำมาปรับปรุงตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ เพื่อให้ได้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีประสิทธิภาพดีขึ้น จากการศึกษาของ Pandey and Bandyopadhyay (2012) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน ปรากฏว่า ได้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่มีการแจกแจงก่อน และจากการศึกษาของ MohdSaat et al., (2008) ได้ประมาณค่าพารามิเตอร์รูปร่างและพารามิเตอร์บอกมาตราส่วนด้วยวิธีการทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (Likelihood ratio test) และจำลองสถานการณ์ด้วยวิธีมอนติคาร์โล ปรากฏว่า ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมม่ามีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสูงกว่าตัวประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลในกรณีที่ขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 50 งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบ |Bias| กับ MSE ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ («,) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนกับใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน ด้วยการจำลองสถานการณ์โดยวิธีมอนติคาร์โล

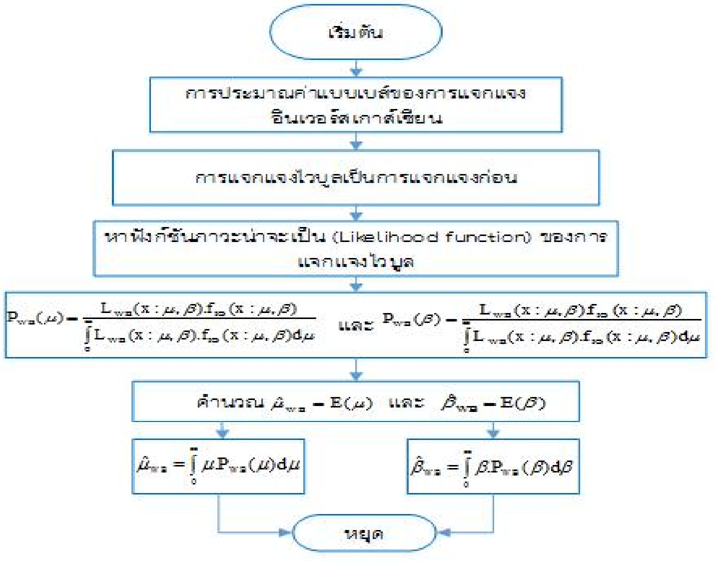
วิธีการดำเนินการวิจัย

1. การหาตัวประมาณค่าแบบเบส์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน แสดงดังรูปที่ 2

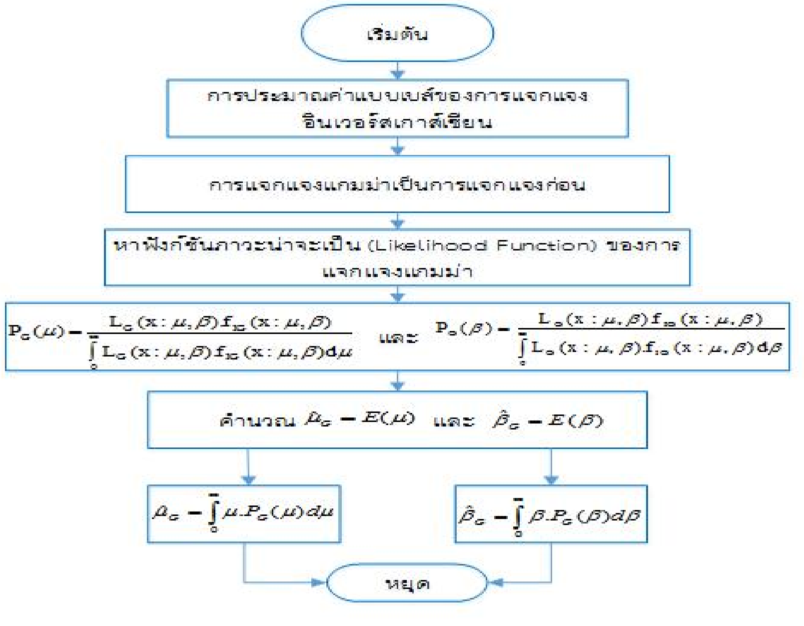
2. การหาตัวประมาณค่าแบบเบส์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน แสดงดังรูปที่ 3

3. ขอบเขตของการวิจัย

กำหนดค่า « = 0.5, 1, 5, 10, 50, = 0.5, 1, 5, 10, 50 และ n =100, 200, 300, 400, 500 โดยใช้โปรแกรม R ในการจำลองสถานการณ์ ทำซ้ำจำนวน 10,000 รอบ เปรียบเทียบค่าสัมบูรณ์ของความเอนเอียง (|Bias|) และค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของตัวประมาณค่า « และ ของตัวประมาณค่าของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนและใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน



รูปที่ 2 ขั้นตอนการหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน



รูปที่ 3 ขั้นตอนการหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน

ผลการวิจัย

ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์รูปร่าง («) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน โดยใช้เทคนิคการประมาณค่าของ Lindley (1980) คือ

$$\hat{«}_{WB} \approx \hat{«}_{MLE} + {}^{\circ}{}_{1}\pm^{2} + \frac{1}{2} l_3 \pm^{4}$$

$$\hat{«}_{WB} \approx \hat{«}_{MLE} + \left(\frac{1}{3\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{«^4} - \frac{2n}{«^3})} \right) \left(\left(\frac{n}{«} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^{«} \ln x_i \right) + \left(\frac{6\sum_{i=1}^{n} x_i}{«^5} - \frac{3n}{«^4} \right) \left(\frac{1}{3\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{«^4} - \frac{2n}{«^3})} \right) \right)$$

ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์บอกมาตราส่วน ( ) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน คือ

$$\hat{\ }_{WB} \approx \hat{\ }_{MLE} + {}^{\circ}{}_{1Wb} \pm^{2} + \frac{1}{2} l_3 \pm^{4}$$

$$\hat{\ }_{WB} \approx \hat{\ }_{MLE} + \left(2 - \frac{2}{n}{}^{2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{«}\right)\right) + \frac{2}{n}$$

ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์รูปร่าง («) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน โดยใช้เทคนิคการประมาณค่าของ Lindley (1980) คือ

$$\hat{«}_{G} \approx \hat{«}_{MLE} + {}^{\circ}{}_{1G«} \pm^{2} + \frac{1}{2} l_3 \pm^{4}$$

$$\hat{«}_{G} \approx \hat{«}_{MLE} + \left(\frac{1}{3\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{«^4} - \frac{2n}{«^3}} \right) \left(\left(-\frac{n}{«} + \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{«^2} \right) + \left(\frac{6\sum_{i=1}^{n} x_i}{«^5} - \frac{3n}{«^4} \right) \left(\frac{1}{3\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{«^4} - \frac{2n}{«^3}} \right) \right)$$

ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์บอกมาตราส่วน ( ) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน โดยใช้เทคนิคการประมาณค่าของ Lindley (1980) คือ

$$\hat{\ }_{G} \approx \hat{\ }_{MLE} + {}^{\circ}{}_{1G} \pm^{2} + \frac{1}{2} l_3 \pm^{4}$$

$$\hat{\ }_{G} \approx \hat{\ }_{MLE} + \left(\left(-n\ln« + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(B-1)!} \right) \left(\frac{2}{n}{}^{2} \right) + \frac{2}{n}$$

$$\text{โดยที่ } \hat{«}_{MLE} = \overline{X} \quad \text{และ} \quad \hat{\ }_{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i} - \frac{1}{\overline{X}}\right)}$$

ผลการเปรียบเทียบ |Bias| กับ MSE ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ («,   ) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนกับใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน ด้วยการจำลองสถานการณ์โดยวิธีมอนติคาร์โล ชี้ให้เห็นว่า พารามิเตอร์รูปร่าง («) ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 5, 10, 50) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 5, 10, 50) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 100 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 1, 5, 10) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน สามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 100 พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพมากกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 5, 10, 50) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน

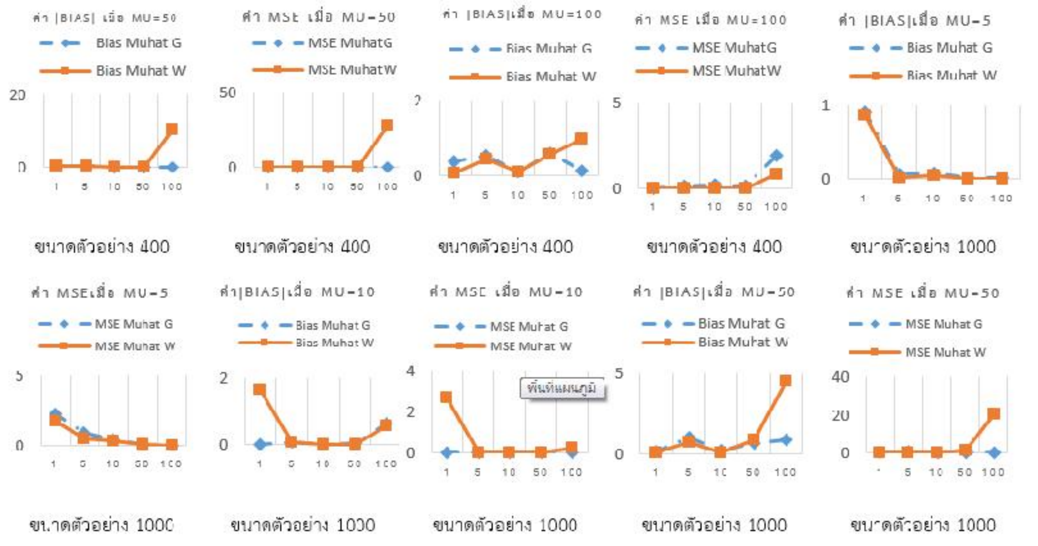
ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 200 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 10, 50, 100) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน สามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 200 พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพมากกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 10, 50, 100) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 400 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 10, 50, 100) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 10, 50, 100) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 1,000 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 5, 10, 50) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฏว่ามี 3 สถานการณ์

(« = 5, 10, 50) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน แสดงดังรูปที่ 4

รูปที่ 4 ค่า |Bias| และ MSE ของพารามิเตอร์รูปร่าง («) ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50, 100, 200, 400 และ 1,000



รูปที่ 4 ค่า |Bias| และ MSEของพารามิเตอร์รูปร่าง («) ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50, 100, 200, 400 และ 1,000 (ต่อ)

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฎว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 5, 10, 50) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฎว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 5, 10, 50) จาก 5 สถานการณ์ พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน

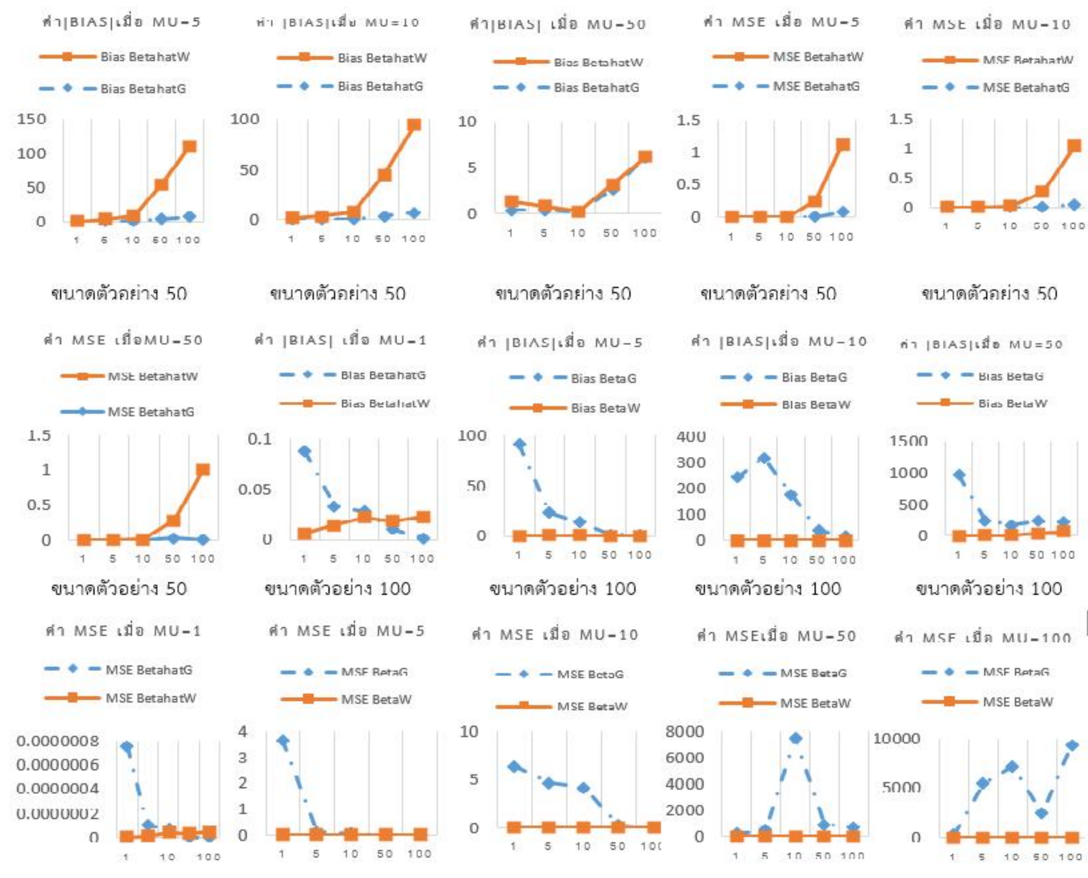
ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 100 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฎว่า มี 4 สถานการณ์ (« = 1, 5, 10, 50) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฎว่า มี 5 สถานการณ์ (« = 1, 5, 10, 50, 100) จาก 5 สถานการณ์ พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 200 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฎว่า ทั้งหมด 5 สถานการณ์ (« = 1, 5, 10, 50, 100) ที่พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฎว่า มี 5 สถานการณ์ (« = 1, 5, 10, 50, 100) จาก 5 สถานการณ์ พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน

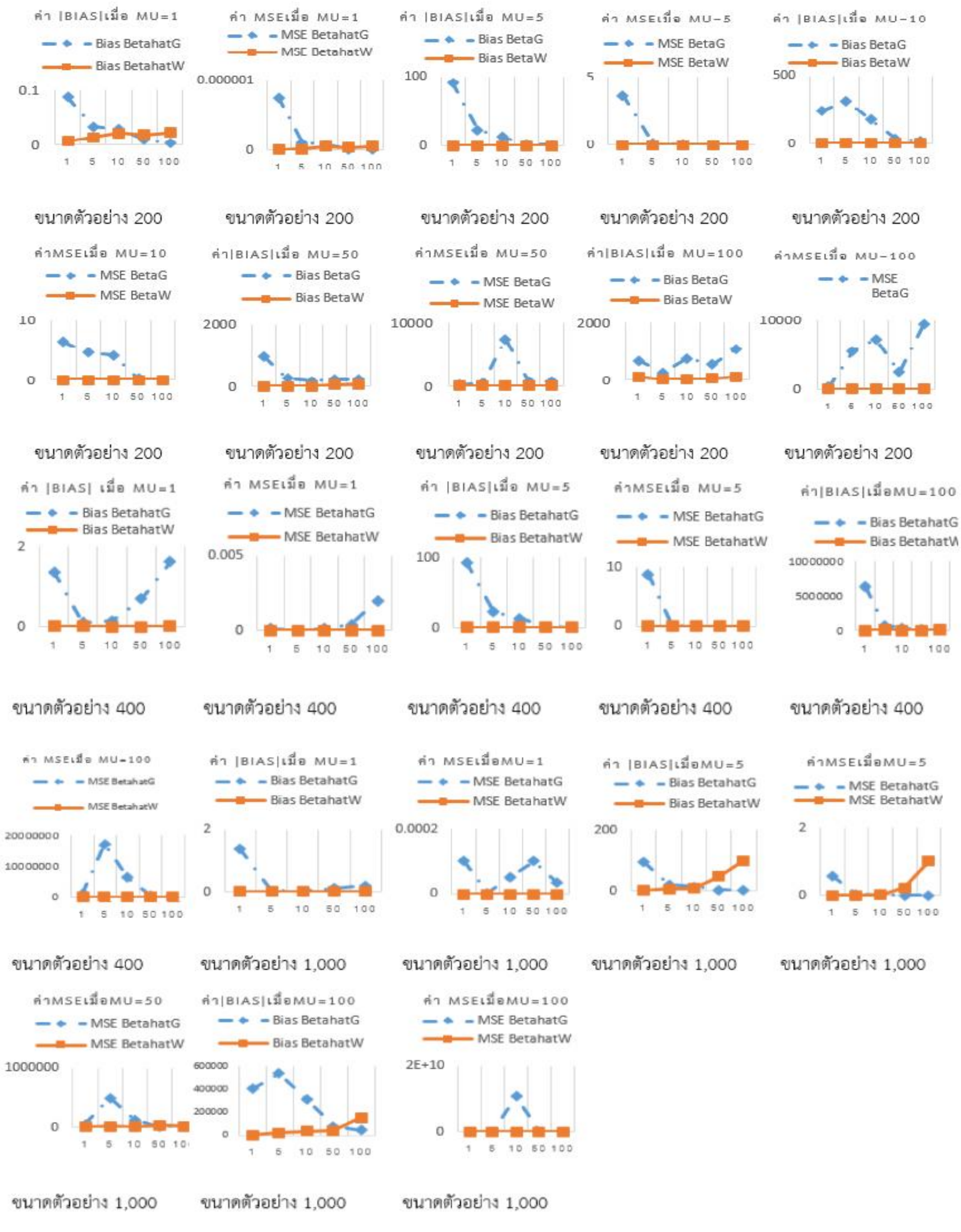
ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 400 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฎว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 10, 50, 100) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกม่าเป็นการ

แจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 10,50,100) จาก 5 สถานการณ์ พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 1,000 โดยเกณฑ์ |Bias| ปรากฏว่า มี 3 สถานการณ์ (« = 1, 5, 100) จาก 5 สถานการณ์ ที่พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า |Bias| น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน โดยเกณฑ์ MSE ปรากฏว่า มี 4 สถานการณ์ (« = 1, 5, 50, 100) จาก 5 สถานการณ์ พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่า MSE น้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน แสดงดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 ค่า |Bias| และ MSE ของพารามิเตอร์บอกมาตราส่วน ( ) ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50, 100, 200, 400 และ 1,000



รูปที่ 5 ค่า |Bias| และ MSE ของพารามิเตอร์บอกมาตราส่วน ( ) ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50, 100, 200, 400 และ 1,000 (ต่อ)

วิจารณ์ผลการวิจัย

การประมาณค่าแบบเบส์ของพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50 และ 1,000 เนื่องจากในการประมาณค่าแบบเบส์ด้วยวิธีของ Lindley (1980) ภายใต้ฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสองในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50 และ 1,000 เลขสุ่มที่ใช้ในการคำนวณให้ค่าฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสองของพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนน้อยกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน ส่งผลให้ค่าประมาณที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงทำให้พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน แต่ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 100, 200 และ 400 เลขสุ่มที่ใช้ในการคำนวณให้ค่าฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสองของพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนน้อยกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน ส่งผลให้ค่าประมาณที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงทำให้พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน ทั้งนี้แนวคิดการประมาณค่าแบบเบส์ มีแนวคิดมาจากค่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเหมือนกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ส่งผลให้ตัวประมาณค่าที่ได้จากการประมาณค่าแบบส์โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่าอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาของ MohdSaat et al., (2008)

พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนในกรณีที่ขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 50 เมื่อพารามิเตอร์อยู่ในช่วง [5, 50] สำหรับขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 1,000 การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนเมื่อพารามิเตอร์อยู่ในช่วง [5,10] ชี้ให้เห็นว่า ขนาดตัวอย่างขนาดเล็กการแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนควรใช้กับข้อมูลที่มีพารามิเตอร์ขนาดใหญ่ แต่ถ้าขนาดตัวอย่างใหญ่การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนควรใช้กับข้อมูลที่มีพารามิเตอร์ขนาดเล็ก

พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน เนื่องจากการประมาณค่าแบบเบส์ โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน สามารถประมาณค่าภายใต้ฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสองได้โดยไม่ต้องใช้การประมาณค่าของ Lindley (1980) ชี้ให้เห็นว่า การประมาณค่าแบบเบส์โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนภายใต้ฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสองด้วยวิธีตรงมีประสิทธิภาพดีกว่าการประมาณค่าของ Lindley (1980) แต่พารามิเตอร์รูปร่างโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนไม่สามารถหาด้วยวิธีตรงได้ จึงมีความจำเป็นในการหาตัวประมาณค่าด้วยวิธีของ Lindley (1980) และ พารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อน ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 100, 200, 400 และ 1,000 แต่ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง 50 พารามิเตอร์บอกมาตราส่วน ( ) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมี

ประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน ทั้งนี้เหตุผลสนับสนุนเหมือนกับพารามิเตอร์รูปร่าง กล่าวคือ แนวคิดการประมาณค่าแบบเบส์ มีแนวคิดมาจากค่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเหมือนกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดส่งผลให้ตัวประมาณค่าที่ได้จากการประมาณค่าแบบส์ โดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีค่าอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาของ MohdSaat et al., (2008)

สรุปผลการวิจัย

พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50 และ 1,000 แต่ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 100, 200 และ 400 พารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน สำหรับพารามิเตอร์บอกมาตราส่วนของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น 100, 200, 400 และ 1,000 แต่ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง 50 พารามิเตอร์บอกมาตราส่วน ( ) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้การแจกแจงแกมม่าเป็นการแจกแจงก่อนมีประสิทธิภาพดีกว่าใช้การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงก่อน

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ ผศ.ดร.สุชาดา กรเพชรปาณี คณบดีวิทยาลัยวิทยาการวิจัยและวิทยาการปัญญา มหาวิทยาลัยบูรพา อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี ที่ให้คำปรึกษาเป็นอย่างดีและขอขอบคุณ Professor Dr. Andrei Volodin ที่ให้คำแนะนำในการพัฒนาสูตรประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนเป็นอย่างดี

เอกสารอ้างอิง

Ahmed, M. (2007). On the Theory of Inversion. International Journal of Statistical Sciences 6(special): 43-53.

Banerjee, B. N., and Bhattacharyya, P. (1979). Bayesian Results for the Inverse Gaussian distribution with an Application. American Statistical Association and American Society for Quality. Technometrics 21(2): 247-251.

Cheng, R. C. H., and Amin, N. A. K. (1981). Maximum Likelihood Estimation of Parameters in the Inverse Gaussian Distribution, with Unknown Origin. American Statistical Association and American Society for Quality 23(3): 257-263.

Chhikara, R. S., and Folks, J. L. (1989). The Inverse Gaussian Distribution. New York: Marcel Dekker. Helu, A., Salih, M., & Alkam, O. (2010). Bayes Estimation of Weibull Distribution Parameters Using Ranked Set Sampling. Communications in Statistics 39(14): 2533-2551.

Lindley, D.V. (1980). Approximate Bayesian Methods. Trabojos de Estadistica 31: 223-245.

Mohd Saat, N. Z., Jemain, A. A., and Al-Mashoor, S. H. (2008). A Comparison of Weibull and Gamma Distributions in Application of Sleep Spnea. Asian Journal of Mathematics and Statistics 1(3), 132-138.

Marshall, E. C., and Spiegelhalter, D. J. (2007). Identifying outliers in Bayesian hierarchical models: a simulation-based approach. International Society for Bayesian Analysis 2(2): 409-444.

Mahmoud, M. (1991). Bayesian estimation of the 3-parameter inverse Gaussian distribution. Trabajos de estadística 6(1): 45-62.

Pandey, B. N., and Bandyopadhyay, P. (2012). Bayesian Estimation of Inverse Gaussian Distribution. Journal of Statistical Computation & Simulation 1-17.

Pandey, H., and Rao, K. (2010). Bayesian estimation of scale parameter of inverse Gaussian distribution using linex loss function. J. Comp. Math. Sci. 1(2): 171-176.

Prakash, G. (2011). Bayes shrinkage minimax estimation in inverse Gaussian Distribution. Appl.Math. 2(1): 830-835.

Sparks, R. S., Sutton, G., Toscas, P. and Ormerod, J. T. (2011). Modelling Inverse Gaussian Data with Censored Response Values : EM versus MCMC. Advances In Decision Sciences 1-8.