ว.วิทย. มข. 41(4) 908-918 (2556)   KKU Sci. J. 41(4) 908-918 (2013)

เมทริกซ์ผูกพันและเมทริกซ์ผกผันของกึ่งจัตุรัสกล

Adjoint Matrix and Inverse Matrix of Semi-Magic Squares

นิรุต มีเกิด[1]

บทคัดย่อ

กึ่งจัตุรัสกล คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีผลรวมของสมาชิกแต่ละแถวและแต่ละหลักเท่ากับค่าคงตัว m ในบทความนี้เราจะแสดงว่า ถ้า A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m ซึ่ง $m \neq 0$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้ว adj (A) และ A^{-1} จะเป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$ และ $\frac{1}{m}$ ตามลำดับ

ABSTRACT

A semi-magic square is a square matrix whose row and column sums are all equal to the same constant m. In this paper, we prove that if A is a semi-magic square whose the sum is $m \neq 0$ and $\det(A) \neq 0$, then adj (A) and A^{-1} are semi-magic squares whose the sum are $\frac{\det(A)}{m}$ and $\frac{1}{m}$, respectively.

คำสำคัญ: เมทริกซ์ผูกพัน เมทริกซ์ผกผัน จัตุรัสกล กึ่งจัตุรัสกล

Keywords: Adjoint matrix, Inverse matrix, Magic squares, Semi-magic squares

บทนำ

กึ่งจัตุรัสกล (semi-magic square) อันดับ n คือ การเรียงจำนวนตรรกยะ (ส่วนใหญ่นิยมใช้จำนวนเต็ม) จำนวน n^2 จำนวน ลงในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งผลรวมของจำนวนในแต่ละแถว และแต่ละหลักมีค่าเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่ง ในกรณีที่ผลรวมของจำนวนในแต่ละแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากับผลรวมของจำนวนในแต่ละแถวและแต่ละหลัก เราจะเรียกว่า **จัตุรัสกล** (magic square) จัตุรัสกลใด ๆ ที่ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกเรียงกันไปโดยเริ่มตั้งแต่ 1 เรียกว่า **จัตุรัสกลปกติ** (normal magic square) ตัวอย่างของกึ่งจัตุรัสกล จัตุรัสกล และจัตุรัสกลปกติ แสดงดังรูปที่ 1

[1]โรงเรียนบ้านไร่พิทยาคม อำเภอศรีสำโรง จังหวัดสุโขทัย 64120

E-mail: meekoed@hotmail.com

4	3	8
2	7	6
9	5	1

กึ่งจัตุรัสกล

15	1	11
5	9	13
7	17	3

จัตุรัสกล

4	3	8
9	5	1
2	7	6

จัตุรัสกลปกติ

รูปที่ 1 ตัวอย่างของกึ่งจัตุรัสกล จัตุรัสกล และจัตุรัสกลปกติ

จากความหมายของกึ่งจัตุรัสกลและจัตุรัสกล เราสามารถกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า กึ่งจัตุรัสกล คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีผลรวมของสมาชิกแต่ละแถว และแต่ละหลักเท่ากัน จัตุรัสกล คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีผลรวมของสมาชิกแต่ละแถว แต่ละหลัก และแต่ละแนวทแยงมุมเท่ากัน ดังนั้นทุก ๆ จัตุรัสกลจะเป็นกึ่งจัตุรัสกล

เมทริกซ์ผูกพันและเมทริกซ์ผกผันของกึ่งจัตุรัสกล

บทตั้ง 1 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_n, B=\left[b_{ij}\right]_n, AB=\left[c_{ij}\right]_n$ ซึ่ง $\det(A)\neq 0, \det(B)\neq 0$ และ $x,y\in\mathbb{R}-\{0\}$ ถ้า $\sum_{j=1}^{n}c_{ij}=xy$ และ $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=x$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,3,\dots,n\}$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=y$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,3,\dots,n\}$

บทพิสูจน์ ให้

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$AB=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n}a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{3k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n}a_{3k}b_{k3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{3k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{k3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
a_{11}\sum_{j=1}^{n}b_{1j}+a_{12}\sum_{j=1}^{n}b_{2j}+a_{13}\sum_{j=1}^{n}b_{3j}+\ldots+a_{1n}\sum_{j=1}^{n}b_{nj} &= xy\\
a_{21}\sum_{j=1}^{n}b_{1j}+a_{22}\sum_{j=1}^{n}b_{2j}+a_{23}\sum_{j=1}^{n}b_{3j}+\ldots+a_{2n}\sum_{j=1}^{n}b_{nj} &= xy\\
&\vdots\\
a_{n1}\sum_{j=1}^{n}b_{1j}+a_{n2}\sum_{j=1}^{n}b_{2j}+a_{n3}\sum_{j=1}^{n}b_{3j}+\ldots+a_{nn}\sum_{j=1}^{n}b_{nj} &= xy
\end{aligned}
$$

ให้ $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=c_i y$ โดยที่ $c_i\in\mathbb{R}$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
a_{11}c_1y+a_{12}c_2y+a_{13}c_3y+\ldots+a_{1n}c_ny &= xy\\
a_{21}c_1y+a_{22}c_2y+a_{23}c_3y+\ldots+a_{2n}c_ny &= xy\\
&\vdots\\
a_{n1}c_1y+a_{n2}c_2y+a_{n3}c_3y+\ldots+a_{nn}c_ny &= xy
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
a_{11}c_1+a_{12}c_2+a_{13}c_3+\ldots+a_{1n}c_n &= x\\
a_{21}c_1+a_{22}c_2+a_{23}c_3+\ldots+a_{2n}c_n &= x\\
&\vdots\\
a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+a_{n3}c_3+\ldots+a_{nn}c_n &= x
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก det (A) $\neq 0$ ดังนั้นโดยกฎของคราเมอร์จะได้ว่า

$$
c_i=\frac{\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & x & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & x & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n}\\
a_{31} & \cdots & a_{3,i-1} & x & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3n}\\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & x & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}}
$$

$$c_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,i-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{3j} & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายตามหลักที่ i จะได้ว่า $c_i = 1$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

นั่นคือ $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = y$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ □

บทตั้ง 2 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_n, B = \left[b_{ij}\right]_n, AB = \left[c_{ij}\right]_n$ ซึ่ง det (A) ≠ 0, det (B) ≠ 0 และ $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ ถ้า $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = xy$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = x$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = y$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

บทพิสูจน์ ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} b_{11}\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + b_{21}\sum_{i=1}^{n} a_{i2} + b_{31}\sum_{i=1}^{n} a_{i3} + \ldots + b_{n1}\sum_{i=1}^{n} a_{in} &= xy \\ b_{12}\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + b_{22}\sum_{i=1}^{n} a_{i2} + b_{32}\sum_{i=1}^{n} a_{i3} + \ldots + b_{n2}\sum_{i=1}^{n} a_{in} &= xy \\ &\vdots \\ b_{1n}\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + b_{2n}\sum_{i=1}^{n} a_{i2} + b_{3n}\sum_{i=1}^{n} a_{i3} + \ldots + b_{nn}\sum_{i=1}^{n} a_{in} &= xy \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = x$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} b_{11}x + b_{21}x + b_{31}x + \ldots + b_{n1}x &= xy \\ b_{12}x + b_{22}x + b_{32}x + \ldots + b_{n2}x &= xy \\ &\vdots \\ b_{1n}x + b_{2n}x + b_{3n}x + \ldots + b_{nn}x &= xy \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = y$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ □

บทตั้ง 3 ให้ $A = [a_{ij}]_n, B = [b_{ij}]_n, AB = [c_{ij}]_n$ ซึ่ง $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$ และ $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ ถ้า $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = x$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ และ $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \neq y$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \neq xy$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

บทพิสูจน์ จากบทตั้ง 1 ให้ p แทนประพจน์ $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = xy$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

q แทนประพจน์ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = x$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

r แทนประพจน์ $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = y$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

เนื่องจาก $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$

ดังนั้นจะได้ว่าบทตั้ง 3 เป็นจริง $\square$

บทตั้ง 4 ให้ $A = [a_{ij}]_n, B = [b_{ij}]_n, AB = [c_{ij}]_n$ ซึ่ง $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$ และ $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ ถ้า $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = x$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, 3, ..., n$ และ $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \neq y$ สำหรับบาง $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} \neq xy$ สำหรับบาง $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

บทพิสูจน์ ทำนองเดียวกับบทตั้ง 3 $\square$

ทฤษฎีบท 5 ถ้า A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m ซึ่ง $m \neq 0$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้ว adj (A) และ A^{-1} จะเป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$ และ $\frac{1}{m}$ ตามลำดับ

บทพิสูจน์ 1 ให้ $A = [a_{ij}]_n$ เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m จะได้ว่า $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = m$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = m$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

ให้ $A^{-1} = [b_{ij}]_n$ สมมติว่า $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \neq \frac{1}{m}$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า $\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \neq m\left(\frac{1}{m}\right)$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

เมื่อ $AA^{-1} = I_n = [\delta_{ij}]_n$ กำหนดโดย

$$\delta_{ij} = \begin{matrix} 1 & ; & i = j \\ 0 & ; & i \neq j \end{matrix}$$

แต่เนื่องจาก $\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1$ และ $m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$ ดังนั้น $1 \neq 1$ ซึ่งขัดแย้ง นั่นคือ $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \frac{1}{m}$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

ทำนองเดียวกันโดยบทตั้ง 4 จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \frac{1}{m}$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ เพราะฉะนั้น A^{-1} เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{m}$

จาก $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ จะได้ว่า $\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{m}$

ดังนั้น adj (A) เป็นกึ่งจัตุรัสกลซึ่งมีผลบวกเท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$ □

บทพิสูจน์ 2 ให้ A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m จะได้ว่าผลรวมของสมาชิกตามแถวและตามหลักของ A เท่ากับ m

เนื่องจาก $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$ จะได้ว่าผลรวมของสมาชิกตามแถวและตามหลักของ $A \cdot \mathrm{adj}(A)$ เท่ากับ det (A)

จากผลรวมของสมาชิกตามแถวของ A เท่ากับ m และบทตั้ง 1 จะได้ว่าผลรวมของสมาชิกตามแถวของ adj (A) เท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$

จากผลรวมของสมาชิกตามหลักของ A เท่ากับ m และบทตั้ง 2 จะได้ว่าผลรวมของสมาชิกตามหลักของ adj (A) เท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$

ดังนั้น adj (A) เป็นกึ่งจัตุรัสกลซึ่งมีผลบวกเท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$

จาก $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$ จะได้ว่า A^{-1} เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{m}$ □

บทพิสูจน์ 3 ให้ A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m และ e = [1, 1, ... , 1] เป็นเวกเตอร์ขนาด 1×n ที่มีสมาชิกเท่ากับ 1 ในทุกตำแหน่ง จะได้ว่า $Ae^T = me^T$ และ eA = me

ดังนั้น $A^{-1}e^T = \frac{1}{m}e^T$ และ $eA^{-1} = \frac{1}{m}e$ ซึ่งจะได้ว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวและแต่ละหลักของ A^{-1} มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{m}$

และจากสมบัติที่ว่า $\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,A^{-1}$ จะได้ว่า $\mathrm{adj}(A)e^T = \frac{\det(A)}{m}e^T$ และ $e(\mathrm{adj}(A)) = \frac{\det(A)}{m}e$ ซึ่งจะได้ว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวและแต่ละหลักของ adj (A) มีค่าเท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$ □

บทแทรก 6 ถ้า A เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m ซึ่ง $m \neq 0$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้ว adj (A) และ A^{-1} จะเป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$ และ $\frac{1}{m}$ ตามลำดับ

บทพิสูจน์ เนื่องจากทุก ๆ จัตุรัสกลเป็นกึ่งจัตุรัสกล ดังนั้นบทแทรกเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 15 และจะได้ว่า det (A) = -360

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -68 & -8 & 52 \\ 7 & 22 & -53 \\ 37 & -38 & -23 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{90} & \frac{2}{90} & -\frac{13}{90} \\ -\frac{7}{360} & -\frac{11}{180} & \frac{53}{360} \\ -\frac{37}{360} & \frac{19}{180} & \frac{23}{360} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า adj (A) เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ -24 ซึ่ง $-24 = \frac{-360}{15}$ และ A^{-1} เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{15}$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $B = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 15 & 12 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 9 & 11 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า B เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 34 และจะได้ว่า det (B) = 6,528

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} 779 & 677 & -411 & -853 \\ -479 & -785 & 303 & 1153 \\ -547 & 371 & -717 & 1085 \\ 439 & -71 & 1017 & -1193 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{779}{6528} & \frac{677}{6528} & -\frac{137}{2176} & -\frac{853}{6528} \\ -\frac{479}{6528} & -\frac{785}{6528} & \frac{101}{2176} & \frac{1153}{6528} \\ -\frac{547}{6528} & \frac{371}{6528} & -\frac{239}{2176} & \frac{1085}{6528} \\ \frac{439}{6528} & -\frac{71}{6528} & \frac{339}{2176} & -\frac{1193}{6528} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า adj (B) เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 192 ซึ่ง $192 = \frac{6,528}{34}$ และ B^{-1} เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{34}$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $C = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า C เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 15 และจะได้ว่า det (C) = 360

$$\text{adj}(C) = \begin{bmatrix} 23 & -52 & 53 \\ 38 & 8 & -22 \\ -37 & 68 & -7 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{23}{360} & -\frac{13}{90} & \frac{53}{360} \\ \frac{19}{180} & \frac{1}{45} & -\frac{11}{180} \\ -\frac{37}{360} & \frac{17}{90} & -\frac{7}{360} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า adj (C) เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 24 ซึ่ง $24 = \frac{360}{15}$ และ C^{-1} เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{15}$

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $D = \begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า D เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 65

และจะได้ว่า det (D) = 5,070,000

$$\text{adj}(D) = \begin{bmatrix} -25025 & 259350 & -179400 & 5850 & 17225 \\ 218725 & -189150 & -23400 & 64350 & 7475 \\ -153400 & 15600 & 15600 & 15600 & 184600 \\ 23725 & -33150 & 54600 & 220350 & -187525 \\ 13975 & 25350 & 210600 & -228150 & 56225 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{77}{15600} & \frac{133}{2600} & -\frac{23}{650} & \frac{3}{2600} & \frac{53}{15600} \\ \frac{673}{15600} & -\frac{97}{2600} & -\frac{3}{650} & \frac{33}{2600} & \frac{23}{15600} \\ -\frac{59}{1950} & \frac{1}{325} & \frac{1}{325} & \frac{1}{325} & \frac{71}{1950} \\ \frac{73}{15600} & -\frac{17}{2600} & \frac{7}{650} & \frac{113}{2600} & -\frac{577}{15600} \\ \frac{43}{15600} & \frac{1}{200} & \frac{27}{650} & -\frac{9}{200} & \frac{173}{15600} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า adj (D) เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 78,000 ซึ่ง $78,000 = \frac{5,070,000}{65}$ และ D^{-1} เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{65}$

จัตุรัสกลที่ไม่สามารถหาตัวผกผันได้ (มีค่าดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับ 0 หรือเป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)) เช่น

1. regular magic square อันดับคู่ (Mattingly, 2000)

เป็นจัตุรัสกลที่มีเงื่อนไขว่า $a_{ij} + a_{n-i+1,n-j+1} = n^2 + 1; i = 1, 2, \ldots , n; j = 1, 2, \ldots , n$ ตัวอย่างของ regular magic square อันดับคู่ เช่น

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 63 & 62 & 4 & 5 & 59 & 58 & 8 \\ 56 & 10 & 11 & 53 & 52 & 14 & 15 & 49 \\ 48 & 18 & 19 & 45 & 44 & 22 & 23 & 41 \\ 25 & 39 & 38 & 28 & 29 & 35 & 34 & 32 \\ 33 & 31 & 30 & 36 & 37 & 27 & 26 & 40 \\ 24 & 42 & 43 & 21 & 20 & 46 & 47 & 17 \\ 16 & 50 & 51 & 13 & 12 & 54 & 55 & 9 \\ 57 & 7 & 6 & 60 & 61 & 3 & 2 & 64 \end{bmatrix}$$

2. pandiagonal magic square อันดับคู่ (Chater, 1949)

เป็นจัตุรัสกลที่มีผลรวมในแนวเส้นทแยงมุมหัก (broken diagonal) เท่ากับผลบวก เส้นทแยงมุมหัก คือ เส้นสองเส้นที่ขนานกับเส้นทแยงมุมหลัก โดยตัดผ่านจำนวนที่อยู่ต่างแถวและต่างหลัก ตัวอย่างของเส้นทแยงมุมหักสามารถแสดงให้เห็นดังรูปที่ 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

รูปที่ 2 ภาพแสดงเส้นทแยงมุมหัก

จากรูปที่ 2 จำนวนที่เส้นทแยงมุมหักตัดผ่าน ได้แก่ (15, 8, 2, 9), (4, 10, 13, 7), (14, 5, 3, 12), (1, 10, 16, 7), (14, 8, 3, 9) และ (4, 11, 13, 6)

ตัวอย่างของ pandiagonal magic square อันดับคู่ เช่น

$$\begin{bmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 57 & 2 & 58 & 16 & 56 & 15 & 55 \\ 23 & 47 & 24 & 48 & 26 & 34 & 25 & 33 \\ 46 & 22 & 45 & 21 & 35 & 27 & 36 & 28 \\ 60 & 4 & 59 & 3 & 53 & 13 & 54 & 14 \\ 17 & 41 & 18 & 42 & 32 & 40 & 31 & 39 \\ 7 & 63 & 8 & 64 & 10 & 50 & 9 & 49 \\ 62 & 6 & 61 & 5 & 51 & 11 & 52 & 12 \\ 44 & 20 & 43 & 19 & 37 & 29 & 38 & 30 \end{bmatrix}$$

เอกสารอ้างอิง

Andrews, W. S. (1960). Magic squares and cubes. New York: Dover.

Beck, M., Cohen, M., Cuomo, J. and Gribelyuk, P. (2003). The number of “magic” squares, cubes, and hypercubes. The American Mathematical Monthly 110: 707-717.

Benson, W. H. and Jacoby, O. (1981). Magic Cubes. New York: Dover.

Chater, N. and Chater, W. J. (1949). On the determinants of pan-magic squares of even order. The Mathematical Gazette 33: 94-98.

Essen, A. V. D. (1990). Magic Squares and Linear Algebra. The American Mathematical Monthly 97: 60-62.

Fults, J. L. (1974). Magic squares. Illinois: Open Court.

Mattingly, R. B. (2000). Even Order Regular Magic Squares Are Singular. The American Mathematical Monthly 107: 777-782.

Winter, D. J. (1992). Matrix algebra. Singapore: Macmillan.

❑❑❑❑❑