ว.วิทย. มข. 43(4) 609-619 (2558) KKU Sci. J. 43(4) 609-619 (2015)

# ปัญหาคลาสสิกภาคขยายปัญหาหนึ่งในวิชาเรขาคณิต

# An Extending Classical Problem in Geometry

*ลาวัณย์ รัตนจันทร์*[1] *เล็ก แซ่จิว*[2] *และ* *อาทิตย์ อินทรสิทธิ์*[2*]


## บทคัดย่อ

ในวิชาเรขาคณิตมีทฤษฎีบทคลาสสิกบทหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า กล่าวว่า ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้ง 3 ด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นค่าคงตัว ทฤษฎีบทนี้ได้รับความสนใจโดยมีการศึกษาและขยายความทฤษฎีบทอย่างแพร่หลาย ในบทความวิชาการฉบับนี้ได้ศึกษาการวิเคราะห์และอภิปรายถึงบทตั้งและทฤษฎีบทภาคขยายบทหนึ่งของทฤษฎีบทคลาสสิกนี้ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการคำนวณหาผลบวกของระยะทางดังกล่าวสำหรับรูปสามเหลี่ยมและรูปหลายเหลี่ยมปกติใด ๆ

## ABSTRACT

In geometry, there is a classic theorem states that the sum of the distances from any point in the interior of an equilateral triangle to each of the sides of the triangle is a constant. This theorem has received many interests and been widely studied, resulting in other lemmas and theorems extended from this classic theorem. In this paper, we analyze and discuss a lemma and a theorem about the calculation of the sum of such distances for any triangle and regular polygon.


**คำสำคัญ:** เรขาคณิต สามเหลี่ยมด้านเท่า รูปหลายเหลี่ยมปกติ

**Keywords:** Geometry, Equilateral triangle, Regular polygon

[1]คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี ตำบลรูสะมิแล อำเภอเมือง จังหวัดปัตตานี 94000

[2]คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี ตำบลรูสะมิแล อำเภอเมือง จังหวัดปัตตานี 94000

*Corresponding Author, E-mail: arthit.i@psu.ac.th

## 1. ความนำ

ทฤษฎีบทคลาสสิกบทหนึ่งในวิชาเรขาคณิต กล่าวว่า ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้ง 3 ด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบทคลาสสิกนี้ได้รับความสนใจตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน ราว ค.ศ. 1941 ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทนี้ปรากฏอยู่ในหนังสือของ Courant and Robbins (1941) ต่อมา Jones and Shaw (1988) ได้ตีพิมพ์บทความเรื่องปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งเป็นการรื้อฟื้นปัญหาที่เกี่ยวกับทฤษฎีบทคลาสสิกขึ้นใหม่อีกครั้ง ส่วน Lerry and Jeremy (2006) ได้แนวคิดจากประสบการณ์ในชั้นเรียนในการพิสูจน์ที่รัดกุมในทางคณิตศาสตร์ของทฤษฎีบทคลาสสิก

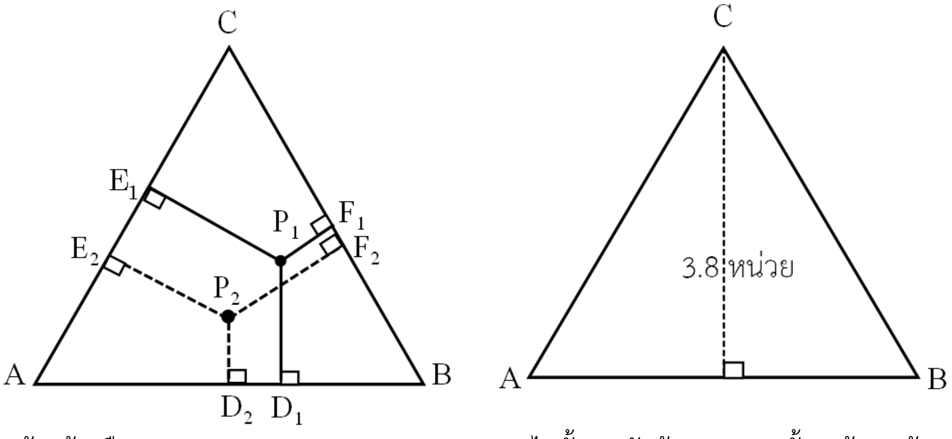
ต่อมา Arthur (2009) ได้เสนอบทตั้งที่เป็นภาคขยายของทฤษฎีบทคลาสสิก โดยให้สูตรการหาผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ที่อยู่บนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปตั้งฉากกับด้านประกอบมุมยอด และให้เกณฑ์การพิจารณาเครื่องหมายของระยะทางฯ เพื่อหาผลบวกของระยะทางฯ จากจุดใด ๆ ที่อยู่ทั้งภายในหรือภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ทั้งนี้สูตรการหาผลบวกของระยะทางฯ ที่สร้างขึ้นสามารถประยุกต์ใช้กับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมถึงสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งกล่าวไว้ในทฤษฎีบทคลาสสิก นอกจากนี้ Arthur ได้เสนอทฤษฎีบทภาคขยายของบทตั้ง ซึ่งให้สูตรการหาผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยมปกติ (regular polygon) อีกด้วย

สัญกรณ์เรขาคณิตเบื้องต้นที่อ้างถึงในบทความนี้เป็นดังนี้ $\Delta\mathrm{ABC}$ แทน รูปสามเหลี่ยม ABC แบบใดแบบหนึ่งตามที่ระบุ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุด A เป็นจุดเริ่มต้นและจุด B เป็นจุดสิ้นสุด แทนด้วย $\overline{\mathrm{AB}}$ โดย AB แทนความยาวของ $\overline{\mathrm{AB}}$ ส่วนสัญกรณ์ $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ แทนเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B และสัญกรณ์ ACB แทน ขนาดของมุมที่มี $\overline{\mathrm{CA}}$ และ $\overline{\mathrm{CB}}$ เป็นแขนของมุม

ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั้นเป็นค่าคงตัว ทั้งนี้เมื่อวัดระยะทางดังกล่าวนั้นด้วยไม้บรรทัดจะมีค่าประมาณใกล้เคียงกับความสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั้นอีกด้วย ดังนี้

กำหนดให้ $\Delta\mathrm{ABC}$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ด้านประกอบของรูปสามเหลี่ยมแต่ละด้านยาวด้านละ 4.5 หน่วย และกำหนดให้ $\mathrm{P}_1$ และ $\mathrm{P}_2$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ภายใน $\Delta\mathrm{ABC}$ ดังรูปที่ 1 (ด้านซ้ายมือ)

ระยะทางจากจุด $\mathrm{P}_1$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบของ $\Delta\mathrm{ABC}$ ทั้ง 3 ด้านเมื่อวัดด้วยไม้บรรทัดเป็นดังนี้ ระยะทางจากจุด $\mathrm{P}_1$ ไปตั้งฉากกับ $\overline{\mathrm{P_1D_1}}$ , $\overline{\mathrm{P_1E_1}}$ และ $\overline{\mathrm{P_1F_1}}$ มีค่าเท่ากับ 1.4 หน่วย 1.7 หน่วย และ 0.7 หน่วย ตามลำดับ ดังนั้น ผลบวกของระยะทางเท่ากับ 1.4 + 1.7 + 0.7 $=$ 3.8 หน่วย ในทำนองเดียวกันนี้ ผลบวกของระยะทางจากจุด $\mathrm{P}_2$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบของ $\Delta\mathrm{ABC}$ ทั้ง 3 ด้านเมื่อวัดด้วยไม้บรรทัดมีค่าเท่ากับ 3.8 หน่วย เช่นเดียวกัน



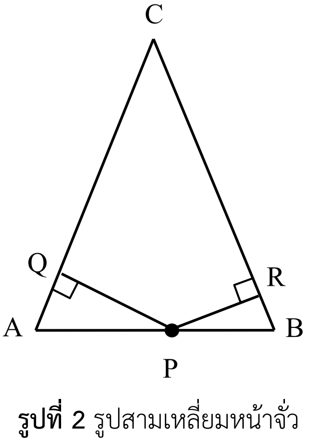

**รูปที่ 1** (ด้านซ้ายมือ) $\Delta ABC$ และระยะทางจากจุด $P_1$ ($P_2$) ไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้ง 3 ด้าน, (ด้านขวามือ) ส่วนสูงจากการวัดด้วยไม้บรรทัดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $ABC$

เมื่อวัดด้วยไม้บรรทัด ระยะทางจากจุด $P_1$ หรือ $P_2$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้ง 3 ด้านของ $\Delta ABC$ เป็นค่าคงตัว ซึ่งมีค่าประมาณ 3.8 หน่วย ค่าคงตัวนี้มีค่าเท่ากับส่วนสูงของ $\Delta ABC$ ซึ่งมีค่า 3.8 หน่วย จากการวัดด้วยไม้บรรทัดเช่นกัน ดังรูปที่ 1 ด้านขวามือ

## 2. บทตั้งหลัก

Arthur (2009) ได้เสนอบทตั้งภาคขยายของทฤษฎีบทคลาสสิก บทตั้งนี้แสดงให้เห็นว่า ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ซึ่งอยู่บนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปตั้งฉากกับด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นค่าคงตัว ทั้งนี้จะสามารถหาระยะทางดังกล่าวในกรณีของสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยอาศัยบทตั้งนี้ได้เช่นกัน ในบทความนี้ได้ปรับปรุงบทตั้งใหม่เพื่อความชัดเจนดังนี้

**บทตั้ง** กำหนดให้ $\Delta ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{AB}$ เป็นฐาน และ $P$ เป็นจุดใด ๆ ซึ่งอยู่บน $\overline{AB}$ ถ้า $PQ$ และ $PR$ แทนระยะทางจาก $P$ ไปตั้งฉากกับ $\overline{CA}$ และ $\overline{CB}$ ตามลำดับ (ดังรูปที่ 2) แล้ว $PQ+PR$ เป็นค่าคงตัว และ $PQ+PR = AB(\sin CAB)$




**รูปที่ 2** รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จากบทตั้งกล่าวได้ว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วใด ๆ ไม่ว่า $P$ จะอยู่บน $\overline{AB}$ ที่จุดใดก็ตามผลบวกของ $PQ+PR$ เป็นค่าคงตัวเสมอ

ถึงแม้ว่าจะสามารถหาผลบวกของระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมได้โดยการวัดด้วยไม้บรรทัด อย่างไรก็ตามบทตั้งนี้ได้ให้สูตรการหาผลบวกของระยะทางดังกล่าวได้จากผลคูณของความยาวของ $\overline{AB}$ กับฟังก์ชันไซน์ของ $CAB$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ $\Delta ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยด้านประกอบของ $\Delta ABC$ ทั้ง 3 ด้านมีค่าดังนี้ $AB = 3.3$ หน่วย $AC = 4.3$ หน่วย และ $BC = 4.3$ หน่วย

กำหนดให้ $P$ เป็นจุดที่อยู่บน $\overline{AB}$ โดยห่างจากมุม $A$ เป็นระยะทาง 2 หน่วย เมื่อสร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบมุม $C$ เช่นเดียวกับรูปที่ 2 เมื่อประมาณจากการวัดด้วยไม้บรรทัดได้ว่า $PQ = 1.9$ หน่วย และ $PR = 1.2$ หน่วย

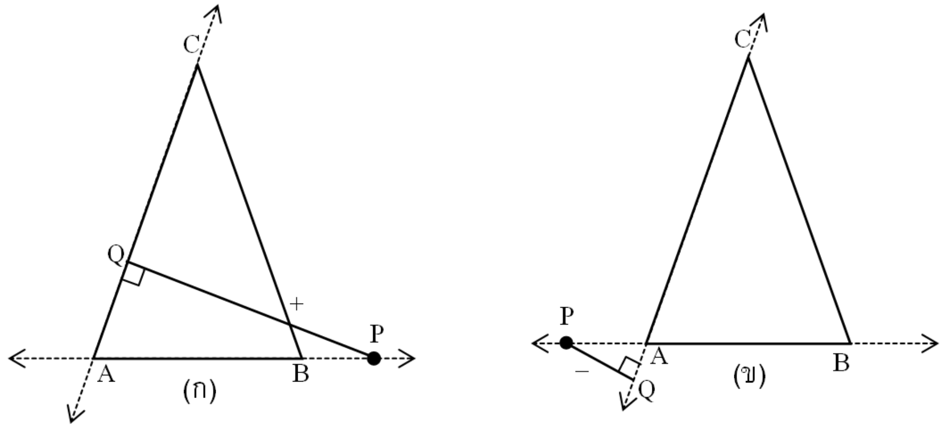
ดังนั้น $PQ+PR = 1.9+1.2 = 3.1$ หน่วย นอกจากนี้ จากการวัดได้ว่า $CAB = 70°$ โดยบทตั้งได้ว่า $PQ + PR = AB(\sin CAB) = 3.3(\sin 70°) = 3.3(0.94) = 3.1$ หน่วย

นั่นคือ ผลบวกของระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบมุมยอดทั้งสองของ $\Delta ABC$ ไม่ว่าจะวัดด้วยไม้บรรทัดหรือใช้สูตรก็ตามมีค่าเท่ากัน

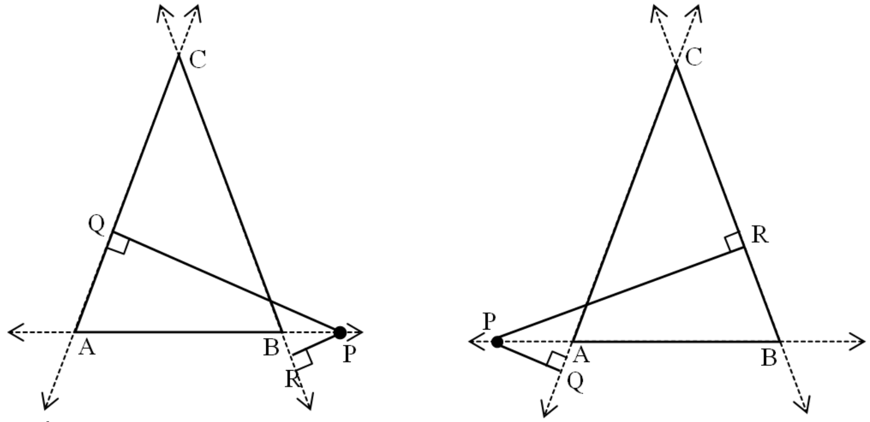
ในบทตั้งนี้ได้พิจารณาหาผลบวกของระยะทางจากจุด $P$ ใด ๆ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดย $P$ อยู่บนฐานของรูปสามเหลี่ยมนั้น อย่างไรก็ตามเราอาจหาผลบวกของระยะทางดังกล่าวเมื่อ $P$ อยู่ในตำแหน่งอื่นได้ ทั้งนี้มีเกณฑ์การพิจารณาเครื่องหมายของระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับแต่ละด้านประกอบมุมยอด $\Delta ABC$ เพื่อหาผลบวกของระยะทาง ดังนี้

กำหนดให้ $\Delta ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{AB}$ เป็นฐานและสมมติให้ $P$ เป็นจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงที่ขยายออกจากด้านซ้ายหรือขวาบน $\overline{AB}$ เมื่อสร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบมุมยอดของ $\Delta ABC$ ด้านใดด้านหนึ่งที่จุด $Q$ (และอีกจุดหนึ่งคือ $R$) ในรูปที่ 2 เส้นตรงของด้านประกอบมุมยอดของ $\Delta ABC$ ด้านนั้นจะแบ่งระนาบออกเป็น 2 ส่วน คือ ระนาบส่วนที่บรรจุ $\Delta ABC$ และระนาบส่วนที่ไม่บรรจุ $\Delta ABC$ ถ้า $\overline{PQ}$ อยู่ในระนาบส่วนที่บรรจุ $\Delta ABC$ แล้วจะนำ $PQ$ (ระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AC}$ ที่จุด $Q$) ไปบวก ดังรูปที่ 3 (ก) และจะนำไปลบถ้าอยู่ในระนาบตรงกันข้าม ดังรูปที่ 3 (ข)

ในทำนองเดียวกันสร้าง $\overline{PR}$ ซึ่งเกิดจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับ $\overline{CB}$ แล้ว $\overleftrightarrow{CB}$ แบ่งระนาบออกเป็น 2 ส่วนเช่นเดียวกัน ถ้าส่วนของเส้นตรง $\overline{PR}$ หรือ $\overline{PQ}$ อยู่ในระนาบส่วนที่บรรจุ $\Delta ABC$ จะนำระยะทางของส่วนของเส้นตรงนั้นไปบวก และจะนำไปลบ ถ้าส่วนของเส้นตรงนั้นอยู่ในระนาบส่วนที่ไม่บรรจุ $\Delta ABC$ ดังรูปที่ 4




**รูปที่ 3** $\overleftrightarrow{AC}$ แบ่งครึ่งระนาบของ $\Delta ABC$




**รูปที่ 4** (ก) $PR$ นำไปลบ และ $PQ$ นำไปบวก, (ข) $PR$ นำไปบวก และ $PQ$ นำไปลบ

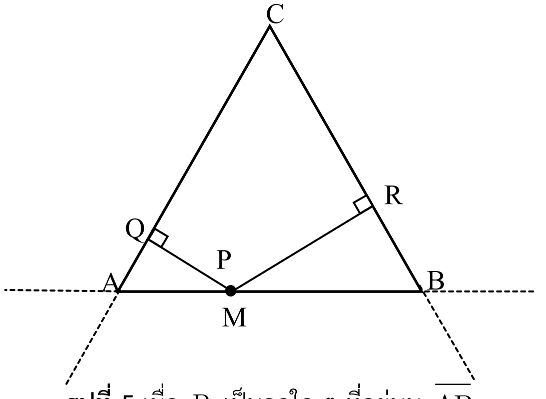
บทตั้งดังกล่าวนี้เป็นภาคขยายของทฤษฎีบทคลาสสิก กล่าวคือ สามารถหาผลบวกของระยะทางของจุดที่อยู่ ณ ตำแหน่งใด ๆ ทั้งภายในหรือภายนอกรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าได้จากบทตั้งพร้อมกับเกณฑ์การพิจารณาเครื่องหมายของระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบของรูปสามเหลี่ยม ยิ่งไปกว่านั้นสำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าใด ๆ ในกรณีที่จุด $P$ เป็นจุดที่อยู่บนฐานของรูปสามเหลี่ยมแล้ว โดยบทตั้งได้ว่า ผลบวกของระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับด้านทั้งสามเป็นค่าคงตัว ซึ่งค่าคงตัวนี้มีค่าเท่ากับส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั่นเอง

อย่างไรก็ตามการหาความสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยการประยุกต์ใช้บทตั้งขึ้นกับตำแหน่งของจุด $P$ ซึ่งจำแนกได้เป็น 4 กรณี ได้แก่ (1) $P$ อยู่บนฐานของ $\Delta ABC$ (2) $P$ เป็นจุดภายใน $\Delta ABC$ โดยอยู่เหนือฐานของ $\Delta ABC$ (3) $P$ เป็นจุดภายนอก $\Delta ABC$ โดยอยู่ใต้ฐานของ $\Delta ABC$ และ (4) $P$ เป็นจุดที่อยู่ภายนอก $\Delta ABC$ และอยู่ในแนวเส้นตรงที่ลากจากมุมไปตั้งฉากกับฐานของ $\Delta ABC$

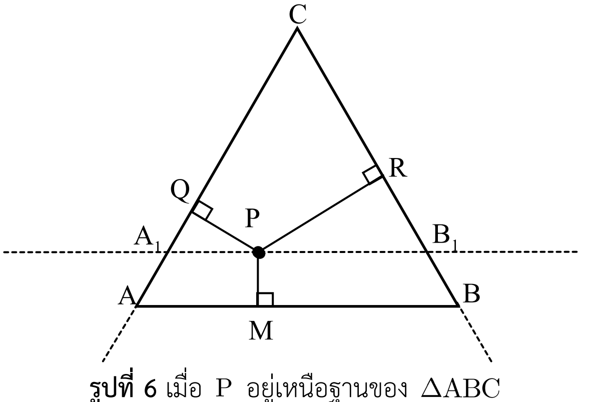
การประยุกต์ใช้บทตั้งพร้อมกับเกณฑ์การพิจารณาเครื่องหมายดังกล่าวข้างต้น เพื่อหาความสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้ง 4 กรณี มีรายละเอียดดังนี้

**กรณี 1** $\Delta ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยมี $\overline{AB}$ เป็นฐาน สมมติให้ $P$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บน $\overline{AB}$ ดังรูปที่ 5

เมื่อสร้างส่วนของเส้นตรงจาก $P$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบของรูปสามเหลี่ยมด้านที่เหลือ ถ้า $PQ$ และ $PR$ แทน ระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับ $\overline{CA}$ และ $\overline{CB}$ ตามลำดับ แล้วโดยบทตั้งได้ว่า $PQ+PR$ เป็นค่าคงตัว นอกจากนี้ ได้ว่า $PQ+PR$ เท่ากับส่วนสูงของ $\Delta ABC$




**รูปที่ 5** เมื่อ $P$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บน $\overline{AB}$




**รูปที่ 6** เมื่อ $P$ อยู่เหนือฐานของ $\Delta ABC$

**กรณี 2** เมื่อ $P$ เป็นจุดภายใน $\Delta ABC$ ซึ่งจุด $P$ อยู่เหนือฐานของ $\Delta ABC$ ดังรูปที่ 6

เมื่อสร้าง $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ ผ่าน $P$ โดยขนานกับฐานของ $\Delta ABC$ ทำให้ได้ $\Delta A_1B_1C$ ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเช่นกัน

เพื่อหาความสูงของ $\Delta ABC$ จึงสร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบของ $\Delta ABC$ โดยกำหนดให้ $PQ$ และ $PR$ แทนระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉาก $\overline{CA}$ และ $\overline{CB}$ ตามลำดับ

เพราะว่า $\overline{PQ}$ อยู่ในระนาบที่บรรจุ $\Delta ABC$ ซึ่งเกิดจากการแบ่งระนาบด้วย $\overleftrightarrow{CA}$ ดังนั้นจึงนำ $PQ$ ไปบวก ในทำนองเดียวกันนี้ $\overline{PR}$ อยู่ในระนาบที่บรรจุ $\Delta ABC$ ซึ่งเกิดจากการแบ่งระนาบด้วย $\overleftrightarrow{CB}$ ดังนั้นจึงนำ $PR$ ไปบวก

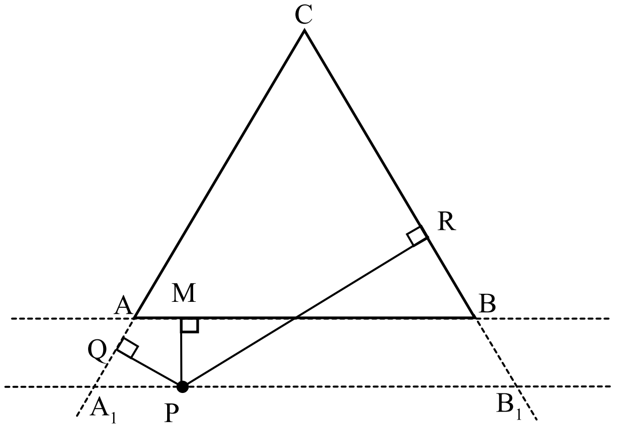
โดยบทตั้ง ได้ว่า ส่วนสูงของ $\Delta A_1B_1C = PQ + PR$

ดังนั้นส่วนสูงของ $\Delta ABC = PQ + PR + PM$

**กรณี 3** เมื่อ $P$ เป็นจุดภายนอก $\Delta ABC$ ซึ่งอยู่ใต้ฐานของ $\Delta ABC$ ดังรูปที่ 7

ในกรณีนี้ $P$ เป็นจุดที่อยู่ใต้ฐานของ $\Delta ABC$ ในทำนองเดียวกันกับกรณี 2 สร้าง $\overline{A_1B_1}$ ผ่านจุด $P$ โดยขนานกับฐานของ $\Delta ABC$ ทำให้ได้ $\Delta A_1B_1C$

ต่อไปสร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้งสามของ $\Delta ABC$ โดยเมื่อกำหนดให้ $PQ$, $PR$ และ $PM$ แทนระยะทางจากจุด $P$ ไปตั้งฉากกับ $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ

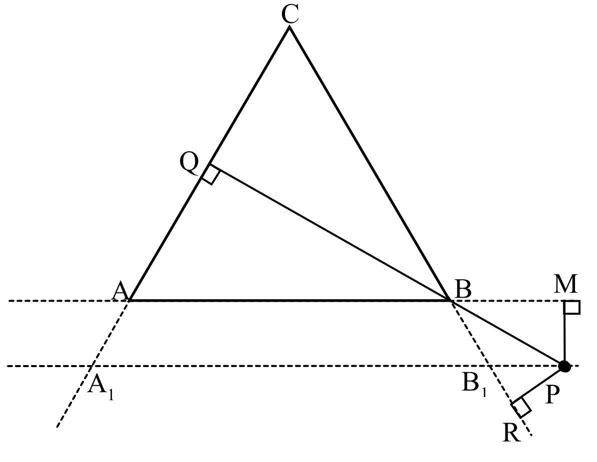



**รูปที่ 7** เมื่อ $\mathrm{P}$ อยู่ใต้ฐานของ $\Delta\mathrm{ABC}$

เพราะว่า $\overline{\mathrm{PQ}}$ และ $\overline{\mathrm{PR}}$ อยู่ในระนาบส่วนที่บรรจุ $\Delta\mathrm{ABC}$ ซึ่งเกิดจากการแบ่งระนาบด้วย $\overleftrightarrow{\mathrm{CA}}$ และ $\overleftrightarrow{\mathrm{CB}}$ ตามลำดับ ดังนั้นจึงนำ $\mathrm{PQ}$ และ $\mathrm{PR}$ ไปบวก

อย่างไรก็ตาม $\mathrm{PM}$ ไม่อยู่ในระนาบส่วนที่บรรจุ $\Delta\mathrm{ABC}$ ซึ่งเกิดจากการแบ่งระนาบด้วย $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ ดังนั้นจึงนำ $\mathrm{PM}$ ไปลบ โดยบทตั้ง ได้ว่า ส่วนสูงของ $\Delta\mathrm{A_1B_1C} = \mathrm{PQ}+\mathrm{PR}$ ดังนั้น ส่วนสูงของ $\Delta\mathrm{ABC} = \mathrm{PQ}+\mathrm{PR}-\mathrm{PM}$

**กรณี 4** เมื่อ $\mathrm{P}$ เป็นจุดที่อยู่ภายนอกและอยู่ในแนวเส้นตรงที่ลากจากมุมไปตั้งฉากกับฐานของ $\Delta\mathrm{ABC}$ ดังรูปที่ 8




**รูปที่ 8** เมื่อ $\mathrm{P}$ อยู่ภายนอกและอยู่ในตำแหน่งตรงกันข้ามกับมุมใดมุมหนึ่งของ $\Delta\mathrm{ABC}$

สำหรับกรณีนี้ $\mathrm{P}$ เป็นจุดซึ่งอยู่ภายนอกรูปสามเหลี่ยมและอยู่ในตำแหน่งตรงกันข้ามกับมุมใดมุมหนึ่งของ $\Delta\mathrm{ABC}$ และในทำนองเดียวกันกับกรณี 2 และกรณี 3 สร้าง $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$ ผ่านจุด $\mathrm{P}$ โดยขนานกับฐานของ $\Delta\mathrm{ABC}$

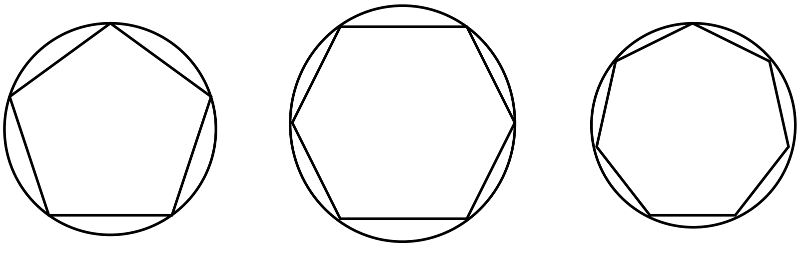
เมื่อสร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด P ไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้งสามด้านของ $\Delta ABC$ โดยให้ PQ, PR และ PM แทนระยะทางจากจุด P ไปตั้งฉากกับ $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ

เพราะว่า $\overline{PQ}$ อยู่ในระนาบส่วนที่บรรจุ $\Delta ABC$ ซึ่งเกิดจากการแบ่งระนาบด้วย $\overleftrightarrow{CA}$ ดังนั้นจึงนำ PQ ไปบวก และสำหรับ $\overline{PR}$ และ $\overline{PM}$ ไม่อยู่ในระนาบส่วนที่บรรจุ $\Delta ABC$ ซึ่งเกิดจากการแบ่งระนาบด้วย $\overleftrightarrow{CB}$ และ $\overleftrightarrow{AB}$ ตามลำดับ ดังนั้นจึงนำ PR และ PM ไปลบ โดยบทตั้ง ได้ว่า ส่วนสูงของ $\Delta ABC = PQ - PR - PM$

## 3. ทฤษฎีบทภาคขยาย

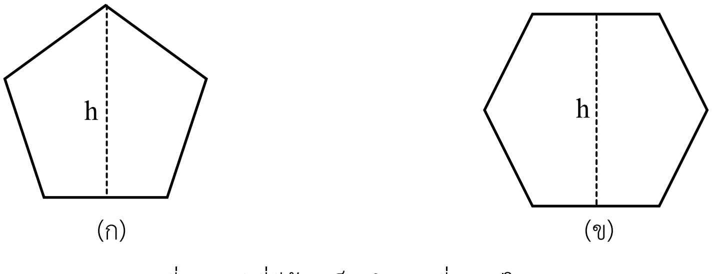
นิยามของรูปหลายเหลี่ยมปกติและวิธีการหาส่วนสูงของรูปหลายเหลี่ยมปกติต่อไปนี้ จะเกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทภาคขยายของบทตั้งที่จะกล่าวต่อไป

รูปหลายเหลี่ยมปกติ หมายถึง รูปหลายเหลี่ยมที่จุดยอดมีมุมขนาดเท่ากันทุกมุมและทุกมุมอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบรูปหลายเหลี่ยมรูปนั้น รูปที่ 9 แสดงตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีจุดยอดมุมจำนวน 5, 6 และ 7 ตามลำดับจากด้านซ้ายมือไปยังด้านขวามือ



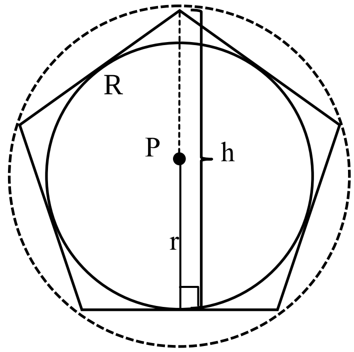
**รูปที่ 9** รูปหลายเหลี่ยมปกติ

ส่วนสูงของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้านเป็นจำนวนคี่ คือระยะทางของส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดใด ๆ ไปตั้งฉากกับด้านตรงข้าม ส่วนสูงของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้านเป็นจำนวนคู่ คือระยะทางของส่วนของเส้นตรงจากด้านใดด้านหนึ่งไปตั้งฉากกับด้านตรงข้ามที่เป็นด้านที่ขนานกับด้านนั้น ดังรูปที่ 10



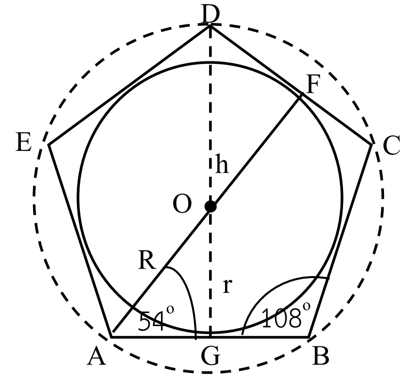

**รูปที่ 10** ส่วนสูงของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้านเป็นจำนวนคี่และคู่ในรูป (ก) และ (ข) ตามลำดับ

ถ้าทราบค่ารัศมีของวงกลมแนบในและรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูปหลายเหลี่ยมปกติ ซึ่งแทนด้วย r และ R ตามลำดับ แล้วส่วนสูงของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้านเป็นจำนวนคี่ ซึ่งแทนด้วย h คำนวณได้จาก $r + R$ ดังรูปที่ 11




**รูปที่ 11** ส่วนสูงของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้านเป็นจำนวนคี่

ในกรณีที่ทราบความยาวด้านของรูปหลายเหลี่ยมปกติ จะสามารถหาส่วนสูงของรูปหลายเหลี่ยมปกติได้ ตัวอย่างเช่น สมมติให้ $\mathrm{ABCDE}$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมเท่ามุมเท่า แต่ละด้านมีความยาวด้านละ 4 หน่วย ดังรูปที่ 12




**รูปที่ 12** รูปหลายเหลี่ยมปกติ $\mathrm{ABCDE}$

จากจุด $\mathrm{D}$ ลากส่วนเส้นตรงไปตั้งฉากกับ $\overline{\mathrm{AB}}$ ที่จุด $\mathrm{G}$ ส่วนของเส้นตรง $\overline{\mathrm{DG}}$ ที่สร้างขึ้นนี้ผ่านจุด $\mathrm{O}$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบทเรขาคณิต จึงได้ว่าจุด $\mathrm{G}$ แบ่งครึ่ง $\overline{\mathrm{AB}}$ เป็นผลให้ $\mathrm{AG}$ = 2 หน่วย และจากรูปที่ 12 ได้ว่า $\mathrm{OA} = \mathrm{R}$ หน่วย และ $\mathrm{OG} = \mathrm{r}$ หน่วย

เมื่อพิจารณา $\Delta\mathrm{AGO}$ ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

หาส่วนสูงของรูปห้าเหลี่ยม $\mathrm{ABCDE}$ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติได้ดังนี้ หา $\mathrm{r}$ ได้จาก $\tan 54^\circ = \dfrac{\mathrm{r}}{2}$ และหา $\mathrm{R}$ ได้จาก $\sin 54^\circ = \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}$ จึงได้ $\mathrm{r} = 2\tan 54^\circ$ และ $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{r}}{\sin 54^\circ}$ ดังนั้น $\mathrm{R} = \dfrac{2\tan 54^\circ}{\sin 54^\circ}$ เพราะฉะนั้น $\mathrm{h} = \mathrm{r} + \mathrm{R} = 2\tan 54^\circ + \dfrac{2\tan 54^\circ}{\sin 54^\circ} = 6.15$ หน่วย

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทภาคขยายของบทตั้งเมื่อพิจารณารูปหลายเหลี่ยมปกติใด ๆ

**ทฤษฎีบท** (Arthur, 2009) สำหรับรูปหลายเหลี่ยมปกติใด ๆ ที่มี $\mathrm{n}$ ด้านและ $\mathrm{h}$ แทนความสูงของรูปหลายเหลี่ยมปกติ ผลบวกของระยะทางจากจุดร่วมระนาบใด ๆ ไปตั้งฉากกับแต่ละด้านของรูปหลายเหลี่ยมปกติซึ่งแทนด้วย $\mathrm{S}$ และหาได้จากสูตรต่อไปนี้

(ก) ถ้า $\mathrm{n}$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\mathrm{S}=\dfrac{\mathrm{nh}\cos\left(\dfrac{\pi}{\mathrm{n}}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{\mathrm{n}}\right)+1}$

(ข) ถ้า $\mathrm{n}$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\mathrm{S}=\dfrac{1}{2}\mathrm{nh}$

ทั้งนี้ ถ้าไม่สามารถสร้างส่วนของเส้นตรงจากจุดร่วมระนาบไปตั้งฉากกับด้านใดด้านหนึ่งได้ให้สร้างส่วนของเส้นตรงที่ต่อขยายจากด้านด้านนั้น

เมื่อพิจารณา $\Delta\mathrm{ABC}$ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าในรูปที่ 1 โดยมีความสูง $\mathrm{h} = 3.8$ หน่วย และมีด้านเป็นจำนวนคี่ โดยทฤษฎีบทจึงได้

$$\mathrm{S} = \frac{3(3.8)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+1} = \frac{3(3.8)\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{2}\right)+1} = \frac{5.7}{1.5} = 3.8 \text{ หน่วย}$$

ดังนั้น ผลบวกของระยะทางจากจุด $\mathrm{P}$ ใด ๆ ไปยังด้านทั้งสามของ $\Delta\mathrm{ABC}$ มีค่าเท่ากับ 3.8 หน่วย ซึ่งมีค่าเท่ากับผลบวกของระยะทางฯ ที่หาได้จากบทตั้งข้างต้น

ต่อไปนี้เป็นการหาผลบวกของระยะทางจากจุด $\mathrm{P}$ ใด ๆ ไปยังด้านแต่ละด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งมีด้านเป็นจำนวนคี่ และรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งมีด้านเป็นจำนวนคู่ ดังรูปที่ 13 และรูปที่ 14 ตามลำดับ ดังนี้

กำหนดให้ $\mathrm{ABCDE}$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ตามรูปที่ 13 โดยที่ $\mathrm{h} = 5.2$ หน่วย และ $\mathrm{P}$ เป็นจุดใด ๆ สร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด $\mathrm{P}$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้งหมด

จากการวัดด้วยไม้บรรทัดได้ว่า $\mathrm{PQ} = 2.7$ หน่วย $\mathrm{PR} = 1.6$ หน่วย $\mathrm{PS} = 1.6$ หน่วย $\mathrm{PT} = 2.7$ หน่วย และ $\mathrm{PU} = 3.4$ หน่วย ดังนั้น ผลบวกของระยะทางจากจุด $\mathrm{P}$ ไปยังด้านทั้ง 5 ด้าน มีค่าเท่ากับ

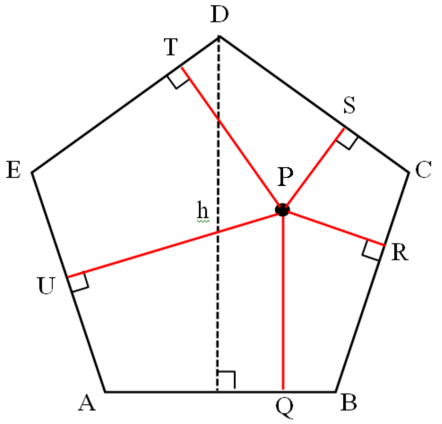
$$\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}+\mathrm{PS}+\mathrm{PT}+\mathrm{PU} = 2.7 + 1.6 + 1.5 + 2.6 + 3.2 = 11.6 \text{ หน่วย}$$

และเมื่อคำนวณจากสูตรในทฤษฎีบทนี้ ได้ว่า

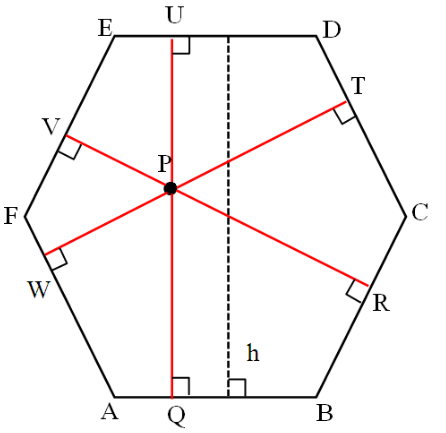
$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{nh}\cos\left(\dfrac{\pi}{\mathrm{n}}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+1}=\frac{5(5.2)\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+1}=\frac{21.034}{1.809}=11.6 \text{ หน่วย}$$

ดังนั้น ผลบวกของระยะทางจากจุด $\mathrm{P}$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้ง 5 ด้านเมื่อวัดด้วยไม้บรรทัดและใช้สูตรข้อ (ก) ในทฤษฎีบทมีค่าเท่ากัน

กำหนดให้ $\mathrm{ABCDEF}$ เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ตามรูปที่ 14 โดยที่ $\mathrm{h} = 5.3$ หน่วย เมื่อกำหนดให้ $\mathrm{P}$ เป็นจุดใด ๆ สร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด $\mathrm{P}$ ไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้งหมด




**รูปที่ 13** รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า




**รูปที่ 14** รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

จากการวัดด้วยไม้บรรทัดได้ว่า $\mathrm{PQ} = 3.1$ หน่วย $\mathrm{PR} = 3.3$ หน่วย $\mathrm{PT} = 3.0$ หน่วย $\mathrm{PU} = 2.2$ หน่วย $\mathrm{PV} = 1.9$ หน่วย และ $\mathrm{PW} = 2.3$ หน่วย ดังนั้น ผลบวกของระยะทางจากจุด $\mathrm{P}$ ไปยังด้านทั้ง 6 ด้านมีค่าเท่ากับ

$$\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}+\mathrm{PT}+\mathrm{PU}+\mathrm{PV}+\mathrm{PW} = 3.1 + 3.3 + 3.0 + 2.2 + 1.9 + 2.3 = 15.9 \text{ หน่วย}$$

เมื่อคำนวณผลบวกของระยะทางฯ โดยใช้สูตรในทฤษฎีบทนี้ ได้ว่า

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{nh} = \frac{1}{2}(6)(5.3) = 15.9 \text{ หน่วย}$$

ดังนั้น ผลบวกของระยะทางจากจุด $\mathrm{P}$ ไปยังด้านประกอบทั้ง 6 ด้านเมื่อวัดโดยไม้บรรทัดและใช้สูตรข้อ (ข) ในทฤษฎีบทมีค่าเท่ากัน นอกจากนี้ได้ว่า ผลบวกของระยะทางจากจุด $\mathrm{P}$ ไปตั้งฉากกับด้านทั้งหมดของรูปหลายเหลี่ยมปกติทั้งในรูปที่ 13 และรูปที่ 14 เป็นค่าคงตัวอีกด้วย

## 4. บทสรุป

ทฤษฎีบทคลาสสิกบทหนึ่ง กล่าวว่า ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไปตั้งฉากกับด้านประกอบทั้ง 3 ด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นค่าคงตัว ในบทความวิชาการฉบับนี้ ได้อภิปรายนำเสนอบทตั้งภาคขยายของทฤษฎีบทคลาสสิกนี้ โดยสามารถหาระยะทางจากจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในและภายนอกไปยังด้านประกอบของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า นอกจากนี้ได้กล่าวถึง ทฤษฎีบทภาคขยายของทฤษฎีบทคลาสสิก ซึ่งให้สูตรการหาระยะทางดังกล่าวสำหรับสำหรับรูปหลายเหลี่ยมปกติใด ๆ

## 5. เอกสารอ้างอิงและประกอบการเรียบเรียง

Arthur, L. K. (2009). “Extending a Classical Geometry Problem”, Mathematics Teacher 102(8): 634-638.

Courant, R. and Robbins, H. (1941). What is Mathematics? New York. Oxford: Oxford University Press.

Jones, D. L. and Shaw, K. L. (1988). “Reopening the Equilateral Triangle Problem: What Happens If …”. Mathematics Teacher 81(8): 634-638.

Larry, C. and Jeremy, K. (2006). “The Surfer Problem: A ‘Whys’ Approach.”. Mathematics Teacher 100(1): 14-19.

❑❑❑❑❑