ว.วิทย. มข. 43(1) 28-38 (2558) KKU Sci. J. 43(1) 28-38 (2015)

สมบัติและตัวอย่างที่สำคัญของเมทริกซ์ยูนิแทรี

Significant Properties and Examples of Unitary Matrices

ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม[1] และ อานนท์ พลอยมุกดา[1]*

บทคัดย่อ

บทความวิชาการนี้นำเสนอสมบัติและตัวอย่างที่สำคัญของเมทริกซ์ยูนิแทรี โดยแสดงเงื่อนไขต่าง ๆ ที่สมมูลกันของเมทริกซ์ยูนิแทรี ซึ่งประกอบด้วยเงื่อนไขทางพีชคณิต เงื่อนไขที่เกี่ยวกับภาวะเชิงตั้งฉาก ผลคูณภายใน นอร์ม และค่าลักษณะเฉพาะ เราพิจารณากรุปของเมทริกซ์ยูนิแทรีและกรุปย่อยต่าง ๆ ที่สำคัญ ตัวอย่างของเมทริกซ์ยูนิแทรีที่มีการใช้งานจริงได้แก่ การหมุน การสะท้อน การสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์ และเมทริกซ์ที่แทนประตูควอนตัม

ABSTRACT

This article surveys significant properties and examples of unitary matrices. Various characterizations of unitary matrices, involving algebraic properties and properties related to orthogonality, inner products, norms and eigenvalues, are provided. We consider groups of unitary matrices and their important subgroups. Practical examples of unitary matrices are rotations, reflections, Householder reflections and matrices which represent quantum gates.

คำสำคัญ: เมทริกซ์ยูนิแทรี ผลคูณภายใน นอร์ม การสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์

Keywords: Unitary matrix, Inner product, Norm, Householder reflection

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ถ.ฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

*Corresponding Author, E-mail: kcpattra@kmitl.ac.th

บทนำ

เมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อนจะเรียกว่า**เมทริกซ์ยูนิแทรี** (unitary matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^*A = I$ โดย $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ เมทริกซ์ยูนิแทรีขนาด 1×1 คือ จำนวนเชิงซ้อนที่มีขนาด (ค่าสัมบูรณ์) เป็น 1 ดังนั้นแนวคิดของเมทริกซ์ยูนิแทรีจึงเป็นการขยายแนวคิดของจำนวนเชิงซ้อนที่มีขนาดเป็น 1 ไปสู่มิติใด ๆ สมบัติของเมทริกซ์ยูนิแทรีสามารถศึกษาได้จาก (DePrima and Johnson, 1974; Furuta, 2001; Horn, 1990; Zhang, 2011)

ในบทความวิชาการนี้ เรารวบรวมสมบัติต่าง ๆ ที่สำคัญของเมทริกซ์ยูนิแทรีจากงานวิจัยและเอกสารต่างๆ โดยแสดงเงื่อนไขที่สมมูลกันสำหรับเมทริกซ์ยูนิแทรีจำนวนทั้งสิ้น 16 เงื่อนไข ซึ่งประกอบด้วยเงื่อนไขทางพีชคณิต เงื่อนไขที่เกี่ยวกับภาวะเชิงตั้งฉาก (orthogonality) เงื่อนไขที่เกี่ยวกับนอร์มและผลคูณภายใน และเงื่อนไขที่เกี่ยวกับค่าลักษณะเฉพาะ วิธีพิสูจน์การสมมูลกันของเงื่อนไขเหล่านี้แตกต่างจากเอกสารต้นฉบับ

บทความนี้ยังพิจารณาโครงสร้างเชิงพีชคณิตของเซตของเมทริกซ์ยูนิแทรี โดยเซตดังกล่าวเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุปเชิงเส้นทั่วไป (general linear group) เราพิจารณากรุปของเมทริกซ์ต่างๆที่เกี่ยวข้อง เช่น กรุปของเมทริกซ์เรียงสับเปลี่ยนและกรุปของเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก ตัวอย่างที่สำคัญของเมทริกซ์ยูนิแทรี ได้แก่ การสะท้อนและการหมุน ซึ่งมีการประยุกต์ในทางเรขาคณิตและคอมพิวเตอร์กราฟิก การแปลงเชิงเส้นแบบหนึ่งที่เรียกว่า การสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์ (Householder reflection) เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรีที่มีบทบาทสำคัญในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข (numerical linear algebra) (Trefethen and Bau III, 1997) นอกจากนั้นเราได้ให้ตัวอย่างของเมทริกซ์ยูนิแทรีที่มีการประยุกต์ในกลศาสตร์ควอนตัม

ความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์

สำหรับ $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ หรือ $\mathbb{R}$ ให้ $M_{m,n}(\mathbb{F})$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่มีสมาชิกอยู่ใน $\mathbb{F}$ เพื่อความสะดวกเราให้ $M_n(\mathbb{F})$ แทน $M_{n,n}(\mathbb{F})$ เราเขียนแทนเซตของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ $A \in M_n(\mathbb{C})$ ด้วย $\sigma(A)$ เราเขียน $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ แทนเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเป็น $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ตามลำดับ

บทนิยามที่ 1 ผลคูณภายใน (inner product) ของ $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, $y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]^T \in \mathbb{C}^n$ นิยามโดย

$$\langle x, y \rangle = y^* x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

เรากล่าวว่า x **ตั้งฉาก**กับ y ก็ต่อเมื่อ $\langle x, y \rangle = 0$ เรานิยาม**นอร์ม**ของ x โดย $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

บทนิยามที่ 2 ผลคูณภายในของ $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$, $y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n] \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ นิยามโดย

$$\langle x, y \rangle = x y^* = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

เรากล่าวว่า x **ตั้งฉาก**กับ y ก็ต่อเมื่อ $\langle x, y \rangle = 0$ เรานิยาม**นอร์ม**ของ x โดย $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

บทนิยามที่ 3 เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set) คือ เซตที่แต่ละสมาชิกตั้งฉากกับสมาชิกอื่นๆ และ**เซตเชิงตั้งฉากปรกติ** (orthonormal set) คือ เซตเชิงตั้งฉากที่แต่ละสมาชิกมีนอร์มเป็น 1

บทนิยามที่ 4 นอร์มของยุคลิด (Euclidean norm) ของ $A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{C})$ นิยามโดย $\|A\|=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

บทนิยามที่ 5 เมทริกซ์ $A\in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่า **เมทริกซ์ปรกติ** (normal matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^*A=AA^*$ เมทริกซ์ $A\in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่า **เมทริกซ์ยูนิแทรี** ก็ต่อเมื่อ $A^*A=I$ และเมทริกซ์ $A\in M_n(\mathbb{R})$ จะเรียกว่า **เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก** (orthogonal matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^TA=I$

ทฤษฎีบทที่ 1 ทฤษฎีบทการทำเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมของเชอร์ (Schur's triangularization theorem) สำหรับแต่ละ $A\in M_n(\mathbb{C})$ จะมีเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน T และเมทริกซ์ยูนิแทรี U ที่ทำให้ $U^*AU=T$ โดยสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ T คือค่าลักษณะเฉพาะของ A

ทฤษฎีบทที่ 2 ทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์ปรกติ (spectral theorem for normal matrices) เมทริกซ์ $A\in M_n(\mathbb{C})$ ซึ่ง $\sigma(A)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ จะเป็นเมทริกซ์ปรกติก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ยูนิแทรี U ที่ทำให้ $U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

เงื่อนไขที่สมมูลกันของเมทริกซ์ยูนิแทรี

หัวข้อนี้กล่าวถึงลักษณะสมบัติของเมทริกซ์ยูนิแทรี โดยแสดงเงื่อนไขต่างๆ 16 เงื่อนไขที่สมมูลกัน นอกจากนี้เราได้ว่าเมทริกซ์เชิงตั้งฉากมีสมบัติการคงสภาพมุม

ทฤษฎีบทที่ 3 ให้ $U\in M_n(\mathbb{C})$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) U เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี

(2) U หาผกผันได้ โดย $U^{-1}=U^*$

(3) $UU^*=I$ .....

(4) U^* เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี

(5) $|U|=I$ เมื่อ $|U|=f(U)$ โดย $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=|z|$

(6) การแปลงเชิงเส้น $L:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, $L(x)=Ux$ เป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี นั่นคือ $L^*L=I$ เมื่อ L^* คือผูกพัน (adjoint) ของ L

(7) เซตของคอลัมน์ทั้งหมดของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ (ซึ่งเป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติ เพราะมีสมาชิก n เวกเตอร์)

(8) เซตของแถวทั้งหมดของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ (ซึ่งเป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติ เพราะมีสมาชิก n เวกเตอร์)

(9) $\|Ux\|=\|x\|$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{C}^n$

(10) $\langle Ux,Uy\rangle=\langle x,y\rangle$ สำหรับทุก $x,y\in\mathbb{C}^n$

(11) U ส่งเซตเชิงตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{C}^n$ ไปเป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{C}^n$ นั่นคือ ถ้า $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ แล้ว $\{Ux_1, Ux_2, ..., Ux_k\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

(12) U ส่งฐานเชิงตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{C}^n$ ไปเป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{C}^n$

(13) U เขียนได้ในรูป $U = VDV^*$ เมื่อ $D \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักมีขนาดเป็น 1 และ $V \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี

(14) U เป็นเมทริกซ์ปรกติที่ทุกค่าลักษณะเฉพาะมีขนาดเป็น 1

(15) ทุกค่าลักษณะเฉพาะของ U มีขนาดเป็น 1 และ $\|Ux\| \le \|x\|$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^n$

(16) U หาผกผันได้ โดย $\|U\|_{op} \le 1$ และ $\left\|U^{-1}\right\|_{op} \le 1$ เมื่อ $\|A\|_{op} = \sup\limits_{x \in \mathbb{C}^n - \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ สำหรับแต่ละ $A \in M_n(\mathbb{C})$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า (1) – (4) สมมูลกัน

(1) $\Leftrightarrow$ (5) เมื่อ $f(z) = |z| = (\overline{z}z)^{1/2}$ จะได้ $|U| = f(U) = \left(U^*U\right)^{1/2}$ ดังนั้น $U^*U = I$ ก็ต่อเมื่อ $|U| = I$

(3) $\Leftrightarrow$ (8) ให้ u_i เป็นแถวที่ i ของ U สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, ..., n$ ถ้า $UU^* = I$ จะได้ว่า $u_i u_j^* = 1$ สำหรับ $i = j$ และ $u_i u_j^* = 0$ สำหรับ $i \ne j$ ดังนั้น (3) $\Rightarrow$ (8) ในทำนองเดียวกัน ถ้าเซตของแถวของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ จะได้ว่า $U^*U = I$ ดังนั้น (8) $\Rightarrow$ (3)

(1) $\Rightarrow$ (10) สำหรับแต่ละ $x, y \in \mathbb{C}^n$ จะได้ว่า

$$\langle Ux, Uy \rangle = (Uy)^*(Ux) = y^*U^*Ux = y^*x = \langle x, y \rangle$$

(10) $\Rightarrow$ (6) สมมติว่า U เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี สำหรับแต่ละ $x, y \in \mathbb{C}^n$ จะได้ว่า

$$\left\langle L^*L(x), y \right\rangle = \langle L(x), L(y) \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle .$$

นั่นคือ $L^*L = I$

(6) $\Rightarrow$ (1) ให้ B เป็นฐานอันดับมาตรฐาน (standard ordered basis) ของ $\mathbb{C}^n$ จะได้ว่า $U = [L]_B$ ดังนั้น

$$U^*U = [L]_B^*[L]_B = [L^*]_B[L]_B = [L^*L]_B = [I]_B = I$$

(10) $\Rightarrow$ (9) สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{C}^n$ จะได้ว่า $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ นั่นคือ $\|Ux\| = \|x\|$

(9) $\Rightarrow$ (15) ให้ $\lambda \in \sigma(U)$ โดยมี x เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้อง จะได้ว่า

$$\|x\| = \|Ux\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

ดังนั้น $|\lambda| = 1$ (เพราะ $x \ne 0$)

(15)$\Rightarrow$(1) โดยทฤษฎีบทที่ 1 เขียน $U = VTV^*$ เมื่อ V เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรีและ T เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน โดย

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $|\lambda_i| = 1$ สำหรับทุก $i = 1,2,\ldots,n$ ให้ v_i เป็นคอลัมน์ที่ i ของ V สำหรับแต่ละ $i = 1,2,\ldots,n$ พิจารณา $x = Ve_n = V\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = v_n$ จะได้ว่า

$$1 = \|v_n\| = \|x\| \geq \|Ux\| = \|VTe_n\| = \left\| \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{1n} \\ \vdots \\ t_{n-1,n} \\ \lambda_n \end{bmatrix} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} t_{in} v_i + \lambda_n v_n \right\|$$

เนื่องจากแต่ละ v_i ตั้งฉากกัน โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} t_{in} v_i + \lambda_n v_n \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |t_{in}|^2 \|v_i\|^2 + |\lambda_n|^2 \|v_n\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |t_{in}|^2 \right) + 1$$

ดังนั้น $t_{in} = 0$ สำหรับทุก $i < n$

ในทำนองเดียวกัน โดยการเลือกเวกเตอร์ x ที่เหมาะสม จะได้ว่า $t_{ij} = 0$ สำหรับทุก $i < j$ นั่นคือ T เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม จะได้ $T^*T = I$ และ

$$U^*U = VT^*V^*VTV^* = VT^*TV^* = VV^* = I$$

(10)$\Rightarrow$(11)$\Rightarrow$(12) เห็นได้ชัด

(12)$\Rightarrow$(7) ให้ u_i เป็นคอลัมน์ที่ i ของ U และ $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ โดยที่ e_i เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{C}^n$ ที่มีสมาชิกตัวที่ i เป็น 1 ส่วนสมาชิกตัวอื่นเป็น 0

เนื่องจาก E เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ และ $Ue_j = u_j$ เป็นคอลัมน์ที่ j ของ U ดังนั้น เซตของคอลัมน์ของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

(7)$\Rightarrow$(1) การพิสูจน์เป็นไปในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ (8)$\Rightarrow$(3)

(1)$\Longrightarrow$(13) โดยทฤษฎีบทที่ 1 จะมีเมทริกซ์ยูนิแทรี $V \in M_n(\mathbb{C})$ ที่ทำให้ $V^*UV = T$ เมื่อ $T = [\, t_{ij} \,]$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน ซึ่งจะเห็นได้ว่า $T^*T = TT^*$ เนื่องจาก $\sigma(T) = \sigma(U)$ จะได้ว่าสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ T มีขนาดเป็น 1 พิจารณาสมาชิกตำแหน่งที่ $(1,1)$ ของ T^*T และ TT^* จะได้ว่า

$$\overline{t_{11}}t_{11} = t_{11}\overline{t_{11}} + \sum_{j=2}^{n} t_{1j}\overline{t_{1j}}$$

ดังนั้น $\sum_{j=2}^{n}\left|t_{1j}\right|^2 = 0$ นั่นคือ $t_{1j} = 0$ สำหรับทุก $j = 2,3,\ldots,n$

พิจารณาสมาชิกตำแหน่งที่ $(2,2)$ ของ T^*T และ TT^* จะได้ว่า

$$\overline{t_{22}}t_{22} = t_{22}\overline{t_{22}} + \sum_{j=3}^{n} t_{2j}\overline{t_{2j}}$$

ดังนั้น $\sum_{j=3}^{n}\left|t_{2j}\right|^2 = 0$ นั่นคือ $t_{2j} = 0$ สำหรับทุก $j = 3,4,\ldots,n$ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้ $t_{ij} = 0$ สำหรับทุก $i < j$ นั่นคือ T เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

(13)$\Longrightarrow$(1) โดย (13) จะได้ว่า

$$U^*U = \left(VDV^*\right)^*\left(VDV^*\right) = VD^*V^*VDV^* = VD^*DV^* = VV^* = I$$

ดังนั้น U เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี

(13)$\Longrightarrow$(14) จาก $U = VDV^*$ จะได้ว่า $\sigma(U) = \sigma(D)$ นั่นคือ ทุกค่าลักษณะเฉพาะของ U มีขนาดเป็น 1 ยิ่งกว่านั้น

$$U^*U = VD^*V^*VDV^* = VD^*DV^* = VDD^*V^* = VDV^*VD^*V^* = UU^*$$

(14)$\Longrightarrow$(13) ได้จากทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์ปรกติ

(1)$\Longrightarrow$(16) สมมติว่า $U^*U = I$ จะได้ว่า U^{-1} เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี เนื่องจาก (1)$\Longleftrightarrow$(9) จะได้ว่า

$$\|U\|_{op} = \sup_{x\in\mathbb{C}^n-\{0\}}\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{C}^n-\{0\}}\frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

$$\left\|U^{-1}\right\|_{op} = \sup_{x\in\mathbb{C}^n-\{0\}}\frac{\left\|U^{-1}x\right\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{C}^n-\{0\}}\frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

(16)$\Longrightarrow$(1) สมมติว่า $\|U\|_{op} \le 1$ และ $\left\|U^{-1}\right\|_{op} \le 1$ สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{C}^n$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(U^* - U^{-1}\right)x\right\|^2 &= \left\langle \left(U^* - U^{-1}\right)x, \left(U^* - U^{-1}\right)x \right\rangle \\
&= \left\langle U^* x, U^* x \right\rangle - \left\langle U^* x, U^{-1}x \right\rangle - \left\langle U^{-1}x, U^* x \right\rangle + \left\langle U^{-1}x, U^{-1}x \right\rangle \\
&= \left\|U^* x\right\|^2 - \left\langle x, UU^{-1}x \right\rangle - \left\langle UU^{-1}x, x \right\rangle + \left\|U^{-1}x\right\|^2 \\
&\le \left\|U^*\right\|_{op}^2 \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \left\|U^{-1}\right\|_{op}^2 \|x\|^2 \\
&= \|U\|_{op}^2 \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \left\|U^{-1}\right\|_{op}^2 \|x\|^2 \\
&\le 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\left(U^* - U^{-1}\right)x = 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^n$ นั้นคือ $U^* = U^{-1}$

บทแทรกที่ 1 ให้ $U \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี จะได้ว่า $|\det U| = 1$
บทพิสูจน์ ให้ $\sigma(U) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ โดยทฤษฎีบทที่ 3 จะได้ว่า $|\lambda_i| = 1$ สำหรับทุก i ดังนั้น

$$|\det U| = \left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$$

บทนิยามที่ 6 สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ นิยาม**มุม** (angle) ระหว่าง x กับ y โดย

$$\theta_{x,y} = \cos^{-1}\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) \in [0, \pi]$$

นิยามดังกล่าวนิยามดีแล้วเนื่องจาก $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}^n$

บทแทรกที่ 2 เมทริกซ์เชิงตั้งฉากมีสมบัติคงสภาพมุม นั่นคือ สำหรับแต่ละเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก $U \in M_n(\mathbb{R})$ จะได้ว่า $\theta_{x,y} = \theta_{Ux,Uy}$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ โดยทฤษฎีบทที่ 3 จะได้ว่า

$$\frac{\langle Ux, Uy\rangle}{\|Ux\| \cdot \|Uy\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

ดังนั้น $\theta_{x,y} = \theta_{Ux,Uy}$

ทฤษฎีบทที่ 4 ทุกเมทริกซ์ยูนิแทรี U สามารถเขียนในรูปแบบ $U = \frac{1}{2}(V + W)$ เมื่อ V และ W เป็นเมทริกซ์ซึ่ง $\|V\| = \|W\| = 1$ โดย $\|\cdot\|$ คือ นอร์มของยุคลิด
บทพิสูจน์ ดูเอกสารอ้างอิง (Li and Poon, 2002)

กรุปของเมทริกซ์ยูนิแทรี

สำหรับ $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ หรือ $\mathbb{R}$ ให้ $GL(n,\mathbb{F})$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ที่มีสมาชิกอยู่ในฟิลด์ $\mathbb{F}$ ซึ่งหาผกผันได้ จะได้ว่า $GL(n,\mathbb{F})$ เป็นกรุปภายใต้การคูณเมทริกซ์ เซตย่อยที่สำคัญของ $GL(n,\mathbb{C})$ มีดังนี้

U_n คือ เซตของเมทริกซ์ยูนิแทรีขนาด $n\times n$

SU_n คือ เซตของเมทริกซ์ยูนิแทรีขนาด $n\times n$ ที่มีตัวกำหนดเป็น 1

O_n คือ เซตของเมทริกซ์เชิงตั้งฉากขนาด $n\times n$ ที่เป็นสมาชิกของ $M_n(\mathbb{R})$

SO_n คือ เซตของเมทริกซ์เชิงตั้งฉากขนาด $n\times n$ ที่เป็นสมาชิกของ $M_n(\mathbb{R})$ ซึ่งมีตัวกำหนดเป็น 1

ทฤษฎีบทที่ 5

1) SO_n เป็นกรุปย่อยปรกติ (normal subgroup) ของ O_n

2) O_n เป็นกรุปย่อยของ $GL(n,\mathbb{R})$

บทพิสูจน์ จะเห็นว่า $I\in SO_n\subseteq O_n$ ให้ $U,V\in O_n$ จะได้ว่า

$$(UV)^T(UV)=V^TU^TUV = V^TV = I$$

$$\left(U^{-1}\right)^T U^{-1}=\left(U^T\right)^{-1}U^{-1}=\left(UU^T\right)^{-1}=I$$

นั่นคือตัวผกผันและผลคูณระหว่างเมทริกซ์เชิงตั้งฉากเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก ดังนั้น O_n เป็นกรุปย่อยของ $GL(n,\mathbb{R})$ เมื่อพิจารณาร่วมกับสมบัติของตัวกำหนดที่ว่า $\det(AB)=(\det A)(\det B)$ และ $\det\left(A^{-1}\right)=(\det A)^{-1}$ สำหรับทุกเมทริกซ์ $A,B\in GL(n,\mathbb{R})$ จะได้ว่า SO_n เป็นกรุปย่อยปรกติของ O_n

ทฤษฎีบทที่ 6

1) SU_n เป็นกรุปย่อยปรกติของ U_n

2) U_n เป็นกรุปย่อยของ $GL(n,\mathbb{C})$

บทพิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบทที่ 5

ทฤษฎีบทที่ 7

1) SO_n เป็นกรุปย่อยของ SU_n

2) O_n เป็นกรุปย่อยของ U_n

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัด

ตัวอย่างที่ 1 SU_2 เป็นกรุปย่อยของ $GL(2,\mathbb{C})$ และมีสมาชิกอยู่ในรูปแบบ $\begin{bmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u}\end{bmatrix}$ เมื่อ $u,v\in\mathbb{C}$ โดยที่ $|u|^2+|v|^2=1$

บทนิยามที่ 7 เมทริกซ์ $P\in M_n(\mathbb{R})$ จะเรียกว่าเป็น**เมทริกซ์เรียงสับเปลี่ยน** (permutation matrix) ก็ต่อเมื่อสมาชิกในแต่ละตำแหน่งของ P เป็น 0 หรือ 1 โดยแต่ละแถวและแต่ละคอลัมน์จะมี 1 อยู่เพียงตัวเดียวเท่านั้น นั่นคือ P ได้จากการสลับที่ระหว่างแถวต่าง ๆ ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ ซึ่งหมายความว่ามีเมทริกซ์มูลฐาน $E_1,E_2,\ldots,E_k$ ที่ทำให้

$$P = E_1 E_2 \cdots E_k$$

โดยแต่ละ E_i เกิดจากการสลับที่ระหว่างสองแถวของเมทริกซ์เอกลักษณ์

เนื่องจาก $\det(E_i) = -1$ จะได้ $\det P = \det(E_1 E_2 \cdots E_k) = (-1)^k$ ดังนั้น

$$P^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1} = E_k^{T} \cdots E_2^{T} E_1^{T} = (E_1 E_2 \cdots E_k)^T = P^T$$

นั่นคือ $P^{-1} = P^T$ ยิ่งกว่านั้นสังเกตว่า $E_i^T = E_i$ ดังนั้น P^{-1} เป็นผลคูณของเมทริกซ์มูลฐานที่ได้จากการสลับที่ระหว่างสองแถวของเมทริกซ์เอกลักษณ์ นั่นคือ P^{-1} เป็นเมทริกซ์เรียงสับเปลี่ยน

ให้ P และ Q เป็นเมทริกซ์เรียงสับเปลี่ยน จะได้ว่ามีเมทริกซ์มูลฐาน E_i และ F_j ซึ่งเกิดจากการสลับที่ระหว่างสองแถวของเมทริกซ์เอกลักษณ์ สำหรับแต่ละ $1 \le i \le k$ และ $1 \le j \le m$ ที่ทำให้

$$P = E_1 E_2 \cdots E_k \quad \text{และ} \quad Q = F_1 F_2 \cdots F_m$$

จะได้

$$PQ = (E_1 E_2 \cdots E_k)(F_1 F_2 \cdots F_m)$$

นั่นคือ PQ เป็นผลคูณของเมทริกซ์มูลฐานที่เกิดจากการสลับที่ระหว่างสองแถวของเมทริกซ์เอกลักษณ์ ดังนั้น PQ เป็นเมทริกซ์เรียงสับเปลี่ยน

ทฤษฎีบทที่ 8 ทุกเมทริกซ์เรียงสับเปลี่ยนเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากและเซตของเมทริกซ์เรียงสับเปลี่ยนขนาด $n \times n$ เป็นกรุปย่อยของ O_n

ตัวอย่างที่สำคัญของเมทริกซ์ยูนิแทรี

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวอย่างที่สำคัญของเมทริกซ์ยูนิแทรี

ตัวอย่างที่ 2 การหมุนบนระนาบ (plane rotation)

ให้ $U(\theta; i, j) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการหมุนบนระนาบพิกัดที่ i กับพิกัดที่ j โดยหมุนเวกเตอร์บนระนาบนี้ด้วยมุม $\theta \in [0, 2\pi)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยพิกัดอื่นอีก $n-2$ พิกัดยังเหมือนเดิม โดย $U(\theta; i, j)$ ได้จากเมทริกซ์เอกลักษณ์ โดยแทนสมาชิกตำแหน่งที่ (i,i) และ (j,j) ด้วย $\cos\theta$ รวมทั้งแทนสมาชิกตำแหน่งที่ (i,j) และ (j,i) ด้วย $-\sin\theta$ และ $\sin\theta$ ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า $U(\theta; i, j)$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี

ตัวอย่างที่ 3 การสะท้อน (reflection)

พิจารณาเมทริกซ์ที่แทนการสะท้อนแบบต่าง ๆ ต่อไปนี้

$$U_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad U_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ U_1 เป็นการสะท้อนเทียบกับแกน X เมทริกซ์ U_2 เป็นการสะท้อนเทียบกับแกน Y เมทริกซ์ U_3 เป็นการสะท้อนเทียบกับแกน Z และเมทริกซ์ U_4 เป็นการสะท้อนเทียบกับจุดกำเนิด ซึ่งเมทริกซ์เหล่านี้เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี

ตัวอย่างที่ 4 การสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์

ให้ $w \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ และ $t = 2\left(w^* w\right)^{-1}$ พิจารณาเมทริกซ์ U_w ที่นิยามโดย

$$U_w = I - tww^*$$

จะได้ว่า U_w เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี ยิ่งกว่านั้น

1. $U_w(x) = -x$ สำหรับทุก $x \in span\{w\}$ นั่นคือ U_w ทำหน้าที่เป็นตัวดำเนินการสะท้อนบนปริภูมิย่อย $span\{w\}$
2. $U_w(x) = x$ สำหรับทุก x ที่ตั้งฉากกับ w นั่นคือ U_w ทำหน้าที่เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์บนปริภูมิย่อยที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งหมดที่ตั้งฉากกับ w

เราอาจเลือก w ที่สอดคล้องกับ $\|w\| = 1$ ในกรณีนี้จะได้ $t = 2$ เราเรียก U_w ว่า**การสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์**หรือ**การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์**เทียบกับ w ซึ่งถูกนำเสนอครั้งแรกในงานวิจัย (Householder, 1958)

ตัวอย่างที่ 5 เมทริกซ์ยูนิแทรีในทางกลศาสตร์ควอนตัม

ในทางกลศาสตร์ควอนตัม แบบจำลองวงจรควอนตัม (quantum circuit model) สร้างจากประตูควอนตัม (quantum gate) เช่นเดียวกับการที่ประตูสัญญาณตรรกะ (logic gate) เป็นส่วนประกอบพื้นฐานของวงจรดิจิตอล ประตูควอนตัมต่าง ๆ สามารถแทนได้ด้วยเมทริกซ์ยูนิแทรี ดังนี้

Pauli-X gate : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Phase shift gate : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$ เมื่อ $\theta \in \mathbb{R}$

Pauli-Y gate : $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ Hadamard gate : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Pauli-Z gate : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Swap gate แทนได้ด้วยเมทริกซ์ขนาด 4×4 ที่ได้จากการสลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3 ของเมทริกซ์เอกลักษณ์

Controlled gate แทนได้ด้วยเมทริกซ์ขนาด 4×4 ที่ได้จากการสลับแถวที่ 3 กับแถวที่ 4 ของเมทริกซ์เอกลักษณ์

Fredkin gate แทนได้ด้วยเมทริกซ์ขนาด 8×8 ที่ได้จากการสลับแถวที่ 6 กับแถวที่ 7 ของเมทริกซ์เอกลักษณ์

Toffoli gate แทนได้ด้วยเมทริกซ์ขนาด 8×8 ที่ได้จากการสลับแถวที่ 7 กับแถวที่ 8 ของเมทริกซ์เอกลักษณ์

เอกสารอ้างอิง

DePrima, C.R. and Johnson, C.R. (1974). The range of $A^{-1}A^{*}$ in $GL(n,\mathbb{C})$. Linear Algebra and Its Applications 9: 209-222.

Furuta,T. (2001). Invitation to Linear Operators: From Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space. London: Taylor & Francis. pp. 52-75.

Horn, R.A. (1990). Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press. pp. 66-71.

Householder, A.S. (1958). Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix. Journal of the ACM 5(4): 339-342.

Li, C. and Poon, E. (2002). Additive decomposition of real matrices. Linear and Multilinear Algebra 50(4): 321-326.

Trefethen, L.N. and Bau III, D. (1997). Numerical Linear Algebra. Philadephia: SIAM. pp. 69-76.

Zhang, F. (2011). Matrix theory: Basic Results and Techniques. 2nd ed. New York: Springer. pp. 171-195.

❑❑❑❑❑